Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(9), 837-842
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.109096

Hans汉斯

一类微分方程组的亚纯解

徐　慧，张蒙蒙

中国石油大学(华东)理学院，山东 青岛
Email: xuhuixumengxiao@163.com, 13663622736@163.com

收稿日期：2020年8月14日；录用日期：2020年9月7日；发布日期：2020年9月14日

摘　要

本文主要研究某些给定的微分方程组的$\rho_2(f)<1$的整体解或亚纯解的存在性，并获得一些有意义结果。并且，如果考虑的方程组允许超越解的存在，那么我们可以获得求解的精确表达。我们的结果改进和补充了前人的研究成果。

关键词

Nevanlinna理论，差分－微分方程，亚纯解，超越阶，小函数

Meromorphic Solutions to Some Systems of Difference-Differential Equations

Hui Xu, Mengmeng Zhang

College of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong
Email: xuhuixumengxiao@163.com, 13663622736@163.com

Received: Aug. 14th, 2020; accepted: Sep. 7th, 2020; published: Sep. 14th, 2020

Abstract

In this paper, we will mainly study further on the existence of entire or meromorphic solutions with $\rho_2(f)<1$ of some given systems of difference-differential equations, and obtain some interesting results. And if the considered systems admit a transcendental entire solution, then we can obtain the precise expression of the solution. Our results improve and complement the previous research results.

文章引用: 徐慧, 张蒙蒙. 一类微分方程组的亚纯解[J]. 理论数学, 2020, 10(9): 837-842.
DOI: 10.12677/pm.2020.109096

Keywords

Nevanlinna Theory, Difference-Differential Equation, Meromorphic Solution, Hyper-Order, Small Function

1. 引言

设f表示超越亚纯函数。假设已知Nevanlinna理论的基本结果及其标准符号，如$m(r,f),N(r,f),T(r,f),S(r,f)$等，见[1]和[2]。在研究复平面上的微分方程时，证明某些给定微分方程的整体解或亚纯解的存在性或唯一性一直是一个有趣而困难的问题。最近，有许多研究和结果与不同方程的整体或亚纯解的存在性或增长性有关，见[3] [4] [5]中的参考文献。当$r\to\infty$时，$T(r,a)=S(r,f)(=o(1)T(r,f))$非恒定亚纯函数$\alpha$被称为$f$的小函数，可能在有限线性测度的$r$值集合之外。此外，$\rho_2(f)$超阶定义为：

$$\rho_2(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}$$

费马型泛函方程亚纯解

$$f(z)^n+g(z)^n=1 \tag{1.1}$$

Gross [6]证明(1.1)在$n\geq 4$时不存在超越亚纯解，Montel [7]证明(1.1)在$n\geq 3$时不存在超越全解。Iyer [8]得出结论，如果$n=2$，那么(1.1)有完整的解$f(z)=\sin(h(z))$和$g(z)=\cos(h(z))$，其中$h(z)$是任何整函数，不存在其他解。近年来，许多文献都集中在复微分方程和微分方程的亚纯解上。费马型函数方程已被许多作者研究过。让我们从[9]中给出的结果开始。我们重写了原定理，如下，Yang [9]研究了费马型泛函方程：

$$a(z)f(z)^n+b(z)g(z)^m=1 \tag{1.2}$$

其中$a(z)$，$b(z)$是关于$f(z)$的小函数。其得到了以下结果。

定理A 设m，n为正整数满足：

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$$

则不存在满足(1.2)的非恒定整体解$f(z)$和$g(z)$。定理A表明在(1.2)中存在$m>2$，$n>2$的非恒定整体解。然而，当$m=n=2$以及$g(z)$与(1.2)中的$f(z)$有特殊关系时，这个问题值得考虑。Tang和Liao [10]研究了费马型方程推广的整体解。Liu和Yang [10]考虑了微分方程的有限阶整体解：

$$f(z+c)^2+\left(f^{(k)}(z)\right)^2=1 \tag{1.3}$$

其中c表示一个非零常数。2017年，高凌云研究了具有有限阶微分方程的整体解，得到了以下结果。

定理B 设ω是下面微分方程的有限阶超越整体解：

$$\left(\omega''(z)-\omega(z)\right)^2+\omega(z+c)^2=1 \tag{1.4}$$

则

$$\omega(z)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}z+b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z-b}}{2}=\cos\left[i\left(\sqrt{2}z+b\right)\right]$$

或

$$\omega(z)=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z+b}+\mathrm{e}^{\sqrt{2}z-b}}{2}=\cos\left[-i\left(\sqrt{2}z-b\right)\right]$$

其中 b 是常数，$c=\frac{(1+4k)\pi}{2\sqrt{2}}$，$k$ 是整数。如果将限制条件“有限阶”扩展到“超阶 $\rho_2<1$”，我们能够得到以下结果。

定理 1.1 设 ω 为微分方程(1.4)的 $\rho_2(\omega)<1$ 的超越整体解，则 $\omega(z)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}z+b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z-b}}{2}$，或 $\omega(z)=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z+b}+\mathrm{e}^{\sqrt{2}z-b}}{2}$，其中 b 是常数，$c=\frac{(1+4k)\pi}{2\sqrt{2}}$，$k$ 是整数。

最近，高凌云研究了两类不同微分方程组的有限阶整体解，得到了以下结果。

定理 C 假设整函数 ω_1,ω_2 满足方程组

$$\left(\omega_1''(z)-\omega_1(z)\right)^2+\omega_2(z+c)^2=1,\ \left(\omega_2''(z)-\omega_2(z)\right)^2+\omega_1(z+c)^2=1 \tag{1.5}$$

若 $\rho(\omega_1,\omega_2)<\infty$，则

$$\left(\omega_1(z),\omega_2(z)\right)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}z+b_1}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z-b_1}}{2},\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}z+b_2}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z-b_2}}{2}\right)$$

或

$$\left(\omega_1(z),\omega_2(z)\right)=\left(\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z+b_1}+\mathrm{e}^{\sqrt{2}z-b_1}}{2},\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}z+b_2}+\mathrm{e}^{\sqrt{2}z-b_2}}{2}\right)$$

其中 b 是常数，$c=\frac{(1+4k)\pi}{2\sqrt{2}}$，$k$ 是整数。

本文去掉了“有限阶”的限制条件，并且得到了如下定理

定理 1.2 如果用弱约束条件“$\rho_2(\omega_1,\omega_2)<1$”代替约束条件“$\rho(\omega_1,\omega_2)<\infty$”，则定理 C 的结论也成立。

2. 主要引理

为了证明我们的定理，我们需要以下结论。

引理2.1 ([11]) 假设f是非正常亚纯函数，$p(f)=a_0f^n+a_1f^{n-1}+\cdots+a_n$. 当 a_0 不恒为零，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $T(r,a_i)=S(r,f)$, $i=0,1,\cdots,n$.那么 $p(f)$ 满足

$$T(r,p(f))=nT(r,f)+S(r,f)$$

引理2.2 ([12])设f是一个非常数亚纯函数，$\rho_2(f)<1$，$c\in C$，有

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=S(r,f)$$

在有限对数测度的可能的例外集之外。

引理2.3 ([2]，定理1.44和定理1.45)设h为非常数整函数，$f(z)=e^{h(z)}$。如果$h(z)$是p次多项式，则得到

(1) 如果$h(z)$是p次多项式，$\rho(f)=\mu(f)=p$；

(2) 如果$h(z)$是超越整函数，$\rho(f)=\mu(f)=\infty$；

(3) $\rho_2(f)=\rho(h)$

引理2.4 ([2]，定理1.55)设$g_1,g_2,\cdots,g_p$，是满足$\Theta(\infty,g_j)=1$ ($j=1,2,\cdots,p$)的超越亚纯函数。当$a_j\in C-\{0\}$ ($j=1,2,\cdots,p$)时，$\sum_{j=1}^{p}a_jg_j=1$，我们得到$\sum_{j=1}^{p}\delta(0,g_j)<p-1$

3. 定理1.1的证明

假设ω是$\rho(\omega)<1$的(4.4)的超越整体解。为了证明定理1.1，(1.4)写为

$$\omega''(z)-\omega(z)=\sin h(z),\ \omega(z+c)=\cos h(z) \tag{3.1}$$

其中，h为非恒定整函数。

当$\rho_2(\omega(z+c))=\rho(\omega(z))<1$时，$T(r,\omega(z))=T(r,\omega(z+c))+S(r,\omega(z))$。由(3.1)，引理2.1，引理2.2，引理2.3，可得$\rho(h)<1$。再次使用(3.1)，结果如下所示：

$$\omega(z)=\cos h(z-c),\ \omega''(z)=-\cos h(z-c)h'^2(z-c)-\sin h(z-c)h'^2(z-c)$$

由此可得：

$$\left[ih'^2(z-c)+h''(z-c)+i\right]e^{2ih(z-c)}+e^{i[h(z)+h(z-c)]}-e^{i[h(z-c)-h(z)]}=h''(z-c)-ih'^2(z-c)-i \tag{3.2}$$

情形1 如果$h''(z-c)+ih'^2(z-c)+i\equiv 0$，则(3.2)可化为

$$e^{i[h(z)+h(z-c)]}-e^{i[h(z-c)-h(z)]}=2h''(z-c) \tag{3.3}$$

由$h''(z-c)\equiv 0$得(3.3)中的$h(z)$是一个常数。因此$h''(z-c)\not\equiv 0$。

情形2 如果$h''(z-c)+ih'^2(z-c)+i\not\equiv 0$，$h''(z-c)-ih'^2(z-c)-i\equiv 0$，则(3.2)变为

$$2h''(z-c)e^{i[h(z)+h(z-c)]}+e^{2ih(z-c)}=1$$

因此$h''(z-c)-ih'^2(z-c)-i\not\equiv 0$。

由于$h(z)$不是常数，我们得到了$h(z-c)-h(z)$和$h(z)+h(z-c)$不能都是常数的结论。首先，假设$h(z)-h(z-c)$是常数，则$h'(z)$是周期函数。如果$h'(z)$不是常数，则$\rho(h')\ge 1$，即矛盾。因此，$h'(z)$是常数，同时得到$h(z)=Az+B$，其中A,B是常数。在这种情况下，我们知道定理1.1的结论是成立的。同理，如果$h(z)+h(z-c)$是常数，我们知道定理1.1的结论也成立。现在，我们可以假设$h(z)+h(z-c)$和$h(z-c)-h(z)$不是常数，在这种情况下，引理2.4告诉我们，这是不可能的。因此，我们完成了定理1.1的证明。

4. 定理1.2的证明

假设(ω_1,ω_2)是(1.5)的超越整体解，且$\rho_2(\omega_1,\omega_2)<1$。显然，由(4.5)得

$$\omega_1''(z)-\omega_1(z)=\sin h_1(z),\quad \omega_2(z+c)=\cos h_1(z) \tag{4.1}$$

$$\omega_2''(z)-\omega_2(z)=\sin h_2(z),\quad \omega_1(z+c)=\cos h_2(z) \tag{4.2}$$

其中，h_1,h_2 是非恒定的整函数。

此外，通过(4.1)以及引理2.3中的条件 $\rho(h_1)=\rho_2(\omega_2)<1$，此外，(4.2)也给出了 $\rho(h_2)=\rho_2(\omega_1)<1$。结合(4.1)和(4.2)，我们得到

$$\omega_1(z)=\cos h_2(z-c),\quad \omega_1''(z)=-\cos h_2(z-c)h_2'^2(z-c)-\sin h_2(z-c)h_2'^2(z-c) \tag{4.3}$$

$$\omega_2(z)=\cos h_1(z-c),\quad \omega_2''(z)=-\cos h_1(z-c)h_1'^2(z-c)-\sin h_1(z-c)h_1'^2(z-c) \tag{4.4}$$

由上述式子又可得

$$\left[ih_2'^2(z-c)+h_2''(z-c)+i\right]\mathrm{e}^{2ih_2(z-c)}+\mathrm{e}^{i\left[h_1(z)+h_2(z-c)\right]}-\mathrm{e}^{i\left[h_2(z-c)-h_1(z)\right]}=h_2''(z-c)+ih_2'^2(z-c)+i \tag{4.5}$$

$$\left[ih_1'^2(z-c)+h_1''(z-c)+i\right]\mathrm{e}^{2ih_1(z-c)}+\mathrm{e}^{i\left[h_2(z)+h_1(z-c)\right]}-\mathrm{e}^{i\left[h_1(z-c)-h_2(z)\right]}=h_1''(z-c)-ih_1'^2(z-c)-i \tag{4.6}$$

以定理1.1的证明方式继续进行，为了证明定理1.2，将考虑以下情况。

情形1若 $h_2''(z-c)+ih_2'^2(z-c)+i\equiv 0$，则(4.5)变为

$$\mathrm{e}^{i\left[h_1(z)+h_2(z-c)\right]}-\mathrm{e}^{i\left[h_2(z-c)-h_1(z)\right]}=2h_2''(z-c) \tag{4.7}$$

如果 $h_2''(z-c)\equiv 0$，则(4.7)中 $h_1(z)$ 是一个常数。因此 $h_2''(z-c)\not\equiv 0$。

情形2若 $h_1''(z-c)+ih_1'^2(z-c)+i\not\equiv 0$ 且 $h_1''(z-c)-ih_1'^2(z-c)-i\equiv 0$，则(4.5)为

$$2h_2''(z-c)\mathrm{e}^{i\left[h_1(z)+h_2(z-c)\right]}+\mathrm{e}^{2ih_1(z)}=1$$

这是不可能的。因此有：

$$h_2''(z-c)+ih_2'^2(z-c)+i\not\equiv 0,\quad h_2''(z-c)-ih_2'^2(z-c)-i\not\equiv 0 \tag{4.8}$$

同理，利用同样的方法，通过(4.6)我们可以证明如下结果：

$$h_1''(z-c)+ih_1'^2(z-c)+i\not\equiv 0,\quad h_1''(z-c)-ih_1'^2(z-c)-i\not\equiv 0 \tag{4.9}$$

通过(4.5)，(4.6)，(4.8)和(4.9)以及引理 2.4，我们可以得到 $h_2(z-c)-h_1(z)$ 是常数，或者 $h_1(z)+h_2(z-c)$ 是常数，或者 $h_1(z-c)-h_2(z)$ 是常数，或者 $h_2(z)+h_1(z-c)$ 是常数。

显然，如果 $h_2(z-c)-h_1(z)$ 是常数，则(4.6)表示 $h_1(z-c)-h_2(z)$ 是常数，或者 $h_2(z)+h_1(z-c)$ 是常数。

假设 $h_2(z-c)-h_1(z)$ 和 $h_1(z-c)-h_2(z)$ 是常数。在这种情况下，很容易证明 $h_1'(z)$ 是周期函数。如果 $h_1'(z)$ 不是常数，则 $\rho(h_1)\ge 1$，这与 $\rho(h_1)<1$ 相矛盾。因此 h_1' 是常数，我们设 $h_1(z)=s_1z+t_1$，其中 s_1,t_1 是常数。此外，我们也可以得到 $h_2(z)=s_2z+t_2$，其中 s_2,t_2 是常数。在这种情况下，我们知道定理 1.2 的结论成立。

接下来，假设 $h_2(z-c)-h_1(z)$ 和 $h_2(z)+h_1(z-c)$ 是常数。在这种情况下，很容易看出 $h_2'(z)$ 是一个周期函数。如果 $h_2'(z)$ 不是常数，则 $\rho(h_2)\ge 1$，这与 $\rho(h_2)<1$ 相矛盾。因此 h_2' 是常数，我们设 $h_2(z)=u_2z+v_2$，其中 u_2,v_2 是常数。此外，我们可以得到 $h_1(z)=u_1z+v_1$，其中 u_1,v_1 是常数。在这种情况下，我们知道定理 1.2 的结论成立。

5. 总结

本文利用不同且更简单的证明，给出了三个主要结果，扩展了文献[13]中的主要结果，以上两个结果是在更弱的约束条件下得到的，故对于实际来讲更优。

致　谢

非常感谢中国石油大学(华东)提供的良好研究环境以及大学生创新创业训练项目“一类复方程解的存在性及其相关问题的研究”(项目编号：201910425077)提供的大力支持。

参考文献

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing/New York. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[3] Chen, Z.X. (2014) Complex Differences and Difference Equations. Science Press, Beijing. https://doi.org/10.1155/2014/124843

[4] Liu, K. and Yang, L.Z. (2013) On Entire Solutions of Some Differential-Difference Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **13**, 433-447. https://doi.org/10.1007/s40315-013-0030-2

[5] Yang, C.C. and Laine, I. (2010) On Analogies between Nonlinear Difference and Differential Equations. *Proceedings of the Japan Academy*, *Series A*, *Mathematical Sciences*, **86**, 10-14. https://doi.org/10.3792/pjaa.86.10

[6] Gross, F. (1966) On the Equation fn + gn = 1. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **72**, 86-88. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11429-5

[7] Montel, P. (1927) Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. GauthierVillars, Paris, 135-136. (in French)

[8] Iyer, G. (1939) On Certain Functional Equations. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, **3**, 312-315.

[9] Yang, C.C. (1970) A Generalization of a Theorem of P. Montel on Entire Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **26**, 332-334. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0264080-X

[10] Tang, J.F. and Liao, L.W. (2007) The Transcendental Meromorphic Solutions of a Certain Type of Nonlinear Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **334**, 517-527. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.12.075

[11] Yang, C.C. (1972) On Dificiencies of Differential Polynomials, II. *Mathematische Zeitschrift*, **125**, 107-112. https://doi.org/10.1007/BF01110921

[12] Halburd, R.G., Korhonen, R.J. and Tohge, K. (2014) Holomorphic Curves with Shift-Invariant Hyperplane Preimages. *Transactions of the American Mathematical Society*, **366**, 4267-4298. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05949-7

[13] Gao, L.Y. (2017) On Entire Solutions of Two Types of Systems of Complex Differential-Difference Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **37B**, 187-194. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(16)30124-2