

可变序结构下最优元的标量化

杨 爽

重庆理工大学, 重庆

Email: yangshuang391517@163.com

收稿日期: 2020年10月16日; 录用日期: 2020年11月5日; 发布日期: 2020年11月12日

摘 要

在多目标优化问题中, 将多目标问题转化为单目标问题被称为标量化。许多学者提出了不同形式的标量化函数, 并进行了深入研究。然而, 线性标量化需要凸性或广义凸性等较强的条件。因此, 本文依据可变序结构下最优元不同概念, 利用一个非线性标量化函数得到了其推广函数 $\varphi_{a,r}(y)$ 、 $\phi_{a,r}(y)$ 及其性质。最后, 利用这些函数将向量优化问题转化为数值优化问题, 并给出了向量优化问题解的刻画。

关键词

可变序结构, 极大非控元, 极大元, 标量化

Scalarization of Optimal Element under Variable Ordering Structure

Shuang Yang

Chongqing University of Technology, Chongqing

Email: yangshuang391517@163.com

Received: Oct. 16th, 2020; accepted: Nov. 5th, 2020; published: Nov. 12th, 2020

Abstract

In multi-objective optimization problems, it is called scalarization to transform multi-objective problems into single objective problems. Many scholars have proposed different types of scalarization function and studied them. However, linear scalarization needs strong conditions such as convexity or generalized convexity. Therefore, in this paper, according to the different concepts of the optimal element under the variable order structure, we obtain generalization function $\varphi_{a,r}(y)$, $\phi_{a,r}(y)$ and its properties by using a nonlinear scalarization function. Finally, the vector optimization problem is transformed into a numerical optimization problem by using these functions, and the characterizations of the solutions of the vector optimization problem are given.

Keywords

Variable Ordering Structure, Maximum Nondominated Element, Maximum Element, Scalarization

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

标量化是求解多目标优化问题的一种重要和有效的方法, 多目标优化问题解的性质可以通过标量化问题来讨论[1] [2]。作为对固定偏序结构的推广, 可变序结构下的多目标优化模型可以应用于投资组合优化、放射治疗的强度调整、医学图像的配准等对时间、位置变化特别敏感的一大类问题中[3] [4] [5]。按照使用函数的不同, 标量化可以分为线性标量化和非线性标量化。线性标量化虽然简单易行, 但需要目标函数和可行集合有一定的凸性或广义凸性条件, 而实际上大多数为非凸情形, 所以非线性标量化方法受到许多学者的重视。文献[6]就提出了可变序结构下的多目标优化问题, 让决策集中的每一个元素都对应着一个控制锥, 于是偏序结构就由一个集值映射所给出。文献[7]做出了进一步的概括工作。文献[8]提出了可变序结构下的向量变分不等式模型, 并且还建立了研究该问题的非线性方法。但由于缺乏适当的数学工具, 导致可变序结构下的多目标优化问题研究进展较为缓慢, 这使得对可变序结构基础理论的研究显得尤为重要。在文献[9]中利用线性函数对可变序结构下的两种最优元进行了标量化处理。文献[10]利用了推广的 G 函数对最优元进行标量化。文献[11]通过引入增广对偶锥构造了新的非线性函数, 从而对最优元进行标量化处理。文献[12]则是利用半范数对可变序结构下的两种最优元进行了标量化刻画。而文献[13]在具有可变序结构的一般拓扑向量空间中定义了一个新的非线性标量化函数, 并且讨论了该函数的主要性质。作为应用, 通过该函数构造出了一族半范数和一类赋范线性空间, 之后还建立了该非线性标量化函数和有关半范数的上、下半连续性结论。本文的主要工作内容包括利用文献[13]所定义的非线性标量化函数, 在适当的条件下推广后对可变序结构下向量优化问题的解进行标量化刻画。

2. 最优元概念

设 Y 是一个实线性空间, $K \subseteq Y$ 是非平凡的点闭凸锥。设 $x, y \in Y$, 若 $y - x \in K$, 则称 $x \leq_K y$ 。在变序结构的多目标优化问题中, 用变动的凸锥来代替固定的凸锥, 从而给出序关系的定义。

定义 2.1 设 Y 是实线性空间, 变序结构由一个集值映射 $D: Y \rightrightarrows Y$ 给出, 其中 $y \in Y$, $D(y)$ 是非平凡的点闭凸锥。定义下面两种序关系:

$$y \geq_1 \bar{y} \Leftrightarrow y \in \bar{y} + D(y) \Leftrightarrow \bar{y} \in y - D(y)$$

和

$$y \geq_2 \bar{y} \Leftrightarrow y \in \bar{y} + D(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{y} \in y - D(\bar{y}),$$

其中, $\bar{y} \in Y$ 。

从现在开始, 我们假设 $\emptyset \neq A \subseteq Y$ 。下面, 我们回顾一些可变序结构下最优元的定义。

定义 2.2 [14] $\bar{y} \in A$ 称为 A 关于 D 的极大非控元, 当且仅当不存在 $y \in A \setminus \{\bar{y}\}$, 使得

$$\bar{y} \in y - D(y) \setminus \{0_Y\}.$$

定义 2.3 [14] 设对任意 $y \in A$, $cor(D(y)) \neq \emptyset$ 。 $\bar{y} \in A$ 称为 A 关于 D 的弱极大非控元, 当且仅当不

存在 $y \in A \setminus \{\bar{y}\}$, 使得

$$\bar{y} \in y - \text{cor}(D(y)).$$

定义 2.4 [14] $\bar{y} \in A$ 称为 A 关于 D 的极大元, 当且仅当

$$(\bar{y} + D(\bar{y})) \cap A = \{\bar{y}\}.$$

定义 2.5 [14] 设 $\bar{y} \in A$, $\text{cor}(D(\bar{y})) \neq \emptyset$. $\bar{y} \in A$ 称为 A 关于 D 的弱极大元, 当且仅当

$$(\bar{y} + \text{cor}(D(\bar{y}))) \cap A = \emptyset.$$

注 2.1 一般情况下, (弱、极大)非控元与(弱、极大)元并没有必然的联系, 具体例子和基本性质见文献 [9].

若给予序映射 D 较强的假设条件, 则极大非控元与极大元之间有一定的联系。

命题 2.1 设 $\bar{y} \in A$, $D(y) \subseteq D(\bar{y})$, $\forall y \in A$. 如果 \bar{y} 是 A 关于 D 的极大元, 则 \bar{y} 是 A 关于 D 的极大非控元。

证明假设 \bar{y} 不是 A 关于 D 的极大非控元, 由定义 2.2, 存在 $y_1 (\neq \bar{y}) \in A$, 使得 $\bar{y} \in y_1 - D(y_1)$, 即 $y_1 - \bar{y} \subseteq D(y_1) \subseteq D(\bar{y})$. 因此, $y_1 \in \bar{y} + D(\bar{y})$, 这与定义 2.4 矛盾。于是, \bar{y} 是 A 关于 D 的极大非控元。

命题 2.2 设 $\bar{y} \in A$, $D(\bar{y}) \subseteq D(y)$, $\forall y \in A$. 如果 \bar{y} 是 A 关于 D 的极大非控元, 则 \bar{y} 是 A 关于 D 的极大元。

证明假设 \bar{y} 不是 A 关于 D 的极大元, 由定义 2.4, 存在 $y_1 (\neq \bar{y}) \in A$, 使得 $y_1 \in \bar{y} + D(\bar{y})$, 即 $y_1 - \bar{y} \subseteq D(\bar{y}) \subseteq D(y_1)$. 因此, $\bar{y} \in y_1 - D(y_1)$, 这与定义 2.2 矛盾。于是, \bar{y} 是 A 关于 D 的极大元。

3. 标量化

标量化是向量优化问题的一个重要手段, 对于可变序结构下的向量优化问题, 同样可以使用标量化的方法, 将问题转化为数值优化的类型, 从而可达到降低寻找最优元难度的目的。本部分对可变序结构下的向量优化问题进行标量化处理。

在固定偏序结构下, 有效元的非线性标量化还可以利用距离函数或著名的 G 函数来完成。下面是通过另一种非线性函数对最优元进行刻画。

设 Y 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间, K 是 Y 中的一个真闭凸锥, R 是实数域。

定义 3.1 $\varphi_{a,r}(y) = \sup\{t \in R \mid y - a - tr \in K\}$, $a, y, r \in Y$ 。

由定义 3.1, 我们容易获得下面的性质。

性质 3.1 $\varphi_{a,r}(y) < \lambda \Leftrightarrow y - a - \lambda r \notin K$, $\varphi_{a,r}(y) < \lambda \Leftrightarrow y - a - \lambda \notin K$ 。

性质 3.2 $\varphi_{0,r}(\lambda y) = \lambda \varphi_{0,r}(y)$, $\forall \lambda \geq 0$, $r \in K \setminus \{0\}$, $y \in Y$ 。

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 显然成立。

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r}(\lambda y) &= \sup\{t \in R \mid \lambda y - tr \in K\} \\ &= \sup\left\{t \in R \mid \lambda \left(y - \frac{t}{\lambda} r\right) \in K\right\} \\ \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时,} &= \lambda \sup\left\{\frac{t}{\lambda} \in R \mid y - \frac{t}{\lambda} r \in K\right\} \\ &= \lambda \sup\{t_1 \in R \mid y - t_1 r \in K\} \quad \left(\text{其中 } t_1 = \frac{t}{\lambda}\right) \\ &= \lambda \varphi_{0,r}(y) \end{aligned}$$

性质 3.3 设 $y, z \in Y$, $y \geq_K z$, 则 $\varphi_{a,r}(y) \geq \varphi_{a,r}(z)$, $\forall a, r \in Y$ 。

证明 设 t 满足 $z - a - tr \in K$ 。根据 K 为凸锥再结合已知条件有

$$y - a - tr = (y - z) + (z - a - tr) \in K.$$

所以, $\varphi_{a,r}(y) = \sup\{t \in R \mid y - a - tr \in K\} \geq \sup\{t \in R \mid z - a - tr \in K\} = \varphi_{a,r}(z)$ 。

性质 3.4 $\varphi_{a,r}(y + \lambda r) = \varphi_{a,r}(y) + \lambda$, $\forall a, r, y \in Y$, $\lambda \in R$ 。

$$\begin{aligned} \varphi_{a,r}(y + \lambda r) &= \sup\{t \in R \mid y + \lambda r - a - tr \in K\} \\ &= \sup\{t \in R \mid y - a - (t - \lambda)r \in K\} \end{aligned}$$

证明 $= \sup\{t_1 + \lambda \in R \mid y - a - t_1 r \in K\}$ (其中 $t_1 = t - \lambda$)
 $= \sup\{t_1 \in R \mid y - a - t_1 r \in K\} + \lambda$
 $= \varphi_{a,r}(y) + \lambda$

对定义 3.1 考虑可变速序结构, 给出如下的定义:

定义 3.2 $\phi_{a,r}(y) = \sup\{t \in R \mid y - a - tr \in D(y)\}$, $a, y, r \in Y$ 。

性质 3.5 $\phi_{a,r}(y) < \lambda \Leftrightarrow y - a - \lambda r \notin D(y)$, $\phi_{a,r}(y) \geq \lambda \Leftrightarrow y - a - \lambda r \in D(y)$ 。

证明 根据定义和上确界的定义可知。

以上讨论了新定义函数的主要性质, 接下来是利用这些函数及性质对最优元进行刻画所得到的主要结果。

定理 3.1 设 $r \in (\bigcap_{y \in A} D(y)) \setminus \{0\}$, 则 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的极大非控元当且仅当

$$\phi_{\bar{y},r}(y) < \phi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0, \quad \forall y \in A \setminus \{\bar{y}\} \tag{1}$$

证明 必要性假设 \bar{y} 是 A 关于 D 的极大非控元。因为 $D(\bar{y})$ 是点凸锥, $r \in D(\bar{y}) \setminus \{0\}$, 这样可得 $\phi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0$ 。若 \bar{y} 不是 $\phi_{\bar{y},r}(y)$ 唯一的最大值点, 则存在 $t \in R, t \geq 0, y \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 使得 $y - \bar{y} - tr \in D(y)$ 。由于 $tr \in D(y)$, 则 $y - \bar{y} \in tr + D(y) \subseteq D(y) + D(y) \subseteq D(y)$, 整理得 $\bar{y} \in y - D(y)$, 这与定义 2.2 矛盾。

充分性假设 \bar{y} 是 $\phi_{\bar{y},r}$ 在 A 上的唯一极大值点。若存在 $y \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 使得 $\bar{y} \in y - D(y)$, 则 $y - \bar{y} - 0 \cdot r \in D(y)$, 即 $\phi_{\bar{y},r}(y) \geq 0$, 与(1)矛盾。

定理 3.2 设 $r \in \text{cor}(\bigcap_{y \in A} D(y))$, 则 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的弱极大非控元当且仅当

$$\phi_{\bar{y},r}(y) \leq \phi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0, \quad \forall y \in A \tag{2}$$

证明 必要性假设 \bar{y} 是 A 关于 D 的弱极大非控元。若 \bar{y} 不是 $\phi_{\bar{y},r}(y)$ 的最大值点, 则存在 $t \in R, t > 0, y \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 使得 $y - \bar{y} - tr \in D(y)$ 。由于 $tr \in \text{cor}(D(y))$, 则 $y - \bar{y} \in tr + D(y) \subseteq \text{cor}(D(y)) + D(y) \subseteq \text{cor}(D(y))$, 整理得 $\bar{y} \in y - \text{cor}(D(y))$, 这与定义 2.3 矛盾。

充分性假设 \bar{y} 是 $\phi_{\bar{y},r}$ 在 A 上的极大值点。若存在 $y \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 使得 $\bar{y} \in y - \text{cor}(D(y))$, 则存在 $t > 0$ 使得 $y - \bar{y} - tr \in D(y)$, 因此 $\phi_{\bar{y},r}(y) > 0$, 与(2)矛盾。

定理 3.3 若 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的极大元, 则对任意点凸锥 $K \subseteq D(\bar{y}), r \in K \setminus \{0\}$, 有

$$\varphi_{\bar{y},r}(y) \leq \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0, \quad \forall y \in A \setminus \{\bar{y}\}$$

证明 $\varphi_{\bar{y},r}(\bar{y})=0$ 是显然的。下面利用反证法证明 $\varphi_{\bar{y},r}(y) \leq 0, \forall y \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 。若不然, 存在 $y_1 \in A \setminus \{\bar{y}\}$, 使得 $\varphi_{\bar{y},r}(y_1) > 0$ 。根据定义 3.1 有 $\varphi_{\bar{y},r}(y_1) = \sup\{t \in R \mid y_1 - \bar{y} - tr \in K\} > 0$ 。从而存在 $t \geq 0, y_1 - \bar{y} - tr \in K$ 。由于 $r \in K$, 则 $y_1 - \bar{y} \in tr + K \subseteq K + K \subseteq K \subseteq D(\bar{y})$ 。整理得 $y_1 \in \bar{y} + D(\bar{y}), y_1 \in A \setminus \{\bar{y}\}$ 。这与定义 2.4 矛盾。

定理 3.4 若 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的弱极大元, 则对任意点凸锥 $K \subseteq D(\bar{y}), r \in \text{cor}(K)$, 有

$$\varphi_{\bar{y},r}(y) \leq \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0, \forall y \in A$$

证明 假设存在 $y_1 \in A$, 使得 $\varphi_{\bar{y},r}(y_1) > 0$ 。根据定义 3.1 有 $\varphi_{\bar{y},r}(y_1) = \sup\{t \in R \mid y_1 - \bar{y} - tr \in K\} > 0$ 。从而存在 $t > 0, y_1 - \bar{y} - tr \in K$ 。由于 $r \in \text{cor}(K)$, 则 $y_1 - \bar{y} \in tr + K \subseteq \text{cor}(K) + K \subseteq \text{cor}(K) \subseteq \text{cor}(D(\bar{y}))$ 。整理得 $y_1 \in \bar{y} + \text{cor}(D(\bar{y})), y_1 \in A$ 。这与定义 2.5 矛盾。

定理 3.5 若 $\forall a, r \in Y$, 凸锥 $D(\bar{y}) \subseteq K$, 有

$$\varphi_{a,r}(y) \leq \varphi_{a,r}(\bar{y}) = 0, \forall y \in A$$

则 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的弱极大元。

证明 若 $\bar{y} \in A$ 不是 A 关于 D 的弱极大元。则存在 $y_1 \in A$, 使得 $y_1 \in \bar{y} + \text{cor}(D(\bar{y}))$ 。取 $a = \bar{y}, r \in K$ 。则 $\varphi_{a,r}(\bar{y}) = \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0$, 但 $\varphi_{a,r}(y_1) = \varphi_{\bar{y},r}(y_1) = \sup\{t \in R \mid y_1 - \bar{y} - tr \in K\} \geq 0 = \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = \varphi_{a,r}(\bar{y})$, 与已知条件矛盾。

定理 3.6 若 $\forall a, r \in Y$, 凸锥 $D(\bar{y}) \subseteq K$, 有

$$\varphi_{a,r}(y) < \varphi_{a,r}(\bar{y}) = 0, \forall y \in A \setminus \{\bar{y}\}$$

则 $\bar{y} \in A$ 是 A 关于 D 的极大元。

证明 若 $\bar{y} \in A$ 不是 A 关于 D 的极大元。则存在 $y_1 \in A$, 使得 $y_1 \in \bar{y} + D(\bar{y})$ 。取 $a = \bar{y}, r \in K$ 。则 $\varphi_{a,r}(\bar{y}) = \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = 0$, 但 $\varphi_{a,r}(y_1) = \varphi_{\bar{y},r}(y_1) = \sup\{t \in R \mid y_1 - \bar{y} - tr \in K\} \geq 0 = \varphi_{\bar{y},r}(\bar{y}) = \varphi_{a,r}(\bar{y})$, 与已知条件矛盾。

4. 结论

本文给出了实线性空间中两种序关系的定义形式, 并在此基础上建立了极大非控元和极大元之间的联系。紧接着在 Hausdorff 拓扑向量空间中定义了两个非线性函数, 并对其性质进行了详细分析。最后在合适的假设条件下, 得出了最优元的一些主要结果。本文所建立的结果在诸如投资组合优化、选址问题、医学图像配准等领域中具备一定的应用前景。如何继续深挖所得非线性函数的性质以及将这些性质加以充分利用将是今后进一步研究的课题。

参考文献

- [1] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2006) On Approximate Solutions in Vector Optimization Problems via Scalarization. *Computational Optimization and Applications*, **35**, 305-324. <https://doi.org/10.1007/s10589-006-8718-0>
- [2] Malik, A.S., Boyko, O., Atkar, N. and Young, W.F. (2001) A Comparative Study of MR Imaging Profile of Titanium Pedicle Screws. *Acta Radiologica*, **42**, 291-293. <https://doi.org/10.1080/028418501127346846>
- [3] 戎卫东, 杨新民. 向量优化及其若干进展[J]. 运筹学学报, 2014, 18(1): 9-38.
- [4] Wacker, M. (2008) Multikriterielle Optimierung bei der Registrierung Medizinischer Daten. University of Erlangen-Nürnberg, Erlangen.
- [5] Fischer, B., Haber, E. and Modersitzki, J. (2008) Mathematics Meets Medicine—An Optimal Alignment. *SIAG/OPT Views News*, **19**, 1-7.
- [6] Yu, P.L. (1974) Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **14**, 319-377. <https://doi.org/10.1007/BF00932614>

-
- [7] Bergstresser, K., Charnes, A. and Yu, P.L. (1976) Generalization of Domination Structures and Nondominated Solutions in Multicriteria Decision Making. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **18**, 3-13. <https://doi.org/10.1007/BF00933790>
- [8] Chen, G.Y. and Yang, X.Q. (2002) Characterizations of Variable Domination Structures via Nonlinear Scalarization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **112**, 97-110. <https://doi.org/10.1023/A:1013044529035>
- [9] Eichfelder, G. (2011) Optimal Elements in Vector Optimization with a Variable Ordering Structure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **151**, 217-240. <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9928-x>
- [10] Eichfelder, G. (2014) Numerical Procedures in Multiobjective Optimization with a Variable Ordering Structure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **162**, 489-514. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0267-y>
- [11] Eichfelder, G. and Kasimbeyli, R. (2014) Properly Optimal Elements in Vector Optimization with Variable Ordering Structures. *Journal of Global Optimization*, **60**, 689-712. <https://doi.org/10.1007/s10898-013-0132-4>
- [12] 张颖, 叶仲泉. 变动偏序结构下最优元的标量性刻画[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(5): 6-9.
- [13] 李飞. 可变序结构下向量优化中的一个新非线性标量化函数及其应用[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(3): 329-338.
- [14] Eichfelder, G. (2014) Variable Ordering Structure in Vector Optimization. Springer Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-54283-1>