Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 938-943
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010109

一维Sobolev方程的重心插值配点法

武莉莉，卢梦双

长安大学理学院，陕西 西安
Email: 879083215@qq.com

收稿日期：2020年9月28日；录用日期：2020年10月13日；发布日期：2020年10月20日

摘 要

本文使用重心Lagrange插值配点法求解一维Sobolev方程的数值解，分别采用等距节点和Chebyshev节点进行数值计算。实验结果表明：在使用重心Lagrange插值求解一维Sobolev方程的数值解时，采用第二类Chebyshev节点可取得更高精度的数值解。

关键词

Sobolev方程，重心插值配点法，等距节点，Chebyshev节点

Barycentric Interpolation Collocation Method for One-Dimensional Sobolev Equation

Lili Wu, Mengshuang Lu

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: 879083215@qq.com

Received: Sep. 28th, 2020; accepted: Oct. 13th, 2020; published: Oct. 20th, 2020

Abstract

This paper uses the center of gravity Lagrange interpolation method to solve the numerical solution of the one-dimensional Sobolev equation. Equidistant nodes and Chebyshev nodes are used for numerical calculation. The experimental results show that: when using the center of gravity Lagrange interpolation to solve the numerical solution of the one-dimensional Sobolev equation, using the second type of Chebyshev node can obtain a higher precision numerical solution.

文章引用: 武莉莉, 卢梦双. 一维 Sobolev 方程的重心插值配点法[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 938-943.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010109

Keywords

Sobolev Equation, Barycentric Interpolation Collocation Method, Equidistant Node, Chebyshev Node

1. 引言

本文讨论如下 Sobolev 方程的数值解：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), (x,t) \in (0,1) \times (0,1] \\ u(x,0) = 0, x \in (0,1) \\ u(1,t) = u(0,t) = 0, t \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

其中 ε 和 γ 为两个正常数， $f(x,t)$， $\varphi(x,t)$ 和 $u_0(x)$ 为三个已知函数。

Sobolev 方程在许多实际工程领域中都有着广泛的应用[1] [2] [3]。近几十年来，Sobolev 方程一直受到密切的关注，目前已经有许多关于 Sobolev 方程的数值研究[4] [5] [6] [7]。 1990 年，Yanping Lin 研究了二维齐次 Dirichlet 边界条件下非线性 Sobolev 方程解的 Galerkin 逼近，得到了连续 Crank-Nicolson 和外推 Crank-Nicolson 逼近的误差估计[4]。郭会和芮洪兴于 2006 年提出将最小二乘 Galerkin 有限元法应用于 Sobolev 方程，并通过误差估计表明该方法在 L2 范数意义下具有最优收敛阶[5]。2013 年，李宏和周文文从时间二阶精度的 Crank-Nicolson 时间半离散格式出发，构造出了 Crank-Nicolson 全离散化的有限元格式，并导出了误差估计[6]。2017 年，经鑫在文献[7]中建立了 Sobolev 方程的一个两层隐格式，证明了 Sobolev 方程在该格式下解的存在唯一性，并通过数值实验进行验证。以上介绍的这些方法均为有限差分法和有限元素法。但在实际求解过程中，这些方法不易实现，数值模拟也比较困难，尤其在使用有限元求解偏微分方程时，很难构造出满足特定条件的有限元格式。而且当方程维数为二维甚至三维的时候，数值模拟实验也比较复杂。本文我们所要求解的 Sobolev 方程是与时间 t 有关的一类方程，使用差分法和有限元法更会增加求解的难度。

W. J. Taylor 于 1945 年发现了计算插值多项式的重心公式[8]。2004 年，J. P. Berrut 和 L. N. Trefethen 等人将 Lagrange 公式改为重心公式的形式，得到了重心 Lagrange 插值公式[9]。2007 年，Michael S. Floater 和 Kai Hormann 提出了重心有理插值[10]，该方法操作简单，已经应用于许多偏微分方程的求解，都得到了精度较高的数值解[11] [12] [13] [14]。重心插值配点法在求解二维或者三维偏微分方程的数值解时，数值模拟难度也不是很大。因此，本文将分别采用重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法求解一维 Sobolev 方程，并对这两种插值法所得数值结果进行比较与分析。

2. 重心 Lagrange 插值与重心有理插值

给定 $n+1$ 个不同插值节点 $x_i\,(i=0,\cdots,n)$ 及其相应的一组实数 f_i，那么 Lagrange 插值多项式公式可写为

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i \tag{2}$$

其中

$$l_i(x)=\frac{\prod_{k=0,k\neq i}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=0,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)} \tag{3}$$

定义重心插值权：

$$\omega_i=\frac{1}{\prod_{i\neq k}(x_i-x_k)}, i=0,1,\cdots,n \tag{4}$$

则可将(2)式重写为

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}\xi_j(x)f_j, j=0,1,2,\cdots,n \tag{5}$$

其中

$$\xi_j(x)=\frac{\frac{\omega_j}{x-x_j}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega_j}{x-x_j}} \tag{6}$$

公式(5)即为重心 Lagrange 插值公式。

重心有理插值是用有理函数进行插值。我们需要考虑，对于给定的节点分布及其相应的函数值，是否存在满足插值条件的有理函数。将式(5)重新定义为：

$$\omega_k=\sum_{i\in J_k}(-1)^i\prod_{j=i,j\neq k}^{i+d}\frac{1}{x_k-x_j}, k=0,1,2,\cdots,n \tag{7}$$

此处 d 为一给定的正整数，且 $0\le d\le n$。$I=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$J_k=\{i\in I:k-d\le i\le k\}$。

从而得到重心有理插值公式：

$$r(x)=\frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega_j}{x-x_j}f_j}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega_j}{x-x_j}} \tag{8}$$

在使用重心有理插值法求解偏微分方程时，参数 d 的选取非常重要，它会直接影响计算精度。

3. 一维 Sobolev 方程的计算

对方程(1)，采用第二类 Chebyshev 节点，将空间方向和时间方向分别离散为 m，n 个插值节点 $a=x_1<\cdots<x_m=b$，$0=t_1<\cdots<t_n=T$，共有 $m\times n$ 个张量型插值节点 $u(x_i,t_j)$，其中 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$。则

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_i(x)T_j(t)u_{ij} \tag{9}$$

其中 $u(x_i,t_j)=u_{ij}$。$L_i(x),T_j(t)$ 分别为 x 方向和 t 方向的插值基函数。

将上式代入 Sobolev 方程(1)得到

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(L_i\left(x\right)T_j'\left(t\right)-\varepsilon L_i''\left(x\right)T_j'\left(t\right)-\gamma L_i''\left(x\right)T_j\left(t\right)\right)u_{ij}=f\left(x,t\right) \tag{10}$$

记 $f\left(x_i,t_j\right)=f_{ij}$， $L_j\left(x_i\right)=\delta_{ij},T_k\left(t_j\right)=\delta_{jk}$，用 $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积，则可将(10)式写为

$$\left(I_m\otimes T^{(1)}-\varepsilon\left(L^{(2)}\otimes T^{(1)}\right)-\gamma\left(I_m\otimes T^{(1)}\right)\right)U=F \tag{11}$$

其中 $L^{(r)}$ 为插值节点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的 r 阶微分矩阵， $T^{(r)}$ 为插值节点 $t_1,t_2,\cdots,t_l$ 的 r 阶微分矩阵。且式(11)中的 U 和 F 分别为如下形式

$$U=\left[u_{11},u_{12},\cdots,u_{1n},u_{21},u_{22},\cdots,u_{2n},\cdots,u_{m1},u_{m2},\cdots,u_{mn}\right]$$

$$F=\left[f_{11},f_{12},\cdots,f_{1n},f_{21},f_{22},\cdots,f_{2n},\cdots,f_{m1},f_{m2},\cdots,f_{mn}\right]$$

令 $L=I_m\otimes T^{(1)}-\varepsilon\left(L^{(2)}\otimes T^{(1)}\right)-\gamma\left(I_m\otimes T^{(1)}\right)$，则方程(21)可以写为

$$LU=F \tag{12}$$

4. 数值算例

算例 4.1 方程(1)的精确解为

$$u\left(x,t\right)=\left(0.5x^2-0.5x\right)t$$

下面分别用这两种插值法求解方程(1)的数值解，节点类型选取第二类 Chebyshev 节点和等距节点，将 x,t 离散化， $0=x_1<\cdots<x_m=1$， $0=t_1<\cdots<t_n=1$，其中 m，n 为剖分节点数。通过数值模拟，所得绝对误差如表 1 和表 2 所示。

Table 1. Absolute error of Lagrange interpolation
表 1. 重心 Lagrange 插值的绝对误差

$m\times n$	Chebyshev 节点	等距节点
7 × 7	2.2814×10^{-15}	1.5813×10^{-15}
9 × 9	9.2082×10^{-15}	4.7452×10^{-15}
11 × 11	1.3126×10^{-14}	2.4736×10^{-13}
13 × 13	3.6560×10^{-14}	4.7531×10^{-12}
15 × 15	6.6838×10^{-14}	1.0601×10^{-10}
17 × 17	7.0478×10^{-14}	4.7634×10^{-9}
19 × 19	9.8388×10^{-14}	3.3461×10^{-7}
21 × 21	2.1366×10^{-13}	5.8004×10^{-7}

由表 1 的结果可以看出，在计算一维 Sobolev 方程的数值解时，当所选节点数目较小时，采用等距节点逼近效果较好，但随着节点数目增加，会出现“龙格现象”。整体来看，采用第二类 Chebyshev 节点所得数值解逼近效果更好。因此，在使用重心 Lagrange 插值配点法求解偏微分方程数值解时，为了取得较高精度的数值解，通常会选取第二类 Chebyshev 节点进行数值计算。

由表 1 结果可知，选取等距节点产生的结果并不理想。并且通过参考大量文献，可以发现选取等距节点所得实验结果往往都是病态的，所以在使用重心有理插值求解 Sobolev 方程时，我们将只选取第二类 Chebyshev 节点，其所得结果见表 2。由于参数 d 的选择对结果的精度影响很大，所以需谨慎选择参数 d。此处我们令 d = 5。

Table 2. Absolute error of rational interpolation
表 2. 重心有理插值的绝对误差

$m \times n$	Chebyshev 节点
7×7	8.4926×10^{-16}
9×9	3.9883×10^{-15}
11×11	8.0178×10^{-15}
13×13	1.1072×10^{-14}
15×15	4.9401×10^{-14}
17×17	5.4267×10^{-14}
19×19	1.1817×10^{-13}
21×21	2.4902×10^{-13}

表 2 结果表明，在求解 Sobolev 方程时，重心有理插值也有很好的逼近效果。将表 2 结果与表 1 的第二列比较，可以发现，这两种插值方法在选取第二类 Chebyshev 节点时都可产生较高精度的结果，且重心有理插值产生的数值解精度要略高一些。由表 1 和表 2 结果还可以发现，不仅节点类型对数值结果有影响，节点数目的大小对计算结果也有较大的影响。随着节点数目的增大，数值精度反而在逐渐下降，最终趋于稳定。由表 1 第三列可以看出，节点数目的大小对结果的影响非常大，从整体来看，选取等距节点产生的结果是很不稳定的。因此，具体的方程数值解求解过程中，一般不选取等距节点。

5. 结论

采用这两种插值方法求解一维 Sobolev 方程时，为了获得逼近效果好的数值解，通常建议选取第二类 Chebyshev 节点。本文中有理插值所产生的数值结果精度略高，但并不能因此说明重心有理插值一定能够获得比重心 Lagrange 插值精度高的数值解。可将这两种插值法推广到二维和三维 Sobolev 方程，甚至其他偏微分和常微分方程的数值求解，并分析比较这两种方法各自的优势。

参考文献

[1] Paul, L.D. (1972) A Quasilinear Parabolic and a Related Third Order Problem. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **40**, 327-335. https://doi.org/10.1016/0022-247X(72)90054-6

[2] Ewing, R.E. (1977) A Coupled Non-Linear Hyperbolic-Sobolev System. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **114**, 331-349. https://doi.org/10.1007/BF02413794

[3] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6

[4] Lin, Y. (1990) Galerkin Methods for Nonlinear Sobolev Equations. *Aequationes Mathematicae*, **40**, 54-66. https://doi.org/10.1007/BF02112280

[5] 郭会，芮洪兴. Sobolev 方程的最小二乘 Galerkin 有限元法[J]. 应用数学学报, 2006(4): 609-618.

[6] 李宏，周文文，方志朝. Sobolev 方程的 CN 全离散化有限元格式[J]. 计算数学, 2013(1): 40-48.

[7] 经鑫. 粘弹性方程和 Sobolev 方程的一些数值研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2017.

[8] Taylor, W.J. (1945) Method of Lagrange Curvilinear Interpolation. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **35**, 151-155. https://doi.org/10.6028/jres.035.006

[9] Trefethen, L.N. (2004) Barycentric Lagrange Interpolation. *SIAM Review*, **46**, 501-517. https://doi.org/10.1137/S0036144502417715

[10] Floater, M.S. and Hormann, K. (2007) Barycentric Rational Interpolation with No Poles and High Rates of Approximation. *Numerische Mathematik*, **107**, 315-331. https://doi.org/10.1007/s00211-007-0093-y

[11] Liu, F., Wang, Y. and Li, S. (2018) Barycentric Interpolation Collocation Method for Solving the Coupled Viscous Burgers' Equations. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**, 2162-2173. https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1384546

[12] 梁军. 求解二维 Poisson 方程的重心插值配点法[J]. 数学的实践与认识, 2016(17): 229-235.

[13] 吴君, 张学莹. 求解二维 Poisson 方程的重心有理插值配点法[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(17): 238-245.

[14] 翁智峰, 姚泽丰, 赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(1): 133-140.