Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1051-1060
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011125

Hans汉斯

次线性框架下的随机Lotka-Volterra多种群互惠系统

周子烨，郭　睿，闫理坦

东华大学理学院，上海
Email: zzy0615as@163.com

收稿日期：2020年10月19日；录用日期：2020年11月9日；发布日期：2020年11月16日

摘　要

众所周知，Lotka-Volterra系统描述了某个群落中$n\left(n \geq 2\right)$个种群的相互作用关系。本文主要讨论由G-布朗运动驱动的随机Lotka-Volterra多种群互惠系统。在次线性期望框架下，我们证明了系统正解的存在唯一性，另外，通过构造合适的Lyapunov函数，我们得到系统存在平稳分布，且具有遍历性。

关键词

互惠系统，G-布朗运动，次线性期望，遍历性

Stochastic Cooperative Lotka-Volterra Systems under a Sublinear Expectation Framework

Ziye Zhou, Rui Guo, Litan Yan

Department of Science, Donghua University, Shanghai
Email: zzy0615as@163.com

Received: Oct. 19th, 2020; accepted: Nov. 9th, 2020; published: Nov. 16th, 2020

Abstract

As we all know, the Lotka-Volterra system describes the interaction relationship between populations in a community. This paper mainly discusses the stochastic cooperative Lotka-Volterra system driven by G-Brownian motion. Under the framework of sub-linear expectations, we prove the

文章引用: 周子烨, 郭睿, 闫理坦. 次线性框架下的随机 Lotka-Volterra 多种群互惠系统[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1051-1060. DOI: 10.12677/pm.2020.1011125

existence and uniqueness of the positive solution of the system. In addition, by constructing a suitable Lyapunov function, we obtain that the system has a stable distribution and ergodicity.

Keywords

Cooperative System, G-Brownian Motion, Sublinear Expectation, Ergodicity

1. 引言

Lotka-Volterra 系统 $\mathrm{d}x_i = x_i\left(r_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathrm{d}t, i = 1,2,\cdots,n$ 描述的是群落中 $n(n \geq 2)$ 个种群相互之间的作用关系，其中 x_i 表示第 i 个种群的密度， r_i 表示第 i 个种群的内禀增长率， a_{ij} 代表第 j 个种群对第 i 个种群的影响[1]， a_{ij} 和 $a_{ji}\,(i \neq j)$ 的正负性代表第 i 个种群和第 j 个种群的相互关系。本文主要讨论 Lotka-Volterra 多种群互惠系统。

Goh [2]给出了两个种群情况下的互惠系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t) = x_1(t)\left[r_1 - a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)\right]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x_2(t) = x_2(t)\left[r_2 + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)\right]\mathrm{d}t, \end{cases}$$

$r_i > 0$， $a_{ij}(i,j = 1,2) > 0$。若 $r_i > 0, a_{ij} > 0(i,j = 1,2)$ 且 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$，那么

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = x_1^*, \lim_{t\to\infty} x_2(t) = x_2^*,$$

$x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 是系统的唯一正平衡点，

$$x_1^* = \frac{r_1a_{22} + r_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} > 0, x_2^* = \frac{r_2a_{11} + r_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} > 0.$$

下面我们在系统中引入白噪声。设 $r_i \to r_i + \sigma_i\dot{B}_i(t)$， $B_i(t)$ 是初值为 0 的 G-布朗运动，$\sigma_i^2, (i = 1,2,\cdots,n)$ 是白噪声的强度。从而有：

$$\mathrm{d}x_i(t) = x_i(t)\left[\left(r_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathrm{d}t + \alpha_i\mathrm{d}\langle B_i, B_i\rangle_t + \sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\right], i = 1,2,\cdots,n$$

2. 次线性期望和 G-布朗运动

本章我们简要回顾了一些 G-布朗运动的基本结果[3] [4]。设 $\Omega \neq \varnothing$ 是给定的集合，向量格 $\mathcal{H}$ 是定义在 Ω 上的实值函数所组成的一个线性空间，同时有：每一个实值的常数 c 都在 $\mathcal{H}$ 中；如果 $X(\cdot) \in \mathcal{H}$，则也有 $|X(\cdot)| \in \mathcal{H}$。

定义 2.1. 一个次线性期望 $\mathbb{E}$ 是定义在随机变量空间 $\mathcal{H}$ 上的满足以下性质的泛函：对于所有的随机变量 $X,Y \in \mathcal{H}$，有

1) 单调性：若 $X \geq Y, \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$；

2) 保常数性：$\mathbb{E}[c]=c,\forall c\in\mathbb{R}$；

3) 次线性：$\mathbb{E}[X+Y]\le\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$；

4) 正齐次性：$\mathbb{E}[\lambda X]=\lambda\mathbb{E}[X],\forall\lambda\ge 0$。

称三元组$(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$为次线性期望空间。

令Ω表示所有满足$\omega_0=0$的$\mathbb{R}^d$-实值连续轨道$(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$所成的空间，定义其上的距离为：

$$\rho(\omega^1,\omega^2):=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega_t^1-\omega_t^2\right|\right)\wedge 1\right],$$

$\mathcal{B}(\Omega)$表示Ω上的 Borel σ-代数，令$B_t(\omega):=\omega_t$上的典则过程，对每一确定的$T\in[0,\infty)$，令

$$Lip(\Omega_T):=\left\{\varphi\left(B_{t_1\wedge T},\cdots,B_{t_n\wedge T}\right):n\ge 1,t_1,\cdots,t_n\in[0,\infty),\varphi\in C_{b,Lip\left(\mathbb{R}^{d\times n}\right)}\right\}$$

且

$$Lip(\Omega):=\bigcup_{n=1}^{\infty}Lip(\Omega_n),$$

其中$C_{b,Lip\left(\mathbb{R}^{d\times n}\right)}$是$\mathbb{R}^{d\times n}$上所有有界的 Lipschitz 函数的集合，因此，在$(\Omega,Lip(\Omega))$上，我们可以定义典则次线性期望$\mathbb{E}$使得典则过程B_t是 G-布朗运动。这个次线性期望通常称为 G-期望，记作$\hat{\mathbb{E}}$。对每个$p\ge 1$，我们令$L_G^p(\Omega_T)$表示$Lip(\Omega_T)$在范数$\|\cdot\|_p=\left\{\hat{\mathbb{E}}\left[|\cdot|^p\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$下的完备。

定义 2.2. (G-正态分布) 次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$上的$d$维随机向量$X=(X_1,\cdots,X_d)^{\mathrm{T}}$称作 G-正态分布，如果对每个$a,b\ge 0$，有

$$aX+b\bar{X}\overset{d}{=}\sqrt{a^2+b^2}X,$$

其中$\bar{X}$是X的一个独立版本。

G-正态分布的随机向量X满足下面的特性[4]：

引理 2.1. 令X为d维 G-正态分布的随机向量，那么可以由$u(t,x)=\hat{\mathbb{E}}\left[\phi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right],\phi\in C_{b,Lip\left(\mathbb{R}^d\right)}$刻画$X$的分布。

$u(t,x)$是 G-热方程

$$\begin{cases}\partial_t u-G\left(D^2u\right)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x),\end{cases}$$

定义在$[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$上的唯一黏性解，其中$D^2u$是$\mu$的 Hessian 矩阵，定义$G:\mathbb{S}(d)\to\mathbb{R}^d$为：

$$G(A):=\hat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{2}\langle AX,X\rangle\right],A\in\mathbb{S}(d),$$

$\mathbb{S}(d)$是$d\times d$对称矩阵空间。$G(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}^2\alpha^+-\underline{\sigma}^2\alpha^-\right),\alpha\in\mathbb{R}$，其中，$\bar{\sigma}^2:=\hat{\mathbb{E}}\left[X^2\right],\underline{\sigma}^2:=-\hat{\mathbb{E}}\left[-X^2\right]$。

定义 2.3. (G-布朗运动) 次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$上的 d 维过程$B=\{B_t,t\ge 0\}$称为 G-布朗运动，如果满足以下性质：

1) $B_0(\omega)=0$；

2) 对每个 $t,s\ge 0$，增量 $B_{t+s}-B_t$ 独立于 $\left(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n}\right)$， $n\in\mathbb{N}$ 且 $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t$；

3) 对每个 $t,s\ge 0$， $B_s\sim B_{t+s}-B_t\sim\sqrt{s}X$，其中 X 是 G-正态分布的。

对 $T\in[0,\infty)$，我们介绍下列空间：$L^0(\Omega)$：所有 $\mathcal{B}(\Omega)$-可测实函数所成空间， $L^0(\Omega_T)$：所有 $\mathcal{B}(\Omega_t)$-可测实函数所成空间。对给定的 $[0,T]$ 的分划 $0=t_0<\cdots<t_N=T$，令

$$\eta_t(\omega)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)\left(t_{j+1}-t_j\right),$$

其中， $\xi_j\in L_G^p\left(\Omega_{t_j}\right),j=0,\cdots,N-1$，我们将这类过程的集合记作 $M_G^{p,0}(0,T)$。

对 $\eta\in M_G^{p,0}(0,T)$，定义其 Bochner 积分和 Itô 积分如下：

$$\int_0^T\eta_t(\omega)\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)\left(t_{j+1}-t_j\right),$$

及

$$\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j\left(B_{t_{j+1}}-B_{t_j}\right).$$

对 $p\ge 1$， $M_G^p(0,T)$ 表示 $M_G^{p,0}(0,T)$ 在范数 $\|\eta\|_{M_G^p(0,T)}:=\left(\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T|\eta_t|^p\mathrm{d}t\right]\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备。

引理 2.2. 映射 $I:=M_G^{2,0}(0,T)\to L_G^2(\Omega_T)$ 是一个线性的连续映射.因此，可以连续地延拓至 $I:=M_G^2(0,T)\to L_G^2(\Omega_T)$。有：

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s\right]=0,$$

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s\right)^2\right]\le\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\eta_s^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right].$$

引理 2.3. 对 $\mu,v=1,\cdots,n$，令 $\phi\in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$，$\partial_{x^v}\Phi,\partial^2_{x^\mu x^v}\Phi\in C_{b,Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$，固定 $s\in[0,T]$，$X=\left(X^1,\cdots,X^n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $[s,T]$ 上的 n 维过程，且具有以下形式：

$$X_t^v=X_s^v+\alpha^v(t-s)+\eta^{vij}\left(\left\langle B^i,B^j\right\rangle_t-\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s\right)+\beta^{vj}\left(B_t^j-B_s^j\right),$$

其中，对 $v=1,\cdots,n$， $i,j=1,\cdots,d$， α^v,η^{vij} 和 β^{vj} 在 $L_G^2(\Omega_s)$ 中有界， $X_s=\left(X_s^1,\cdots,X_s^n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $L_G^2(\Omega_s)$ 中给定的随机向量，在 $L_G^2(\Omega_s)$ 中，我们有：

$$\begin{aligned}\phi(X_t)-\phi(X_s)=&\int_s^t\partial_{x^v}\phi(X_\mu)\beta^{vj}\mathrm{d}B_\mu^j+\int_s^t\partial_{x^v}\phi(X_\mu)\alpha^v\mathrm{d}u\\&+\int_s^t\left[\partial_x^v\phi(X_\mu)\eta^{vij}+\frac{1}{2}\partial_{x^\mu x^v}\phi(X_\mu)\beta^{\mu i}\beta^{vj}\right]\mathrm{d}\left\langle B^i,B^j\right\rangle_\mu.\end{aligned}$$

通过 Denis 等人的方法[5]，我们可以将 G-期望的域从 $Lip(\Omega)$ 扩展到 $L^0(\Omega)$。

用 $\bar{\mathbb{E}}$ 表示：

$$\bar{\mathbb{E}}[X]:=\sup_{P\in\mathcal{P}_G}\mathbb{E}^P[X],X\in L^0(\Omega).$$

其中， $\mathcal{P}_G$ 是 $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$ 上鞅测度的弱紧集。

3. 系统的存在性

3.1. 系统正解的存在性

对于 Lotka-Volterra 多种群互惠系统(1)：

$$\mathrm{d}x_i(t)=x_i(t)\left[\left(r_i-a_{ii}x_i(t)+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j(t)\right)\mathrm{d}t+\alpha_i\mathrm{d}\langle B_i,B_i\rangle_t+\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\right],i=1,2,\cdots,n$$

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}:=(a_{ij})_{n\times n},$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{pmatrix}:=(\overline{a}_{ij})_{n\times n},$$

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)).$$

条件 1 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是不可约的，且 $r_i>0,a_{ij}\ge 0$，$\gamma_i:=a_{ii}-\sum_{j\in J_i}a_{ij}>0,i,j=1,2,\cdots,n$。

定理 3.1. 若条件 1 成立，则对任意初值 $x(0)=x_0\in\mathbb{R}_+^n$，系统(1)存在唯一的正解 $x(t)$，且该解以概率 1 位于 $\mathbb{R}_+^n$ 中，即对所有的 $t\ge 0,x(t)\in\mathbb{R}_+^n$ q.s.。

证明 由于系统(1)的系数满足局部 Lipschitz 条件，那么对 $x(0)=x_0\in\mathbb{R}_+^n$，存在唯一的局部解 $x(t)>0,t\in[0,\tau_e)$，其中 τ_e 表示爆破时刻(可参见 Arnold [6]、Freedman [7]、Mao [8])。证明该解是全局存在的，只需证明 $\tau_e=\infty$ q.s.设 $0<k_0<1$ 满足 $x_0\in\left[\frac{1}{k_0},k_0\right]$。对每一个整数 $k\ge k_0$，定义停时：

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):x(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\right\},$$

此处及后面总假设 $\inf\varnothing=\infty$。显然，随着 $k\to\infty$，τ_k 是递增的。令 $\tau_\infty=\lim_{k\to\infty}\tau_k$，则 $\tau_\infty\le\tau_e$ q.s.因此要证 $\tau_e=\infty$ q.s.，只需证明 $\tau_\infty=\infty$ q.s.，并且此时显然满足 $x(t)>0,t\ge 0$ q.s.。换而言之，完成该定理的证明只需证明 $\tau_\infty=\infty$ q.s.。如若不然，存在常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得 $\overline{C}\{\tau_\infty\le T\}>\varepsilon$。从而存在整数 $k_1\ge k_0$ 满足 $\overline{C}\{\tau_k\le T\}\ge\varepsilon$，对所有的 $k\ge k_1$。

定义 C^2 函数 $V:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$：$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-1-\log x_i)$，其中 c_i 表示 L_A 的第 i 个对角元的余子式(见引理 A.1.)。由附录 A 中引理 A.1.的结论可知 $c_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的。由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-1)\left(r_i-a_{ii}x_i+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}c_i\sigma_i(x_i-1)\mathrm{d}B_i(t)\\&\quad+\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i(x_i-1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\sigma_i^2\right]\mathrm{d}\langle B_i,B_i\rangle_t\\&:=LV\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}c_i\sigma_i(x_i-1)\mathrm{d}B_i(t)+\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i(x_i-1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\sigma_i^2\right]\mathrm{d}\langle B_i,B_i\rangle_t\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
LV &= \sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i-1\right)\left(r_i-a_{ii}x_i+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\left[\left(r_i+a_{ii}\right)x_i-\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j-a_{ii}x_i^2+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_ix_j-r_i\right]\\
&\le \sum_{i=1}^{n} c_i\left[\left(r_i+a_{ii}\right)x_i-\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j-a_{ii}x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{j\in J_i}a_{ij}\left(x_i^2+x_j^2\right)-r_i\right].
\end{aligned}
$$

由于矩阵 A 不可约，由附录 A 中引理 A.3。

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ia_{ij}x_j^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ia_{ij}x_i^2,
$$

从而

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i}c_ia_{ij}x_j^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i}c_ia_{ij}x_i^2.
$$

可得

$$
\begin{aligned}
LV &\le \sum_{i=1}^{n} c_i\left[\left(r_i+a_{ii}\right)x_i-\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j-a_{ii}x_i^2+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_i^2-r_i\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\left[\left(r_i+a_{ii}\right)x_i-\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j-\gamma_ix_i^2-r_i\right]\\
&\le K,
\end{aligned}
$$

这里 K 是正常数。

从而

$$
\int_0^{\tau_k\wedge T}\mathrm{d}V\le\int_0^{\tau_k\wedge T}K\mathrm{d}t+\int_0^{\tau_k\wedge T}\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\alpha_i\left(x_i-1\right)+\frac{\sigma_i^2}{2}\right]\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t+\int_0^{\tau_k\wedge T}\sum_{i=1}^{n}c_i\sigma_i\left(x_i-1\right)\mathrm{d}B_i\left(t\right).
$$

取 G-期望可得

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}V\left[x_1\left(\tau_k\wedge T\right),x_2\left(\tau_k\wedge T\right),\cdots,x_n\left(\tau_k\wedge T\right)\right]\\
&\le V\left[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)\right]+K\hat{E}\left(\tau_k\wedge T\right)+\hat{E}\left[\int_0^{\tau_k\wedge T}\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\alpha_i\left(x_i-1\right)+\frac{\sigma_i^2}{2}\right]\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t\right]\\
&\le V\left[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)\right]+KT+\hat{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\sigma_i^2\left\langle B_i,B_i\right\rangle_T\right)+\hat{E}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i\left|x_i-1\right|I_{\tau_k}\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t\right)\\
&= V\left[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)\right]+KT+\bar{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\sigma_i^2\right)T+\bar{\sigma}^2\hat{E}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i\left|x_i-1\right|I_{\tau_e}\mathrm{d}s\right)\\
&:= C+\bar{K}T.
\end{aligned}
$$

其中

$$
C=V\left[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)\right]+\bar{\sigma}^2\hat{E}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i\left|x_i-1\right|I_{\tau_e}\mathrm{d}s\right),
$$

$$
\bar{K}=K+\bar{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\sigma_i^2\right).
$$

对 $k\ge k_1$，令 $\Omega_k=\left\{\tau_k\le T\right\}$，可得 $\bar{C}\left(\Omega_k\right)\ge\varepsilon$。注意到对每个 $\omega\in\Omega_k$，

$x_1(\tau_k,\omega), x_2(\tau_k,\omega), \cdots, x_n(\tau_k,\omega) = k$ 或者 $\frac{1}{k}$。

于是，$V\left[x_1(\tau_k,\omega), x_2(\tau_k,\omega), \cdots, x_n(\tau_k,\omega)\right]$ 不小于 $\sum_{i=1}^{n} c_i(k-1-\log k)$ 或者 $\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{1}{k}-1+\log k\right)$。

即

$$\begin{aligned} C+\bar{K}T &\geq \hat{E}\left[I_{\Omega_k} V\left(x_1(\tau_k), x_2(\tau_k), \cdots, x_n(\tau_k)\right)\right] \\ &= \sup_{P\in\mathcal{P}} E^P\left[I_{\Omega_k} V(x_1(\tau_k), x_2(\tau_k), \cdots, x_n(\tau_k))\right] \\ &\geq \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{n} c_i(k-1-\log k)\right] \wedge \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{1}{k}-1+\log k\right)\right], \end{aligned}$$

其中 I_{Ω_k} 表示集合 Ω_k 的示性函数。令 $k\to\infty$，得

$$\infty > C+\bar{K}T = \infty,$$

矛盾。因此必有 $\tau_\infty = \infty$ q.s.定理得证。

3.2. 系统(1)存在平稳分布且具有遍历性

设非其次线性方程

$$\bar{A}x = -r \tag{2}$$

其中 $\bar{A}$ 如前所定义，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^{\mathrm{T}}$。定义矩阵

$$B_n = \begin{pmatrix} -b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -b_2 & -a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_n & a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $b_i, i=1,2,\cdots,n$ 是正常数。

引理 3.1. 若 $b_i > 0, i=1,2,\cdots,n$ 且条件 1 成立，有

$$(-1)^n \det(B_n) > 0, \quad n \geq 2.$$

引理 3.2. 若条件 1 满足，那么方程(2)存在正解。

$X(t)$ 是 E_l 中一自治 Markov 过程，那么它可表示以下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}X(t) = b(X)\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k} g_r(X)\mathrm{d}B_r(t).$$

方程的扩散阵：

$$\Lambda(x) = (\lambda_{ij}(x)), \lambda_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{k} g_r^i(x) g_r^j(x).$$

假设 B： 存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U \subset E_l$ 满足：

(B.1.) 在 U 和它的一些邻域，扩散阵 $\Lambda(x)$ 的最小特征值是非零的。

(B.2.) 当 $x \in E_l \setminus U$ 时，从 x 出发的轨道到达集合 U 的平均时间 τ 是有限的，且对每个紧子集 $K \subset E_l$ 有 $\sup_{x\in K} E_x \tau < \infty$。

引理 3.3. 如果上述假设成立，那么 Markov 过程 $X(t)$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$。令 $f(\cdot)$ 为关于测度 μ 可积的函数。则对所有的 $K \subset E_l$ 成立

$$P_x\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(X(t)\right)\mathrm{d}t=\int_{E_l} f(x)\mu(\mathrm{d}x)\right\}=1.$$

引理 3.4. 设 $X(t)$ 为 E_l 中的正则 Markov 过程。若 $X(t)$ 相对于某个有界区域 U 是常返的，则它相对于 E_l 中的任一非空区域是常返的。

注记 3.1. 定理 3.1.给出了系统(1)存在唯一的正解 $x(t)$。另外，由定理 3.1.的证明得到了 $LV\le K$，现定义 $\tilde{V}=V+K$，则 $L\tilde{V}\le\tilde{V}$，且显然有

$$\tilde{V}_R=\inf_{x\in\mathbb{R}_+^n\setminus D_K}\tilde{V}(x)\to\infty，当 k\to\infty，$$

其中 $D_k=\left(\frac{1}{k},k\right)\times\left(\frac{1}{k},k\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{k},k\right)$。因此由 Khas'minskii [9]给出 $x(t)$ 是 $\mathbb{R}_+^n$ 中的自治 Markov 过程。

定理 3.2. 假设条件 1 成立，且 $r_i>\frac{\sigma_i^2}{2},\sigma_i>0,i,j=1,2,\cdots,n$ 满足

$$\sum_{i=1}^n\frac{c_ix_i^*}{2}\sigma_i^2<\min\left\{c_i\gamma_i\left(x_i^*\right)^2,i=1,2,\cdots,n\right\},$$

其中 c_i 如定理 3.1.证明中所定义，$x^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)$ 是方程(2)的正解，则系统(1)存在平稳分布 $\mu(\cdot)$ 且具有遍历性。

证明 定义 $V:R_+^n\to R_+$

$$V\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^n c_i\left(x_i-x_i^*-x_i^*\log\frac{x_i}{x_i^*}\right).$$

由于矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是不可约的，则由引理 A.1.可知 $c_i>0,i=1,2,\cdots,n$。此外由引理 3.2.可知方程(2)存在正解 $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)$ 满足

$$r_i=a_{ii}x_i^*-\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j^*,i=1,2,\cdots,n.$$

于是 $V\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 是正定的。由 Itô 公式并结合上式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V&=\sum_{i=1}^n c_i\left(x_i-x_i^*\right)\left[\left(r_i-a_{ii}x_i+\sum_{j\in J_i}a_{ij}x_j\right)\mathrm{d}t+\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\right]\\
&\quad+\left[\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{2}x_i^*\sigma_i^2+\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i\left(x_i-x_i^*\right)\right]\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t\\
&=\sum_{i=1}^n c_i\left(x_i-x_i^*\right)\left[\left(\sum_{j\in J_i}a_{ij}\left(x_j-x_j^*\right)-a_{ii}\left(x_i-x_i^*\right)\right)\mathrm{d}t+\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\right]\\
&\quad+\left[\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{2}x_i^*\sigma_i^2+\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i\left(x_i-x_i^*\right)\right]\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t\\
&:=LV\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n c_i\sigma_i\left(x_i-x_i^*\right)\mathrm{d}B_i(t)+\left[\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{2}x_i^*\sigma_i^2+\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i\left(x_i-x_i^*\right)\right]\mathrm{d}\left\langle B_i,B_i\right\rangle_t,
\end{aligned}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
LV &= -\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ii}\left(x_i - x_i^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i} c_i a_{ij}\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) \\
&\le -\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ii}\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i} c_i a_{ij}\left[\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \left(x_j - x_j^*\right)^2\right] \\
&\le -\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ii}\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i} c_i a_{ij}\left[\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \left(x_j - x_j^*\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2} x_i^*\sigma_i^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ii}\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i} c_i a_{ij}\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2} x_i^*\sigma_i^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2} x_i^*\sigma_i^2
\end{aligned}
$$

由于

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i x_i^*}{2}\sigma_i^2 < \min\left\{c_i\gamma_i\left(x_i^*\right)^2, i = 1,2,\cdots,n\right\},
$$

则椭圆

$$
-\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}x_i^*\sigma_i^2 = 0
$$

全部落于 $\mathbb{R}_+^n$ 中。选取 U 是包含 $\bar{U} \subseteq \mathbb{R}_+^n$ 的一个邻域，使得当 $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus U$，有 $LV \le -C$ (C 为正常数)，这表明假设 B 中的条件(B.2.)满足。因此解 $x(t)$ 在区域 U 是常返的，结合引理 3.4.和注记 3.1.可知 $x(t)$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 中的任意有界区域 D 是常返的。

另一方面，对任意的 $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$，设

$$
M = \min\left\{\sigma_i^2 x_i^2, i = 1,2,\cdots,n, x \in \bar{D}\right\} > 0,
$$

那么对 $x \in \bar{D}, \xi \in \mathbb{R}_+^n$，有

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^2 \xi_i^2 \ge M\left|\xi\right|^2,
$$

所以条件(B.1.)也满足。由此系统(1)存在平稳分布 $\mu(\cdot)$ 且具有遍历性。

参考文献

[1] Hofbauer, J. and Sigmund, K. (1998) The Theory of Evolution and Dynamical Systems.Mathematical Aspects of Selection. Cambridge University Press, New York.

[2] Goh, B.S. (1979) Stability in Models of Mutualism. *American Naturalist*, **113**, 261-275. https://doi.org/10.1086/283384

[3] Peng, S. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty. arXiv:1002.4546 [math.PR]

[4] Peng, S. (2007) G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of *Itô* Types. In: Benth, F.E., Di Nunno, G., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T., Eds., *Stochastic Analysis and Applications*. Abel Symposia, Vol. 2. Springer, Berlin, Heidelberg, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[5] Denis, L., Hu, M. and Peng, S. (2001) Function Spaces and Capacity Related to a Sublinear Expectation: Application to G-Brownian Motion Paths. *Potential Analysis*, **34**, 139-161. https://doi.org/10.1007/s11118-010-9185-x

[6] Arnold, L. (1972) Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. Wiley, New York.

[7] Friedman, A. (1976) Stochastic Differential Equations and Their Applications. Academic Press, New York. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-268202-5.50014-2

[8] Mao, X.R. (1997) Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood, New York.

[9] Khas'minskii, R.Z. (2012) Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

附录 A

在本节中，我们介绍上面证明中使用的一些图论知识。

一有向图 $\mathcal{G}=(V,E)$ 包含定点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 和一个有向线 (k,j) (表示从 k 到终点 j)的集合 E。若对有向线 (j,k) 赋予一正的值 a_{kj}，则图 $\mathcal{G}$ 是有权重的。给定一个具有 n 个顶点的权重图 $(\mathcal{G},A)$，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示权重矩阵，若 a_{kj} 存在则表示有向线 (j,k) 的权重，否则为 0。称有向图 $\mathcal{G}$ 是强相关的，若任意两个不同顶点之间存在从这一点到另一点的路。一个权重的有向图 $(\mathcal{G},A)$ 是强相关的当且仅当权重矩阵 A 是不可约的。

$(\mathcal{G},A)$ 的 Laplacian 矩阵定义如下

$$L_A=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k\neq 1}a_{1k} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum\limits_{k\neq 2}a_{2k} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \sum\limits_{k\neq n}a_{nk} \end{pmatrix}.$$

设 c_k 表示矩阵 L_A 的第 k 个对角元的余子式，则其具有如下性质。

引理 A.1. 设 $n\geq 2$，那么

$$c_k=\sum_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}_k}w(\mathcal{T}),k=1,2,\cdots,n$$

其中，$\mathbb{T}_k$ 是 $(\mathcal{G},A)$ 以顶点 k 为根的生成树 $\mathcal{T}$ 的集合，并且 $w(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 的权重。特别地，若有向图 $(\mathcal{G},A)$ 是强相关的，则对 $1\leq k\leq n$，$c_k>0$。

引理 A.2. 设 $n\geq 2$ 且矩阵 A 是不可约的，则线性系统 $L_A v=0$ 的解空间的维度为 1，且 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是解空间的基础解，其中，$c_k,k=1,2,\cdots,n$ 如引理 A.1.中所定义。

引理 A.3. 设 $n\geq 2$ 且 $c_k,k=1,2,\cdots,n$ 如引理 A.1.中所定义，则如下等式成立

$$\sum_{k,j=1}^{n}c_k a_{kj}G_k(x_k)=\sum_{k,j=1}^{n}c_k a_{kj}G_j(x_j),$$

其中 $G_k(x_k),1\leq k\leq n$ 是任意函数。