

三次PH-DP过渡曲线的构造

张 娜, 王 研, 宋九锡

辽宁师范大学, 辽宁 大连

Email: 1790886298@qq.com

收稿日期: 2020年11月17日; 录用日期: 2020年12月11日; 发布日期: 2020年12月18日

摘 要

本章基于DP曲线成为PH曲线的几何特征条件, 利用三次PH-DP曲线, 构造了互不包含的两圆之间的C型过渡曲线, 并给出数值例子。

关键词

DP曲线, PH曲线, PH-DP曲线, 过渡曲线

Construction of Cubic PH-DP Transition Curve

Na Zhang, Yan Wang, Jiuxi Song

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 1790886298@qq.com

Received: Nov. 17th, 2020; accepted: Dec. 11th, 2020; published: Dec. 18th, 2020

Abstract

Based on the geometric characteristics of the DP curve as the PH curve, this chapter uses the cubic PH-DP curve to construct a C-shaped transition curve between two circles that do not contain each other, and gives numerical examples.

Keywords

DP Curve, PH Curve, PH-DP Curve, Transition Curve



1. 引言

曲线和曲面设计中, 由于几何拼接及数据插值的需要, 涉及平面两曲线, 特别是直线与直线, 直线与圆弧, 圆弧与圆弧之间的光滑连接。在公路设计, 铁路设计和机器人路径设计中往往希望有一个由单螺旋段组成的两圆之间的 G^2 连续过渡曲线。很多文献从不同侧面围绕过渡曲线的设计展开研究。例如: Zboinski, Woznica [1]以铁路中的过渡曲线为例, 从反射值角度对多项式过渡曲线的形状进行了优化; 李重, 马利庄[2]找到了一对合适的三次 Bézier 螺线, 并用其构造了平面上两个相离的圆弧之间 S 型和 C 型 G^2 连续的过渡曲线; 高晖, 寿华好[3]构造了在一定条件下曲率单调的类三次 Bézier 曲线, 并用其构造两个圆弧之间半径比例不受限制的 S 型和 C 型 G^2 连续过渡曲线; 同时构造了两条 α -曲线, 其中一条可用于构造与文献[4]中具有相同特征的过渡曲线, 另一条可用于构造两个圆弧之间不含曲率极值点的过渡曲线。为了保证过渡曲线的曲率尽可能单调, Kneek D. S., Walton D. J. [5]利用 clothoid 曲线构造了一种过渡曲线。虽然该过渡曲线曲率单调, 但因为该曲线的表达式涉及到 Frensel 积分, 所以该过渡曲线与传统的 CAD/CAM 系统不兼容。为克服这个缺点, 文献[6] [7] [8] [9]分别采用三次 Bézier 曲线来构造曲率单调曲线段。三次 Bézier 曲线及三次 B 样条曲线次数低, 几何结构简单, 形状易控, 有关算法在交互计算机图形环境下便于实施, 是 CAD 及 CAGD 中最常用的曲线。用三次曲线构造曲率单调的过渡曲线, 避免了表达形式与 CAD 系统的不兼容性。但另一方面, 过渡曲线的弧长及等距线的表达式通常不是多项式及有理多项式形式, 给实际的几何设计又带来了新的难题。随着五次 PH 曲线的引入, 上述问题得到了有效解决。

PH 曲线的主要特征是具有有理形式的等距线和多项式弧长, 这些优点使得 PH 曲线广泛应用于等距线生成、机器人行走路径设计、道路设计、数控机械加工中, 随后又推广到有理形式的 PH 曲线。郑志浩, 汪国昭[10]提出用三次 PH 曲线构造两曲率圆内含情况下的过渡曲线, 并给出这种情况下圆心距的取值范围, 取得了较好的结果。刘莹莹[11]提出用三次 PH 曲线构造两曲率圆相离情况下的过渡曲线, 并给出这种情况下圆心距的取值范围。而在 2003 年, Delagdo 和 Pena 提出一种新的参数曲线, 称其基函数为 DP 基, 因此构造的曲线被称为 DP 曲线[12]。该曲线是由割角算法生成的, 并且其基函数具有优于其他基函数的性质, 因为它是保型性全正基(NTP 基), 并在数值计算过程中具有稳定性, 且其计算简便, 计算复杂度为线性的。因此, DP 曲线在计算速度方面优于 Bézier 曲线, 并具有研究的意义。2019 年, 李尚蔚[13]基于 DP 曲线, 构造了三次 PH-DP 曲线, 并给出三次 DP 曲线成为 PH 曲线的控制多边形几何特征条件。本文通过 PH-DP 控制多边形几何特征条件, 做过渡曲线, 并给出数值例子。

2. DP 曲线成为 PH 曲线的几何特征条件

2.1. 三次 PH 曲线

设 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, 0 \leq t \leq 1$ 是 Bernstein 基函数, n 次 Bézier 曲线定义为

$$P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad (1)$$

其中 $P_i = (x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ 是控制点。如果存在多项式 $\delta(t)$, 使得

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \delta^2(t),$$

称 $P(t)$ 为 n 次 Pythagorean-hodograph 曲线, 当 $n = 3$ 时简称为 3 次 PH 曲线。PH 曲线的特点是其弧长及等距线表达式为多项式或有理多项式。

2.2. DP 曲线

给定控制点 q_i , 对于 $\forall t \in [0, 1]$, 三次 DP 曲线定义为

$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 q_i D_{i,3}(t) \quad (2)$$

其中三次 DP 曲线基函数为

$$[D_{0,3}, D_{1,3}, D_{2,3}, D_{3,3}] = [(1-t)^3, t(1-t)(2-t), t(1-t)(1+t), t^3]$$

2.3. 三次 PH-DP 曲线的控制多边形特征

定理 1 对于任意给定的三次 DP 曲线 $Q(t)$, 其控制顶点 $q_i (i = 0, 1, 2, 3)$, 控制多边形的各 L_1, L_2, L_3 边长, $d_{j,k}$ 表示 q_j 和 q_k 之间的距离 ($j \neq k$), $L_1 = d_{01}, L_2 = d_{12}, L_3 = d_{23}, L = d_{02}$ 顶点 q_1, q_2 对应的角 θ_1 和 θ_2 , 则 $Q(t)$ 成为三次 PH-DP 曲线的充要条件为

$$\begin{cases} 4L = 9L_1L_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases} \quad (3)$$

设三次 PH-DP 曲线的控制多边形初始端点为 P_0 , 末端点为 P_3 , 以 q_0 为原点建立直角坐标系, 其中由 P_0 处曲率可以得到以 C_0 为圆心, r_0 为半径的圆 Ω_0 ; 由末端点 P_3 处曲率可以得到以 C_1 为圆心, r_1 为半径的圆 Ω_1 , 曲率圆 Ω_0, Ω_1 如图 1 所示。

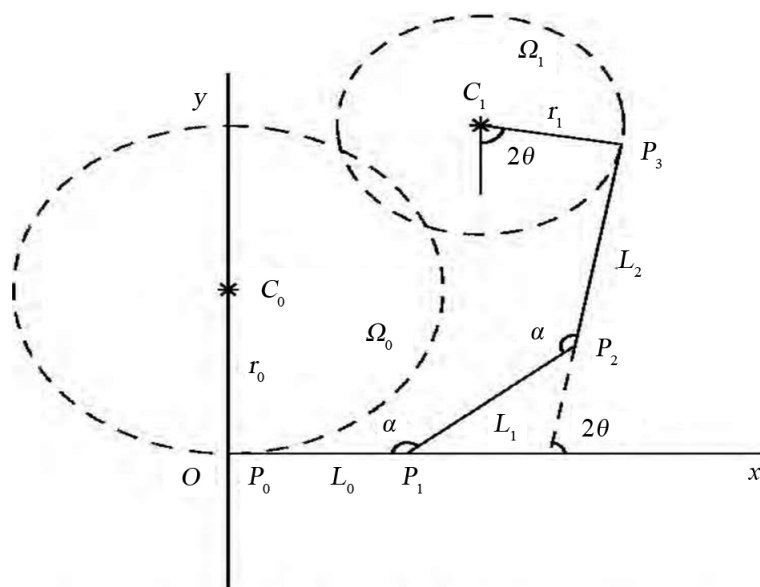


Figure 1. Coordinate system setting and endpoint curvature diagram of cubic PH curve

图 1. 三次 PH 曲线的坐标系设定及端点曲率图

我们可以得到三次 PH-DP 曲线的控制点为

$$\begin{aligned} P_0 &= (x_0, y_0) = (0, 0), \\ P_1 &= (x_1, y_1) = (L_0, 0), \\ P_2 &= (x_2, y_2) = (L_0 + L_1 \cos \theta, L_1 \sin \theta), \\ P_3 &= P_4 = (x_3, y_3) = (L_0 + L_1 \cos \theta + L_2 \cos 2\theta, L_1 \sin \theta + L_2 \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

3. 三次 PH-DP 过渡曲线的构造

本节讨论了用三次 PH-DP 曲线构造两个相不包含圆之间的 G^2 连续过渡曲线的存在性。通过计算得出 C 型过渡曲线的条件，并证明过渡曲线的唯一性，最后给出了数值例子。

定理 2 当两个圆互相包含时，即 $r < r_0 - r_1$ 时，控制多边形顶角的余弦范围 $0 < \cos \theta < \lambda$ 且 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_0}}$ ，则(2)式定义的曲线为 C 型过渡曲线。

证明：将(4)式带入到(2)式中，得到 $P(t)$ 的参数表达式为

$$P(t) = (x(t), y(t)) = P_0(1-t)^3 + P_1t(1-t)(2-t) + P_2t(1-t)(1+t) + P_3t^3$$

其中

$$\begin{aligned} x(t) &= L_0t(1-t)(2-t) + (L_0 + L_1 \cos \theta)t(1-t)(1+t) + (L_0 + L_1 \cos \theta + L_2 \cos 2\theta)t^3 \\ y(t) &= L_1 \sin \theta t(1-t)(1+t) + (L_1 \sin \theta + L_2 \sin 2\theta)t^3 \end{aligned}$$

曲线的曲率为

$$k(t) = \frac{\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta}{\left(2L_0(1-t)^2 + 3\sqrt{L_0 L_2} \cos \theta t(1-t) + 2L_2 t^2\right)^2}$$

将 $t=0,1$ 带入

$$\begin{aligned} k_0 &= k(0) = \frac{\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta}{4L_0^2} \\ k_1 &= k(1) = \frac{\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta}{4L_2^2} \end{aligned}$$

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时， k_0 和 k_1 同号，即两圆互不包含时的过渡曲线是 C 的，对曲率求导，得到 PH-DP 曲线的曲率导数为

$$k'(t) = \frac{6\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta \left(\left(\sqrt{L_0 L_2} \cos \theta - \frac{4}{3} L_0 \right) (1-t) + \left(L_2 - \sqrt{L_0 L_2} \cos \theta \right) t \right)}{2L_0(1-t)^2 + 3\sqrt{L_0 L_2} \cos \theta t(1-t) + 2L_2 t^2}$$

将 $t=0,1$ 带入

$$\begin{aligned} k'(0) &= \frac{-6\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta \left(\sqrt{L_0 L_2} \cos \theta - \frac{4}{3} L_0 \right)}{8L_0^3} \\ k'(1) &= \frac{-6\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta \left(L_2 - \sqrt{L_0 L_2} \cos \theta \right)}{8L_2^3} \end{aligned}$$

当 $0 < \lambda < 1, 0 < \theta < \arccos \lambda$ 时

$$k'(0) \cdot k'(1) < 0$$

此时 PH-DP 曲线构造的过渡曲线是 C 型的, 且其内部含有较少的曲率极值点。

下面讨论三次 PH-DP 过渡曲线的唯一性。

定理 3 若所构造的过渡曲线满足下面的条件, 则该曲线是唯一的。

$$0.5176 < \lambda < 1 \text{ 且 } r_0 - r_1 < r < q(\lambda)(r_0 - r_1)$$

其中

$$q(\lambda) = \frac{\sqrt{9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8}}{3(1 - \lambda^4)}$$

证明 设三次带参数 PH 曲线的两端点分别为 P_0 和 P_3 , P_0 的曲率圆心以及曲率半径分别为 C_0 和 r_0 , P_3 的曲率圆心以及曲率半径分别为 C_1 和 r_1 , 则两个圆之间的圆心距向量为

$$C_1 - C_0 = (P_3(1) - r_1 \sin 2\theta, P_3(2) + r_1 \cos 2\theta - r_0)。$$

由初始点曲率 $k_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta}{4L_0^2}$, 末端点曲率 $k_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{\sqrt{L_0 L_2} \sin \theta}{4L_2^2}$ 及 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{r_0}{r_1}}$ 可得

$$L_0 = \frac{1}{4} \lambda r_0 \sin \theta$$

$$L_2 = \frac{1}{4} \lambda^3 r_0 \sin \theta$$

经计算可得 $L_1 = \frac{3}{8} \lambda^2 r_0 \sin \theta$ 。

构造函数 $g(\theta) = |C_1 - C_0|^2 - r^2$ 。令 $m = \cos \theta$, 则 $0 \leq m < 1$ 。将 PH-DP 曲线的控制点带入 $g(\theta)$ 得到关于 m 的四次方程:

$$\begin{aligned} g(m) &= -\frac{1}{4} \lambda^4 r_0^2 m^4 + \frac{13}{16} \lambda^3 r_0^2 (1 + \lambda^2) m^3 + \frac{\lambda^2}{16} r_0^2 \left(-1 + 11\lambda - \frac{25}{4} \right) m^2 - \frac{13}{16} \lambda^3 (1 + \lambda^2) m \\ &\quad + \frac{1}{64} \left(-64r^2 + (64 - 44\lambda^2 + 9\lambda^4 - 44\lambda^6 + 64\lambda^8) r_0^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由于 $0 < m = \cos \theta < \lambda$ 。根据零点定理知 $g(0) \cdot g(\lambda) < 0$ 时, 方程 $g(m)$ 有根。把 $0, \lambda$ 带入 $g(m)$ 后得

$$g(0) = \frac{1}{64} \left(-64r^2 + (64 - 44\lambda^2 + 9\lambda^4 - 44\lambda^6 + 64\lambda^8) r_0^2 \right)$$

$$g(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{16} \lambda^2 - \frac{43}{64} \lambda^4 + \frac{299}{64} \lambda^6 - \frac{9}{4} \lambda^8 \right) r_0^2 - r^2$$

整理后分别为:

$$g(0) = \frac{64 - 44\lambda^2 + 9\lambda^4 - 44\lambda^6 + 64\lambda^8}{64(1 - \lambda^4)^2} (r_0 - r_1)^2 - r^2$$

$$g(\lambda) = \frac{43 + 299\lambda^2 - 144\lambda^4}{64(1 + \lambda^2)^2} (r_0 - r_1)^2 - r^2$$

由 $0 < \lambda < 1$ 知 $0 < \frac{\sqrt{43+299\lambda^2-144\lambda^4}}{8(1+\lambda^2)} < 1$ 。因为 $r > r_0 - r_1$ ，所以 $g(\lambda) < 0$ 。由此得 $g(0) > 0$ 。

由 $g(0) > 0$ 得

$$\frac{\sqrt{64-44\lambda^2+9\lambda^4-44\lambda^6+64\lambda^8}}{8(1-\lambda^4)}(r_0-r_1) < \frac{\sqrt{9-8\lambda^2+14\lambda^4-8\lambda^6+9\lambda^8}}{3(1-\lambda^4)}(r_0-r_1) < r$$

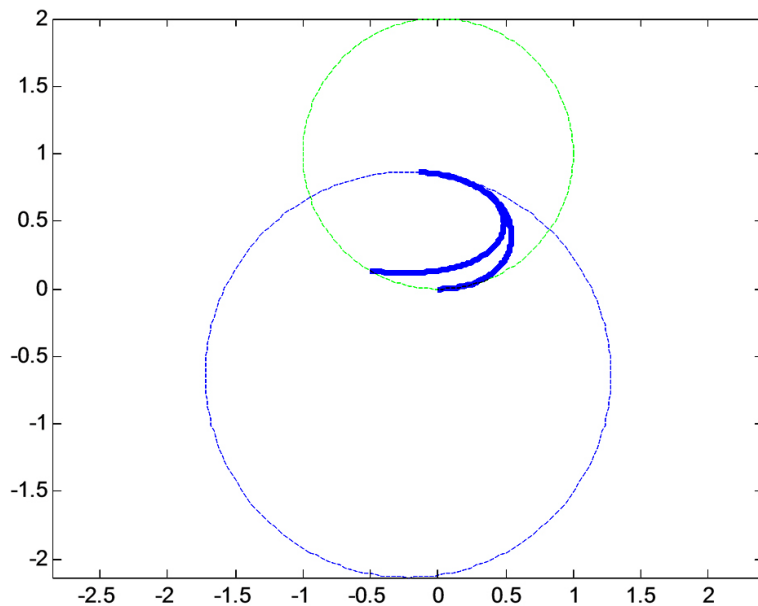


Figure 2. The transition curve of the three times PH-DP at $(r_0 = 1.5, r_1 = 1)$

图 2. $(r_0 = 1.5, r_1 = 1)$ 时的三次 PH-DP 过渡曲线

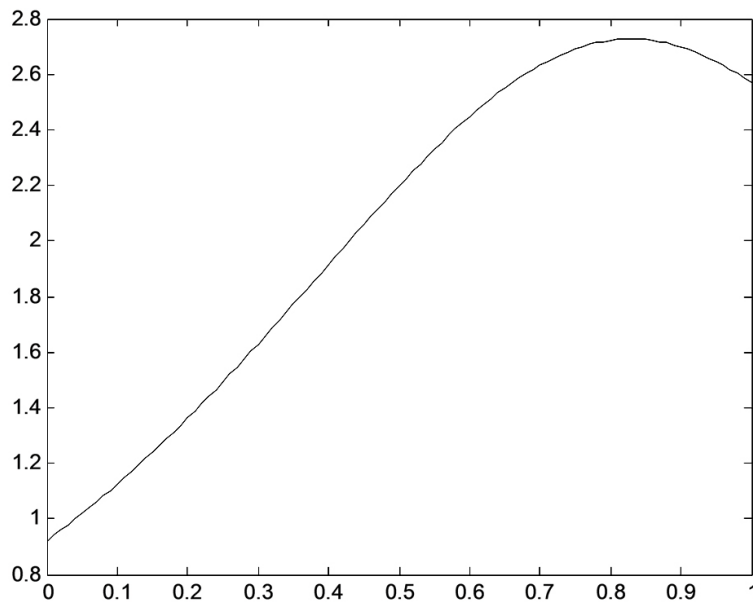


Figure 3. The curvature of the cubic PH-DP curve at $(r_0 = 1.5, r_1 = 1)$

图 3. $(r_0 = 1.5, r_1 = 1)$ 时的三次 PH-DP 曲线曲率

经计算, 当 $0.5176 < \lambda < 1$, $g(0) > 0$ 成立, 故方程 $g(m)$ 此时在 $(0, \lambda)$ 有根。

对方程 $g(m)$ 求导得

$$g'(m) = -\frac{13}{16}\lambda^3(1+\lambda^2) + \frac{1}{8}\lambda^4\left(-\frac{25}{4} + 11\lambda^2\right)h^2 + \frac{39}{16}\lambda^3(1+\lambda^2)h^2 - \lambda^4h^3$$

$$g'(0) = -\frac{13}{16}\lambda^3(1+\lambda^2) < 0$$

因 $g''(0) = \frac{1}{8}\lambda^4\left(-\frac{25}{4} + 11\lambda^2\right)r_0^2 > 0$, $g''(m) = \frac{1}{32}\lambda^4(-99 + 104\lambda^2) > 0$, 所以 $g'(m)$ 是一个单调递增函数。又因为在 $(0, \lambda)$ 上 $g(m) = 0, g'(m) < 0$, 所以 $g'(m)$ 是一个单调递增函数。所以 $g(m)$ 有唯一根。

4. 数值例子

取 $r_0 = 1.5$, 由 $0.5176 < \lambda < 1$, 取 $r_1 = 1$, 这时起始圆的圆心为 $(0, 1.5)$, 通过计算可得过渡曲线两端点的曲率圆的圆心距的范围 $r_0 - r_1 < r < 3.3833(r_0 - r_1)$, 取 $r = 2.3$, 解得 $\theta = 1.0842$, 则所生成的三次 PH-DP 过渡曲线如图 2 所示, 过渡曲线的曲率如图 3 所示, 其内部曲率极值点个数为 1。

参考文献

- [1] Zboinski, K. and Woznica, P. (2017) Optimization of Polynomial Transition Curves from the Viewpoint of Jerk Value. *Archives of Civil Engineering*, **63**, 181-199. <https://doi.org/10.1515/ace-2017-0012>
- [2] Li, Z., Ma, L.Z. and Meek, D. (2006) Reconstruction of G2 Transition Curve for Two Separated Circular Arcs. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, **18**, 265-269.
- [3] 高晖, 寿华好. α -曲线的构造及曲率单调条件的研究[J]. 高校应用数学学报, 2015, 30(3): 291-305.
- [4] 高晖, 寿华好, 缪永伟, 等. 3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(11): 1677-1683.
- [5] Meekd, S. and Waltond, J. (1989) The Use of Comspirals in Drawing Planar Curves of Controlled Curvature. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **25**, 69-78. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(89\)90076-9](https://doi.org/10.1016/0377-0427(89)90076-9)
- [6] Waltond, J. and Meekd, S. (1996) A Planar Cubic Bézier Spiral. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **72**, 85-100. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(95\)00246-4](https://doi.org/10.1016/0377-0427(95)00246-4)
- [7] Walton, D.J. and Meekd, S. (1998) G^2 Curves Composed of Planar Cubic and Pythagorean Hodographs Quintic Spirals. *Computer Aided Geometric Design*, **15**, 547-566. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00028-9)
- [8] Habib, Z. and Sakai, M. (2007) G^2 Pythagorean Hodographs Quintic Transition between Circles with Shape Control. *Computer Aided Geometric Design*, **24**, 252-266. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.03.004>
- [9] Habib, Z. and Sakai, M. (2007) On PH Quintic Spirals Joining Two Circles with One Circle inside the Other. *Computer Aided Design*, **39**, 125-132. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2006.10.006>
- [10] 郑志浩, 汪国昭. 三次 PH 曲线的曲率单调性与过渡曲线构造[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2014, 26(8): 1003-9775.
- [11] 刘莹莹, 王旭辉. 平面三次 PH 过渡曲线的构造[J]. 合肥工业大学学报, 2016, 9(9): 1288-1296.
- [12] Delgado, J. and Pena, J.M. (2003) A Shape Preserving Representation with an Evaluation Algorithm of Linear Complexity. *Computer Aided Geometric Design*, **20**, 1-10. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(02\)00190-5](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(02)00190-5)
- [13] 李尚蔚. DP 曲线曲面造型方法研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2019.