Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 969-973
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010113

关于弱网与拟网及其子网的一些探究

丁玄伊，朱培勇

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 973154903@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月22日；发布日期：2020年10月29日

摘 要

讨论了可数个各类定向集乘积序的性质，得到了可数个弱定向集(拟定向集，定向集)的乘积也是弱定向(拟定向集，定向集)的这一结果。引入拟网与弱网接触点以及收敛的概念，由此探究了拟网与其拟子网(弱子网)之间的联系，对拟网与弱网收敛性进行了更为深刻的刻画，证明了拟网(弱网)关于紧空间的一个收敛结果；提出了严格拟定向集和严格弱定向集这一概念，在此基础上推广到严格拟网以及严格弱网，对各类型网与子网的关系进行了刻画。

关键词

乘集序，接触点，严格拟网，严格弱网

Some Explorations on the Weak and Proposed Networks and Their Subnets

Xuanyi Ding, Peiyong Zhu

School of Mathematical Science, University of Electronic Science and technology, Chengdu Sichuan
Email: 973154903@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 22nd, 2020; published: Oct. 29th, 2020

Abstract

This paper discusses the nature of the product sequence of several kinds of directional sets, and obtains the result that the product of several weak directional sets (proposed set, directional set) is also weakly oriented (proposed set, directional set). The concept of the contact point and convergence between the proposed net and the weak net is introduced, thus the connection between the proposed net and its proposed subnet (weak subnet) is explored, the convergence between the proposed net and the weak net is depicted more deeply, and the convergence result of the pro-

文章引用: 丁玄伊, 朱培勇. 关于弱网与拟网及其子网的一些探究[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 969-973.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010113

posed net (weak net) is proved to be a convergence of tight space.

Keywords

Product Order, Contact Point, Strictly Quasi Net, Strictly Weak Network

1. 引言与预备知识

在文献[1]中提出了弱网与拟网的概念，并且系统地讨论了弱网与拟网的收敛性。除此之外，类比拓扑空间中子网的概念，引入了弱子网与拟子网的概念，对弱网与拟网与其各类型子网之间的收敛关系进行了简单刻画。在文献[3]-[10]中，网在拓扑空间中的收敛已经取得了一些成果；文献[11] [12] [13] [14] [15]中讨论了子网收敛。那么有关弱网与其各类型子网之间是否有更多的联系？收敛关系能否进行更深层的刻画？本文将就这些问题进行探究。

定义 1 [1]一个传递序集$(S,\prec)$称为是一个弱定向集，如果$\forall x,y\in S$，$\exists z\in S$，使得$x\prec z$且$y\prec z$；具有自反性的弱定向集称为拟定向集，即拟序集$(S,\prec)$称为是一个拟定向集，如果$\forall x,y\in S$，$\exists z\in S$，使得$x\prec z$且$y\prec z$。

定义 2 [1]设X是一个非空集合，称映射$f:S\to X$是X上的一个弱网(或者拟网)，如果$(S,\prec)$是一个弱定向集(或者拟定向集)。记为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$，其中：$x_\delta=f(\delta)$ ($\forall\delta\in S$)。

定义 3 [1]设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$和$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$为拓扑空间$X$中任何类型的两个网，若存在映射$J:\Delta\to S$，使得$\forall\alpha\in\Delta$，有$y_\alpha=x_{J(\alpha)}$，并且满足下列两个条件：

(SN_1) $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\Delta$，若$\alpha_1\prec\alpha_2$，则$J(\alpha_1)\prec J(\alpha_2)$；

(SN_2) $\forall\delta\in S,\exists\alpha\in\Delta$，使得$\delta\prec J(\alpha)$。

根据$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$的类型，称$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的子网、拟子网或弱子网。

定理 1 [1] (1) 具有自反性的传递序集是拟序集；(2) 具有反称性的拟序集是偏序集。

定理 2 [2] 设X为一拓扑空间，$A\subset X$，则$x\in\bar{A}$当且仅当$\forall U\in\mathcal{U}(x)$，$U\cap A=\varnothing$；其中$\mathcal{U}(x)$是点$x$的邻域系，$\bar{A}$为$A$的闭包。

在本文中，如果没有特别申明，所涉及的其它符号、概念、定理都来自于文献[2]。

2. 拟网(弱网)与其子网

定义 4 设$\{(X_i,\prec_i)\}_{i=1}^n$是$n$个传递集，在笛卡尔积$\prod_{i=1}^n X_i$上定义的关系“$\prec$”称为$n$-乘积序，如果对于$\forall x=(x_1,\cdots x_n)$，$y=(y_1,\cdots y_n)\in\prod_{i=1}^n X_i$，$x\prec y$当且仅当$\forall i$ $(1\le i\le n)$，有$x_i\prec_i y_i$。这时称有序偶$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\prec\right)$是$\{(X_i,\prec_i)\}_{i=1}^n$的乘积，并且每个都称为是$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\prec\right)$其的乘积因子(简称因子)。其中：$n$是不小于2的自然数或者是正无穷大$+\infty$。

根据上述定义，有如下定理：

定理 3 有限个或者可数个弱定向集(拟定向集，定向集)的乘积也是弱定向(拟定向，定向)的。

证明 仅对 n 是不小于 2 的自然数进行证明。当 $n=+\infty$ 时，证明方法完全类似。

(1) 设每个 $(X_i,\prec_i)$ 是弱定向集 $(i=1,\cdots,n)$。因为对于 $(x_1,\cdots,x_n)$，$(y_1,\cdots,y_n)$，$(z_1,\cdots,z_n)\in\prod_{k=1}^n X_k$，如果 $(x_1,\cdots,x_n)\prec(y_1,\cdots,y_n)$ 并且 $(y_1,\cdots,y_n)\prec(z_1,\cdots,z_n)$，由定义 4，$x_i\prec_i y_i$ 并且 $y_i\prec_i z_i$，再由弱定向的传递性，有 $x_i\prec_i z_i$ $(i=1,\cdots,n)$。因此，$(x_1,\cdots,x_n)\prec(z_1,\cdots,z_n)$。从而，$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\prec\right)$ 是弱定向的。

(2) 要证明 n 个拟定向集的乘积是拟定向集，由定理 1，只需证明：乘积序 $\prec$ 是自反的。事实上，$\forall(x_1,\cdots x_n)\in\prod_{k=1}^n X_k$，因为每个 $(X_i,\prec_i)$ 是拟定向的，即每个 $\prec_i$ 自反，因此 $x_i\prec_i x_i$ $(i=1,\cdots,n)$，所以 $(x_1,\cdots,x_n)\prec(x_1,\cdots,x_n)$。乘积序 $\prec$ 具有自反性。

同上面(2)的情形一样，要证明 n 个定向集的乘积也是定向集，只需证明：乘积序 $\prec$ 具有反称性。事实上，不难证明：乘积对反称性是保持的。因此，结论不证自明。

现在，引入弱网与拟网接触点以及收敛的概念：

定义 5 设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是拓扑空间 X 中的一个拟网(或者弱网)，$x_0\in X$，称 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 终在 U 内，如果 $\exists\delta_0\in S$，使得 $\forall\delta\in S,\ \delta\succ\delta_0$ 时恒有 $x_\delta\in U$；若 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 终在 x_0 的每一个领域内，则称 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 收敛于 x_0。

定义 6 设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是空间 X 中的一个拟网(或者弱网)，$x_0\in X$ 并且 $U\subset X$。称 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是常在 U 中的，如果 $\forall\delta\in S,\ \exists\delta_0\in S$ 使得 $\delta_0\succ\delta$，并且 $x_{\delta_0}\in U$；若 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 常在 x_0 的每一个领域内，则称 x_0 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的一个接触点。

由此，我们得到了弱网(或者拟网)与其各类型子网之间的收敛关系的如下一些结果：

定理 4 设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是空间 X 中的一个拟网，$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)(\mathcal{A}\neq\varnothing)$，它使得 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 常在 $\mathcal{A}$ 的每个元内并且还使得 $\mathcal{A}$ 内任意两个元之交包含 $\mathcal{A}$ 的一个元，则 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 有一个拟子网(或者弱子网)终在 $\mathcal{A}$ 的每个元内。

证明 因为拟子网是弱子网，存在拟子网即存在弱子网，所以仅以拟子网为例进行证明。

因为 $\mathcal{A}$ 内任意两个元之交包含 $\mathcal{A}$ 的一个元，所以 $\mathcal{A}$ 关于 $\subset$ 为拟定向集，令 $E=\{(\delta,A)\mid\delta\in S,x_\delta\in A\in\mathcal{A}\}$，由定理 1 可知，$E$ 关于 $S\times\mathcal{A}$ 的乘积序为拟定向集。定义映射 $f:E\to S$，其中 $(\delta,A)\to\delta$，即 $f(\delta,A)=\delta$。那么 $\left\{x_{f(\delta,A)}\right\}_{(\delta,A)\in E}$ 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的一个拟子网并且终在 $\mathcal{A}$ 的每个元内。事实上，$\forall\delta\in S$，$\forall A\in\mathcal{A}$，由于 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 常在 A 中，所以存在 $\rho\in S$ 使得 $\rho\succ\delta$，并且 $x_\rho\in A$。所以 $(\rho,A)\in E$ 且 $f(\rho,A)=\rho\succ\delta$，所以 $\left\{x_{f(\delta,A)}\right\}_{(\delta,A)\in E}$ 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的一个拟子网。又因为 $\forall(\tau,B)\in E$，当 $(\tau,B)\succ(\rho,A)$ 时，有 $x_{f(\tau,B)}=x_\tau\in B\subset A$，所以 $\left\{x_{f(\delta,A)}\right\}_{(\delta,A)\in E}$ 终在 $\mathcal{A}$ 的每个元内。

用完全相同的方法，可得如下推论：

推论 1 设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是空间 X 中的一个弱网，$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)(\mathcal{A}\neq\varnothing)$，它使得 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 常在 $\mathcal{A}$ 的每个元内并且还使得 $\mathcal{A}$ 内任意两个元之交包含 $\mathcal{A}$ 的一个元，则 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 有一个弱子网终在 $\mathcal{A}$ 的每个元内。

定理 5 设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是空间 X 中的一个拟网，$x_0\in X$，则 x_0 为 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的接触点当且仅当存在 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的拟子网(或者弱子网)收敛于 x_0。

证明 因为拟子网是弱子网，存在拟子网即存在弱子网，所以仅以拟子网为例进行证明。

必要性。设 x_0 为 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的接触点，$\mathcal{U}=\mathcal{U}(x_0)$，则 $\mathcal{U}$ 的任意两个元相交为 $\mathcal{U}$ 的一个元并且网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 常在 x_0 的每一个领域内，由定理 4 可知 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 有一个拟子网终在 $\mathcal{U}$ 的每个元内，则该拟子网收敛于 x_0。

充分性。设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 有拟子网 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 收敛于 x_0，则 $\forall U\in\mathcal{U}(x_0)$，$\exists\alpha_U\in\Delta$，当 $\alpha\succ\alpha_U$ 时，有 $y_\alpha\in U$。对于 $\forall\delta\in S$，由 (SN_2) 可知 $\exists\alpha^*\in\Delta$，使得 $\delta\prec J(\alpha^*)$，再由定向性，$\exists\alpha_0\in\Delta$，使得 $\alpha_0\succ\alpha_U$ 且 $\alpha_0\succ\alpha^*$，则存在 $\delta_0=J(\alpha_0)\succ J(\alpha^*)\succ\delta$，并且 $x_{\delta_0}=x_{J(\alpha_0)}=y_{\alpha_0}\in U$。所以 x_0 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的一个接触点。

同理可得如下推论：

推论 2 设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是空间$X$中的一个弱网，$x_0\in X$，则$x_0$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点当且仅当存在$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的弱子网收敛于$x_0$。

定理 6 设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是空间$X$中的一个弱网(或者拟网)。$\forall\delta\in S$，令$A_\delta=\{x_\alpha\,|\,\alpha\in S,\alpha\succ\delta\}$，则$x_0$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点当且仅当$\forall\delta\in S$，$x_0\in\overline{A}_\delta$。

证明 仅以弱网为例进行证明，拟网情形同理可证。

必要性。设x_0为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点，则$\forall\delta\in S$，$\forall U\in\mathcal{U}(x_0)$，$\exists\delta_0\in S$使得$\delta_0\succ\delta$，并且$x_{\delta_0}\in U$；由$A_\delta$的定义，$x_{\delta_0}\in A_\delta\cap U\neq\varnothing$，由定理 2 可知，$x_0\in\overline{A}_\delta$。

充分性。反证。若x_0不是$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点，则存在$U\in\mathcal{U}(x_0)$使得$x_0$不常在$U$内，那么$\forall\alpha\in S$，$\exists\delta\in S$，当$\alpha\succ\delta$时，有$x_\alpha\notin U$；由$A_\delta$的定义，$x_\alpha\in A_\delta$，即$A_\delta\cap U=\varnothing$，则$x_0\notin\overline{A}_\delta$；这与$x_0\in\overline{A}_\delta$矛盾，所以$x_0$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点。

定理 7 设X为拓扑空间，X为紧空间当且仅当X中的任意拟网都有收敛的拟子网(或者弱子网)。

证明 必要性。设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是空间$X$中的一个拟网。$\forall\delta\in S$，令$A_\delta=\{x_\alpha\,|\,\alpha\in S,\alpha\succ\delta\}$，则$\{\overline{A}_\delta\}_{\delta\in S}$是$X$上具有有限交性质的非空闭集族。

事实上，对于S中的任意有限子集$\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$。由$S$的定向性，$\exists\alpha\in S$，使得$\alpha\succ\delta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$。因此$x_\alpha\in\bigcap_{i=1}^n A_{\delta_i}\subset\bigcap_{i=1}^n\overline{A}_{\delta_i}$，所以$\{\overline{A}_\delta\}_{\delta\in S}$具有有限交性质。由$X$的紧性，$\bigcap_{i=1}^n\overline{A}_{\delta_i}\neq\varnothing$，取$x_0\in\bigcap_{i=1}^n\overline{A}_{\delta_i}$，即$\forall\delta_i\in S$，$x_0\in\overline{A}_\delta$；由定理 6 可知，$x_0$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点；再由定理 5 可知，$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的拟子网(或者弱子网)收敛于$x_0$。

充分性。设$\mathcal{F}$是X的具有有限交性质的一个闭集族。为证$\mathcal{F}$有非空交，我们构造X上的一个网如下：令$S=\{\delta\subset\mathcal{F}\,|\,\delta\text{为非空有限集}\}$，则$(S,\subset)$是一个拟定向集。$\forall\delta\in S$，由于$\mathcal{F}$的有限交性质，则$\bigcap\delta\neq\varnothing$。取$x_\delta\in\bigcap\delta$，则$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$为$X$中的一个拟网。那么$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$有收敛的拟子网，假设收敛于$x_0$，则$x_0$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的接触点。现证$x_0\in\bigcap\mathcal{F}$。

事实上，$\forall F\in\mathcal{F}$，有$x_F=x_{\{F\}}\in F$。由接触点的定义，$\forall U\in\mathcal{U}(x_0)$，$\exists\delta\in S$，使得$\delta\supset\{F\}$，有$x_\delta\in U$。因为$x_\delta\in\bigcap\delta\subset F$，故$U\cap F\neq\varnothing$。则$x_0\in\overline{F}=F$。因此$x_0\in\bigcap\mathcal{F}$，所以$\mathcal{F}$有非空交，$X$为紧空间。

3. 严格拟网与严格弱网

定义 7 称不满足反称性的拟定向集为严格拟定向集；称不满足自反性的弱定向集为严格弱定向集。

定义 8 称$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是一个严格拟网，若$(S,\prec)$是严格拟定向集；称$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是一个严格弱网，若$(S,\prec)$是严格弱定向集。

根据上述定义，我们得到了如下一系列结果：

定理 8 拓扑空间中任一网都存在一个严格拟子网。

证明 设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是一个网，构造集合$\Delta=\{(\delta,\alpha)\,|\,\delta\in S,\alpha\in S\}$，在$\Delta$中定义偏序关系“$\prec$”：$\forall(\delta_1,\alpha_1),(\delta_2,\alpha_2)\in\Delta$，定义$(\delta_1,\alpha_1)\prec(\delta_2,\alpha_2)$当且仅当$\delta_1\prec\delta_2$，则$(\Delta,\prec)$为一个严格拟定向集，$\{x_{(\delta,\alpha)}\}_{(\delta,\alpha)\in\Delta}$为严格拟网。

设$J:\Delta\to S$，其中$J((\delta,\alpha))=\delta$；$\forall(\delta_1,\alpha_1),(\delta_2,\alpha_2)\in\Delta$，若$(\delta_1,\alpha_1)\prec(\delta_2,\alpha_2)$，则$J((\delta_1,\alpha_1))=\delta_1\prec\delta_2=J((\delta_2,\alpha_2))$，故$(SN_1)$真。又因为$\forall\delta\in S$，$\exists(\delta,\alpha)\in\Delta$，使得$J((\delta,\alpha))=\delta\succ\delta$，故$(SN_2)$真。所以$\{x_{(\delta,\alpha)}\}_{(\delta,\alpha)\in\Delta}$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的拟子网。

定理 9 严格拟网不存在子网。

证明 反证。设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$为一严格拟网，$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的一个子网；则$\forall\alpha_1,\alpha_2\in\Delta$，$\exists\delta_1,\delta_2\in S$使得$\delta_1=J(\alpha_1)$，$\delta_2=J(\alpha_2)$；由反称性，当$\alpha_1\prec\alpha_2$，$\alpha_2\prec\alpha_1$，有$\alpha_2=\alpha_1$，此时有$\delta_1=J(\alpha_1)\prec J(\alpha_2)=\delta_2$，$\delta_2=J(\alpha_2)\prec J(\alpha_1)=\delta_1$，$\delta_1=J(\alpha_1)=J(\alpha_2)=\delta_2$；这与$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是严格拟网矛盾，所以严格拟网不存在子网。

定理 10 严格弱网不存在子网和拟子网。

证明 因为子网就是拟子网，不存在拟子网即不存在子网，所以仅以拟子网为例进行证明。

反证。设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$为一严格弱网，$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$为$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$的一个拟子网；则$\forall\alpha\in\Delta,\ \exists\delta\in S$，使得$\delta=J(\alpha)$；由$(SN_1)$可知，当$\alpha\prec\alpha$时，有$\delta=J(\alpha)\prec J(\alpha)=\delta$；这与$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是严格弱网矛盾，所以严格弱网不存在拟子网。

4. 结束语

在引入了弱子网与拟子网的基础上，继续对弱网与拟网的收敛性进行研究，得到了几个有关子网收敛的等价条件。在此基础上赋予拟网与弱网更为严格的定义，引出严格拟网与严格弱网的概念，并得到了严格型网与其子网的几个存在刻画。

基金项目

国家自然科学青年基金(11501391)。

参考文献

[1] 丁玄伊，朱培勇．弱网与拟网及其收敛性探究[J]．绵阳师范学院学报, 2020, 39(8): 89-93.
[2] 朱培勇，雷银彬．拓扑学导论[M]．北京：科学出版社, 2009: 33-43.
[3] 马春晖，陈东立，史艳维．拓扑空间中集网收敛性的非标准刻画[J]．纯粹数学与应用数学, 2008(4): 40-42.
[4] 陈东立，马春晖，王平安．网收敛的非标准特征及其应用[J]．西安建筑科技大学学报(自然科学版)，2003，35(3): 289-291.
[5] 袁黎明，彭瑞华．用 Moore-Smith 子网构造法建立空间拓扑与其收敛类的对应关系[J]．武汉电力职业技术学院学报, 2005(1): 19-22.
[6] 黄启德．十六种新超拓扑空间及其收敛性[J]．重庆师范学院学报(自然科学版), 1985: 6-13.
[7] 王国俊．评《点集拓扑学基础》[J]．数学研究与评论, 1984, 4(2): 153-156.
[8] 傅沛仁，方嘉琳．关于几乎一致收敛拓扑[J]．黑龙江大学学报(自然科学版), 1979(1): 26-35.
[9] 梁成瑜，严从华．直觉 I-fuzzy 拓扑空间中的网收敛[C]//中国系统工程学会．模糊数学与模糊系统年会. 2010.
[10] 吴杰，朱培勇，吴新星．拓扑空间上映射的上极限与下极限[J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(7): 24-28.
[11] 李庆国．模糊拓扑空间的最小 Hausdorff 拓扑[J]．模糊系统与数学, 1998, 12(2): 1-5.
[12] 程吉树. L-Fuzzy 集网的 R-收敛性质[J]．模糊系统与数学, 1995, 9(1): 88-92.
[13] 张连文，汪培庄．超空间收敛的下层描述[J]．工程数学学报, 1988(2): 40-43.
[14] 李洪兴，阎建平．格化拓扑的子空间与网紧性[J]．太原科技大学学报, 1985(S1): 105-108.
[15] 习兴国，兰贞才，王葆光，等．网的收敛与分离公理[J]．河北师范大学学报, 1994(3): 89-91.