Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1199-1212
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012143

短区间上四元混合幂的除数和

王 鑫

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: wx15805191206@163.com

收稿日期：2020年11月25日；录用日期：2020年12月23日；发布日期：2020年12月31日

摘 要

设$d(n)$为Dirichlet除数函数。本文考虑了短区间上四元混合幂除数函数的均值问题，并得到了一个有效的渐进公式。

关键词

除数问题，圆法，短区间，四元混合幂

On the Sum of Divisors of Mixed Powers of Four Variables in Short Intervals

Xin Wang

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: wx15805191206@163.com

Received: Nov. 25th, 2020; accepted: Dec. 23rd, 2020; published: Dec. 31st, 2020

Abstract

Let $d(n)$ denote the Dirichlet divisor function. In this paper, we consider the mean value of the mixed power of four variables of the divisor function in short intervals, and obtain an effective asymptotic formula.

Keywords

Divisor Problem, Circle Method, Short Intervals, Mixed Powers of Four Variables

文章引用: 王鑫. 短区间上四元混合幂的除数和[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1199-1212.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012143

1. 引言与主要结果

设 $d(n)$为 Dirichlet 除数函数，许多学者围绕除数函数的均值问题做了相关的研究工作。Gafurov [1] [2] 首先研究了与二元二次型除数和问题，并得到了以下渐进公式：

$$\sum_{1\leqslant m_1,m_2\leqslant x} d\left(m_1^2+m_2^2\right)=A_1x^2\log x+A_2x^2+O\left(x^{5/3}\log^9 x\right),$$

其中 A_1， A_2 都是常数。2000 年，Yu [3]将上式余项改进为 $O\left(x^{3/2+\varepsilon}\right)$， ε 为任意小的正实数。

2000 年，Calderán 和 Velasco [4]研究了三元二次型除数和问题，并得到了以下渐进公式：

$$G_2(x)=\sum_{1\leqslant m_1,m_2,m_3\leqslant x} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)=\frac{8\zeta(3)}{5\zeta(5)}x^3\log x+O\left(x^3\right).$$

2012 年，Guo 和 Zhai [5]利用圆法，以及 Heath-Brown [6]在算术级数中除数和函数的估计，得到了三元二次型除数和问题更加精确的主项和余项：

$$G_2(x)=2C_1I_1x^3\log x+\left(C_1I_2+C_2I_1\right)x^3+O\left(x^{8/3+\varepsilon}\right),$$

其中 C_1， C_2， I_1， I_2 都是常数。2014 年，Zhao [7]将上式余项改进为 $O\left(x^2\log^7 x\right)$。

2015 年，Hu 和 Yao [8]研究了短区间上的三元二次型除数和问题，并得到了以下渐进公式：

$$\sum_{|m_i-x|\leqslant y} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)=K_1L_1(x,y)+2\left(\gamma K_1-K_2\right)L_2(x,y)+O\left(y^{3-\varepsilon}\right),$$

其中 $y=x^{1/2+2\varepsilon}$， K_1， K_2 都是常数， γ 是 Euler 常数， $L_1(x,y)$， $L_2(x,y)$ 满足 $L_1(x,y)\asymp y^3\log y$， $L_2(x,y)\asymp y^3$。

2018 年，Zhang 和 Li [9]考虑了短区间上混合幂的三元除数和问题，并得到了以下结论：

$$\sum_{\substack{x-y<m_i^2\leqslant x+y\\ x-y<m_3^k\leqslant x+y\\ i=1,2}} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^k\right)=K_3L_3(x,y)+2\left(\gamma K_3-K_4\right)L_4(x,y)+O\left(y^3x^{-2+1/k-\varepsilon}\right),$$

其中 $3\leq k\in\mathbb{Z}$，$y=x^{\theta_k}$，θ_k 仅与 k 有关，K_3，K_4 都是常数，$L_3(x,y)$，$L_4(x,y)$ 满足 $L_3(x,y)\asymp y^3x^{-2+1/k}\log x$，$L_4(x,y)\asymp y^3x^{-2+1/k}$。

2014 年，Hu [10]研究了四元二次型除数和问题，并得到了以下渐进公式：

$$\sum_{1\leqslant m_1,m_2,m_3,m_4\leqslant x} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\right)=2K_5L_5x^4\log x+\left(K_5L_6+K_6L_5\right)x^4+O\left(x^{7/2+\varepsilon}\right),$$

其中 K_5， K_6， L_5， L_6 都是常数。

2016 年，Hu [11]考虑了短区间上的四元二次型除数和问题，并得到了以下渐进公式：

$$\sum_{\substack{|m_i-x|\leqslant y\\ 1\leqslant i\leqslant 4}} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\right)=K_7L_7(x,y)+2\left(\gamma K_7-K_8\right)L_8(x,y)+O\left(y^{4-\varepsilon}\right),$$

其中 $y=x^{1/3+\varepsilon}$， K_7， K_8 都是常数， $L_7(x,y)$， $L_8(x,y)$ 满足 $L_7(x,y)\asymp y^4\log y$， $L_8(x,y)\asymp y^4$。

在本文中，我们考虑了短区间上四元混合幂的除数和问题，并得到了以下结果：

定理 1.1 设

$$S_k(x,y):=\sum_{\substack{x-y<m_i^2\leqslant x+y\\ x-y<m_4^k\leqslant x+y\\ i=1,2,3}} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^k\right),$$

那么对于 $3\le k\in\mathbb{Z}$，$y=x^{1-\delta_k+4\varepsilon}$，

$$\delta_k=\begin{cases}\dfrac{7}{36}, & k=3;\\ \dfrac{1}{2^{k-1}+k+1}, & 4\leqslant k\leqslant 5;\\ \dfrac{2}{k\left(k^2-3k+5\right)}, & k\geqslant 6,\end{cases}$$

我们有

$$S_k(x,y)=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2\left(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2\right)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right),$$

其中 $\mathcal{K}_1$，$\mathcal{K}_2$ 是收敛的奇异级数，对于 $j=1$，2，有

$$\mathfrak{L}_j(x,y)=\frac{1}{8k}\sum_{4(x-y)<n\leqslant 4(x+y)}(\log n)^{2-j}\sum_{\substack{x-y<m_i\leqslant x+y\\ i=1,2,3,4\\ m_1+m_2+m_3+m_4=n}}\left(m_1m_2m_3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(m_4\right)^{-1+\frac{1}{k}},$$

并且满足 $\mathfrak{L}_1(x,y)\asymp y^4x^{-5/2+1/k}\log x$，$\mathfrak{L}_2(x,y)\asymp y^4x^{-5/2+1/k}$。

本文主要运用圆法来证明定理 1.1。在处理主区间上的积分时，主要运用 Zhang 和 Li [9]文中的结果，以及相关的指数和估计。在处理余区间上的积分时，主要运用 Vaughan [12]和 Wooley [13]的相关结论。

2. 记号说明

我们约定一些在本文中通用的符号：$\mathbb{N}$ 为全体自然数集；$\mathbb{Z}$ 为全体整数集；$\mathbb{R}$ 为全体实数集；$e(t)$ 为 $e^{2\pi it}$ 的缩写；ε 为任意小的正实数；$\|\alpha\|$ 表示 α 到整数的最短距离；$d(n)$为除数函数；$\varphi(n)$ 为 Euler 函数；γ 为 Euler 常数；(a, b)为 a，b 的最大公约数；$f(x)=O(g(x))$，即存在常数 C，使得 $|f(x)|\leqslant Cg(x)$；$f(x)\ll g(x)$，即 $f(x)=O(g(x))$；$f(x)\asymp g(x)$，即 $g(x)\ll f(x)\ll g(x)$。

在本文中 x，y 都表示充分大的正整数，且 $y\ll x$；记

$$N_1=x-y,\qquad N_2=x+y,$$

对于 $k\ge 2$，$v>u>0$，$\lambda\in\mathbb{R}$，定义

$$f_k(\alpha)=\sum_{N_1<m^k\leqslant N_2}e\left(m^k\alpha\right),\quad f(-\alpha)=\sum_{4N_1<m\leqslant 4N_2}d(m)e(-m\alpha),$$

以及

$$T_1(u,v)=\sum_{u<m\leqslant v}e(-m\lambda),\quad T_1^*(u,v)=\sum_{u<m\leqslant v}(\log m)e(-m\lambda),$$

$$T_k(u,v)=\frac{1}{k}\sum_{u^k<m\leqslant v^k}m^{\frac{1}{k}-1}e(m\lambda).$$

3. 主要引理

我们将首先证明以下渐进公式，它将在主区间上积分的估计中起到重要作用。

引理 3.1 设 $\alpha=\frac{a}{q}+\lambda$，$|\lambda|\le\frac{1}{q\tau}$，$f(-\alpha)$的定义同上，则有

$$f(-\alpha)=\frac{T_1^*(4N_1,4N_2)}{q}+\frac{-2\log q+2\gamma}{q}T_1(4N_1,4N_2)+O\left(x^{\varepsilon}\left(q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{3}{2}}|\lambda|x+q^{\frac{3}{2}}|\lambda|^2xy\right)\right).$$

证明：由 $f(-\alpha)$的定义以及 Able 分部求和公式，有

$$\begin{aligned}f(-\alpha)&=\sum_{4N_1<m\leqslant 4N_2}d(m)e\left(-m\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)\right)=\sum_{r=1}^{q}e\left(-\frac{ar}{q}\right)\sum_{\substack{4N_1<m\leqslant 4N_2\\ m\equiv r(mod\ q)}}d(m)e(-m\lambda)\\&=\sum_{r=1}^{q}e\left(-\frac{ar}{q}\right)\int_{4N_1}^{4N_2}e(-u\lambda)d\left(\sum_{\substack{m\leqslant u\\ m\equiv r(mod\ q)}}d(m)\right).\end{aligned}\tag{1}$$

对于 $r,q\in\mathbb{Z}$，$1\leqslant r\leqslant q$，$u>0$，定义

$$D(u;q,r)=\sum_{\substack{n\leqslant u\\ n\equiv r(mod\ q)}}d(n).\tag{2}$$

首先引用 Heath-Brown [6]关于 $D(u;q,r)$的结论，有

$$D(u;q,r)=R(u;q,r)+\Delta(u;q,r)\tag{3}$$

$$R(u;q,r)=\frac{u\cdot A(q,r)}{q^2}(\log u-2\log q+2\gamma-1)+\frac{2u\cdot B(q,r)}{q^2},\tag{4}$$

其中

$$A(q,r)=\sum_{d|(q,r)}\sum_{l|q/d}dl\mu\left(\frac{q}{dl}\right),\qquad B(q,r)=\sum_{d|(q,r)}\sum_{l|q/d}dl\mu\left(\frac{q}{dl}\right)\log l.$$

由郭汝庭和翟文广[5]关于 $R(u;q,r)$ 和 $\Delta(u;q,r)$的一些结果，令

$$c_1(q,r)=\frac{A(q,r)}{q^2},\qquad c_2(q,r)=\frac{A(q,r)\cdot(-2\log q+2\gamma-1)}{q^2}+\frac{2B(q,r)}{q^2},$$

$$B_1(q)=\sum_{r=1}^{q}c_1(q,r)e\left(-\frac{ar}{q}\right),\qquad B_2(q)=\sum_{r=1}^{q}c_2(q,r)e\left(-\frac{ar}{q}\right).$$

我们有

$$R(u;q,r)=c_1(q,r)u\log u+c_2(q,r)u,\quad B_1(q)=\frac{1}{q},\quad B_2(q)=\frac{-2\log q+2\gamma-1}{q},\tag{5}$$

且 $\Delta(u;q,r)$满足

$$F(u;q,a)=\sum_{r=1}^{q}\Delta(u;q,r)e\left(-\frac{ar}{q}\right)\ll\left(q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}\right)(qu)^{\varepsilon},\tag{6}$$

$$H(T;q,a)=\int_0^T F(u;q,a)\mathrm{d}u\ll q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}T.\tag{7}$$

由公式(1)~(5)，以及 Zhang 和 Li [9]文中相关的结论，

$$\int_u^v e(-t\lambda)\mathrm{d}t=T_1(u,v)+O\left(1+(v-u)|\lambda|\right),$$

$$\int_u^v (\log t) e(-t\lambda) \mathrm{d}t = T_1^*(u,v) + O\Big((\log v)\big(1+(v-u)|\lambda|\big)\Big),$$

我们有

$$f(-\alpha) = \sum_{r=1}^{q} e\left(-\frac{ar}{q}\right) \int_{4N_1}^{4N_2} e(-u\lambda) \mathrm{d}\big(D(u;q,r)\big) = J_1 + J_2, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{r=1}^{q} e\left(-\frac{ar}{q}\right) \int_{4N_1}^{4N_2} e(-u\lambda) \mathrm{d}\big(R(u;q,r)\big) \\ &= \frac{T_1^*(4N_1,4N_2)}{q} + \frac{-2\log q + 2\gamma}{q} T_1(4N_1,4N_2) + O\Big((\log x)\big(1+|\lambda| y\big)\Big), \end{aligned} \tag{9}$$

由两次分部积分运算以及公式(6)~(7)，我们有

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{r=1}^{q} e\left(-\frac{ar}{q}\right) \int_{4N_1}^{4N_2} e(-u\lambda) \mathrm{d}\big(\Delta(u;q,r)\big) \\ &= F(4N_2;q,a) e(-4N_2\lambda) - F(4N_1;q,a) e(-4N_1\lambda) + 2\pi i\lambda \sum_{r=1}^{q} e\left(-\frac{ar}{q}\right) \int_{4N_1}^{4N_2} e(-u\lambda) \Delta(u;q,r) \mathrm{d}u \\ &= F(4N_2;q,a) e(-4N_2\lambda) - F(4N_1;q,a) e(-4N_1\lambda) + 2\pi i\lambda H(4N_2;q,a) e(-4N_2\lambda) \\ &\quad - 2\pi i\lambda H(4N_1;q,a) e(-4N_1\lambda) + (2\pi i\lambda)^2 \int_{4N_1}^{4N_2} H(u;q,a) e(-u\lambda) \mathrm{d}u \\ &\ll x^{\varepsilon} \left(q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{3}{2}} |\lambda| x + q^{\frac{3}{2}} |\lambda|^2 xy \right), \end{aligned} \tag{10}$$

结合公式(8)~(10)，我们证明了引理 3.1。

其次我们将证明以下积分均值，它将在余区间上积分的估计中起到重要作用。

引理 3.2 设 $2 \le k \in \mathbb{Z}$， $f_k(\alpha)$ 的定义同上，且 $y \gg x^{1-1/k}$ ，则有

$$\int_0^1 \left| f_k(\alpha) \right|^6 \mathrm{d}\alpha \ll y^4 x^{-4+\frac{4}{k}+\varepsilon}.$$

证明：由复指数函数的正交性

$$\int_0^1 e(u\alpha) \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1, \text{若 } u = 0, \\ 0, \text{若 } u \in \mathbb{Z}, u \ne 0, \end{cases}$$

以及 $f_k(\alpha)$ 的定义，我们有

$$\int_0^1 \left| f_k(\alpha) \right|^6 \mathrm{d}\alpha = \sum_{\substack{m_1^k - m_2^k = m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k \\ N_1^{1/k} < m_i \leqslant N_2^{1/k} \\ i=1,\cdots,6}} 1, \tag{11}$$

即上式左端积分等于方程

$$m_1^k - m_2^k = m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k \tag{12}$$

的解数 R，其中 $N_1^{1/k} < m_i \le N_2^{1/k}$， $i = 1,\cdots,6$ 。

我们将按照以下三种情况分类考察解数 R：

情形一： $m_1^k - m_2^k = m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k = 0$， $m_3 = m_4$ 。

此时有 $m_1 = m_2$， $m_3 = m_4$， $m_5 = m_6$，方程(12)的变量只有三个，则其解数 R 满足

$$R \ll \left(N_2^{\frac{1}{k}} - N_1^{\frac{1}{k}}\right)^3 \ll y^3 x^{-3+\frac{3}{k}}.$$

情形二：$m_1^k - m_2^k = m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k = 0$，$m_3 \neq m_4$。

此时有 $m_1 = m_2$，且 m_5，m_6 满足

$$m_4^k - m_3^k = m_5^k - m_6^k = \left(m_5 - m_6\right)\left(m_5^{k-1} + m_5^{k-2} m_6 + \cdots + m_6^{k-1}\right),$$

若固定 m_3，m_4 的取值，则 m_5，m_6 的取法也随之确定，且其取法数 $R_{5,6}$ 满足

$$R_{5,6} \ll d\left(m_4^k - m_3^k\right) \ll x^{\varepsilon},$$

因此解数 R 满足

$$R \ll R_{5,6} \cdot \left(N_2^{\frac{1}{k}} - N_1^{\frac{1}{k}}\right)^3 \ll y^3 x^{-3+\frac{3}{k}+\varepsilon}.$$

情形三：$m_1^k - m_2^k = m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k \neq 0$。

此时 m_1，m_2 满足

$$m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k = m_1^k - m_2^k = \left(m_1 - m_2\right)\left(m_1^{k-1} + m_1^{k-2} m_2 + \cdots + m_2^{k-1}\right),$$

若固定 m_3，m_4，m_5，m_6 的取值，则 m_1，m_2 的取法也随之确定，且其取法数 $R_{1,2}$ 满足

$$R_{1,2} \ll d\left(m_3^k - m_4^k + m_5^k - m_6^k\right) \ll x^{\varepsilon},$$

因此解数 R 满足

$$R \ll R_{1,2} \cdot \left(N_2^{\frac{1}{k}} - N_1^{\frac{1}{k}}\right)^4 \ll y^4 x^{-4+\frac{4}{k}+\varepsilon}.$$

结合以上三种情况的讨论，并由条件 $y \gg x^{1-1/k}$ 可得解数 R 满足：

$$R \ll y^3 x^{-3+\frac{3}{k}} + y^3 x^{-3+\frac{3}{k}+\varepsilon} + y^4 x^{-4+\frac{4}{k}+\varepsilon} \ll y^4 x^{-4+\frac{4}{k}+\varepsilon}, \tag{13}$$

结合公式(11)~(13)，我们有

$$\int_0^1 \left|f_k(\alpha)\right|^6 \mathrm{d}\alpha \ll y^4 x^{-4+\frac{4}{k}+\varepsilon},$$

由此我们证明了引理 3.2。

此外还需要用到以下圆法中的经典结论：

引理 3.3 设 $a, q \in \mathbb{Z}$，$\alpha \in \mathbb{R}$，且 $(a,q)=1$，$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$，$\phi(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$，则有

$$\sum_{1 \leqslant x \leqslant X} e\left(\phi(x)\right) \ll X^{1+\varepsilon}\left(q^{-1} + X^{-1} + qX^{-k}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$

证明：参见 Vaughan [12]。

引理 3.4 设 $2 \leq k \in \mathbb{Z}$，$\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_k\right) \in \mathbb{R}^k$，若存在整数 $j\,(2 \leqslant j \leqslant k)$，使得对于某些 $a \in \mathbb{Z}$，$q \in \mathbb{N}$，有 $\left|\alpha_j - \frac{a}{q}\right| \leqslant q^{-2}$，$q \leqslant Y^j$，那么我们有

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant Y} e\left(\alpha_1 m + \cdots + \alpha_k m^k\right) \ll Y^{1+\varepsilon}\left(q^{-1} + Y^{-1} + qY^{-j}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}}.$$

证明：参见 Wooley [13]。

4. 定理 1.1 的证明

设 $k \ge 3$， $y = x^{1-\delta_k+4\varepsilon}$ ，其中

$$\delta_k = \begin{cases} \dfrac{7}{36}, & k = 3; \\ \dfrac{1}{2^{k-1}+k+1}, & 4 \leqslant k \leqslant 5; \\ \dfrac{2}{k\left(k^2-3k+5\right)}, & k \geqslant 6, \end{cases}$$

并令

$$x^{\varepsilon} \ll 2Q < \tau, \quad Q\tau \asymp y^{\beta} x^{-\beta+1}, \quad Q \ll y^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{-\beta+1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{14}$$

其中

$$\beta = \begin{cases} 2, \ k = 3, \\ k, \ k \geqslant 4. \end{cases}$$

由复指数函数的正交性，对于满足公式(14)的 τ ，我们有

$$\sum_{\substack{x-y<m_i^2 \leqslant x+y \\ x-y<m_4^k \leqslant x+y \\ i=1,2,3}} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^k\right) = \int_0^1 f_2^3(\alpha) f_k(\alpha) f(-\alpha) \mathrm{d}\alpha = \int_{\frac{1}{\tau}}^{1+\frac{1}{\tau}} f_2^3(\alpha) f_k(\alpha) f(-\alpha) \mathrm{d}\alpha,$$

其中 $f_k(\alpha)$， $f(-\alpha)$ 的定义同上。由 Dirichlet 有理逼近定理，每一个 $\alpha \in \left[\frac{1}{\tau}, 1+\frac{1}{\tau}\right]$ 都可以写成

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$

其中整数 a，q 满足 $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant \tau$ ， $(a,q)=1$，定义优弧

$$\mathfrak{M}(a,q) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right],$$

并定义主区间和余区间分别为

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(a,q), \qquad \mathfrak{m} = \left[\frac{1}{\tau}, 1+\frac{1}{\tau}\right] \backslash \mathfrak{M}, \tag{15}$$

对于不同的优弧 $\mathfrak{M}(a_1,q_1)$， $\mathfrak{M}(a_2,q_2)$， $\frac{a_1}{q_1} \ne \frac{a_2}{q_2}$， 由公式(14)，我们有

$$\left|\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right| = \left|\frac{a_1q_2 - a_2q_1}{q_1q_2}\right| \geqslant \frac{1}{q_1q_2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_1Q} + \frac{1}{q_2Q}\right) > \frac{1}{q_1\tau} + \frac{1}{q_2\tau},$$

即任意两个不同的优弧是不相交的，由以上定义把积分区间 $\left[\frac{1}{\tau}, 1+\frac{1}{\tau}\right]$ 划分为主区间 $\mathfrak{M}$ 和余区间 $\mathfrak{m}$ ，因此我们有

$$S_k(x,y)=\sum_{\substack{x-y<m_i^2\leqslant x+y\\ x-y<m_4^k\leqslant x+y\\ i=1,2,3}} d\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^k\right)=I_1(x,y)+I_2(x,y) \tag{16}$$

其中

$$I_1(x,y)=\int_{\mathfrak{M}} f_2^3(\alpha)f_k(\alpha)f(-\alpha)\mathrm{d}\alpha,\qquad I_2(x,y)=\int_{\mathfrak{m}} f_2^3(\alpha)f_k(\alpha)f(-\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

4.1. 主区间上积分的估计

由主区间的定义，我们有

$$I_1(x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{\mathfrak{M}(a,q)} f_2^3(\alpha)f_k(\alpha)f(-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} f_2^3\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)f_k\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)f\left(-\frac{a}{q}-\lambda\right)\mathrm{d}\lambda, \tag{17}$$

考察被积函数 $f_2^3(\alpha)f_k(\alpha)f(-\alpha)$，由引理 3.1 以及 Zhang 和 Li [9]文中关于 $f_k(\alpha)$ 的结论

$$f_k(\alpha)=\frac{S_k(q,a)}{q}T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)+O\left(q^{1-1/k}\left(1+|\lambda|y\right)\right),$$

$$S_k(q,a)=\sum_{r=1}^{q}e\left(\frac{ar^k}{q}\right)\ll q^{1-1/k}, \tag{18}$$

我们有

$$f_2^3(\alpha)f_k(\alpha)f(-\alpha)=m(q;x,y)+r_1(q;x,y)+r_2(q;x,y)+r_3(q;x,y),$$

其中

$$m(q;x,y)=\frac{S_2^3(q,a)S_k(q,a)}{q^5}T_2^3\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)\left(T_1^*(4N_1,4N_2)+2(\gamma-\log q)T_1(4N_1,4N_2)\right), \tag{19}$$

$$r_1(q;x,y)\ll q^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{k}}\left(1+|\lambda|y\right)T_2^2\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)\left(T_1^*(4N_1,4N_2)+2(\gamma-\log q)T_1(4N_1,4N_2)\right),$$

$$r_2(q;x,y)\ll q^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{k}}\left(1+|\lambda|y\right)T_2^3\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_1^*(4N_1,4N_2)+2(\gamma-\log q)T_1(4N_1,4N_2)\right),$$

$$r_3(q;x,y)\ll q^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{k}}\left(q^{\frac{3}{2}}x^{\varepsilon}+q^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}+q^{\frac{3}{2}}|\lambda|x^{1+\varepsilon}+q^{\frac{3}{2}}|\lambda|^2x^{1+\varepsilon}y\right)T_2^3\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right).$$

将上式代入到公式(17)中，我们有

$$I_1(x,y)=M(x,y)+R_1(q;x,y)+R_2(q;x,y)+R_3(q;x,y), \tag{20}$$

其中

$$M(x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} m(q;x,y)\mathrm{d}\lambda,\qquad R_1(q;x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} r_1(q;x,y)\mathrm{d}\lambda$$

$$R_2(q;x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} r_2(q;x,y)\mathrm{d}\lambda,\qquad R_3(q;x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} r_3(q;x,y)\mathrm{d}\lambda$$

由 Zhang 和 Li [9]文中相关的结论

$$T_1(u,v) \ll \min\left(v-u,\frac{1}{\|\lambda\|}\right), \qquad T_1^*(u,v) \ll (\log v)\min\left(v-u,\frac{1}{\|\lambda\|}\right),$$

$$T_k\left(N_1^{1/k},N_2^{1/k}\right) \ll \min\left(yx^{-1+1/k},\frac{1}{x^{1-1/k}\|\lambda\|}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}
R_1(q;x,y) &\ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}(1+|\lambda|y)T_2^2\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)\times\left(T_1^*(4N_1,4N_2)+2(\gamma-\log q)T_1(4N_1,4N_2)\right)\mathrm{d}\lambda \\
&\ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}(1+|\lambda|y)(\log x)\min\left(y,\frac{1}{\|\lambda\|}\right)\min\left(yx^{-\frac{1}{2}},\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\|\lambda\|}\right)^2\min\left(yx^{-1+\frac{1}{k}},\frac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}\|\lambda\|}\right)\mathrm{d}\lambda \\
&\ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}(\log x)\left\{\int_0^{\frac{1}{y}} y^4x^{-2+\frac{1}{k}}(1+\lambda y)\mathrm{d}\lambda+\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{q\tau}} x^{-2+\frac{1}{k}}\lambda^{-4}(1+\lambda y)\mathrm{d}\lambda\right\} \\
&\ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}(\log x)y^3x^{-2+\frac{1}{k}} \\
&\ll y^3x^{-2+\frac{1}{k}}Q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\log x,
\end{aligned} \tag{21}$$

同理有

$$R_2(q;x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} r_2(q;x,y)\mathrm{d}\lambda \ll y^3x^{-\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\log x, \tag{22}$$

$$R_3(q;x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} r_3(q;x,y)\mathrm{d}\lambda \ll y^3x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{2-\frac{1}{k}}+y^3x^{-\frac{13}{6}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{\frac{7}{6}-\frac{1}{k}}+y^2x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{2-\frac{1}{k}}. \tag{23}$$

对于 $M(x,y)$，我们有

$$M(x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} m(q;x,y)\mathrm{d}\lambda = E_1(x,y)+E_2(x,y), \tag{24}$$

其中

$$E_1(x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} m(q;x,y)\mathrm{d}\lambda,$$

$$E_2(x,y)=\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{q\tau}} m(q;x,y)\mathrm{d}\lambda+\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} m(q;x,y)\mathrm{d}\lambda.$$

对于 $E_2(x,y)$，我们有以下估计：

$$\begin{aligned}
E_2(x,y) &\ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}(\log x)\lambda^{-5}\mathrm{d}\lambda \ll \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}(\log x)q^{\frac{5}{2}-\frac{1}{k}}\tau^4 \\
&\ll x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}(\log x)Q^{\frac{7}{2}-\frac{1}{k}}\tau^4 \ll y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{25}$$

对于 $E_1(x,y)$，由公式(19)，我们有

$$E_1(x,y)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\frac{S_2^3(q,a)S_k(q,a)}{q^5}\left(\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma-\log q)\mathfrak{L}_2(x,y)\right)$$
$$+\sum_{q>Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\frac{S_2^3(q,a)S_k(q,a)}{q^5}\left(\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma-\log q)\mathfrak{L}_2(x,y)\right), \tag{26}$$

其中

$$\mathfrak{L}_1(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}T_2^3\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)T_1^*(4N_1,4N_2)\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{1}{8k}\sum_{\substack{N_1<m_i\leqslant N_2\\i=1,2,3,4}}\frac{1}{m_1^{1/2}m_2^{1/2}m_3^{1/2}m_4^{1-1/k}}\sum_{\substack{4N_1<n\leqslant 4N_2\\m_1+m_2+m_3+m_4=n}}\log(n) \tag{27}$$
$$\asymp(\log x)\sum_{\substack{N_1<m_i\leqslant N_2\\i=1,2,3,4}}\frac{1}{m_1^{1/2}m_2^{1/2}m_3^{1/2}m_4^{1-1/k}}\asymp y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}\log x,$$

$$\mathfrak{L}_2(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}T_2^3\left(N_1^{\frac{1}{2}},N_2^{\frac{1}{2}}\right)T_k\left(N_1^{\frac{1}{k}},N_2^{\frac{1}{k}}\right)T_1(4N_1,4N_2)\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{1}{8k}\sum_{\substack{N_1<m_i\leqslant N_2\\i=1,\,2,\,3,\,4}}\frac{1}{m_1^{1/2}m_2^{1/2}m_3^{1/2}m_4^{1-1/k}}\sum_{\substack{4N_1<n\leqslant 4N_2\\m_1+m_2+m_3+m_4=n}}1 \tag{28}$$
$$\asymp\sum_{\substack{N_1<m_i\leqslant N_2\\i=1,2,3,4}}\frac{1}{m_1^{1/2}m_2^{1/2}m_3^{1/2}m_4^{1-1/k}}\asymp y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}.$$

对于公式(26)中的求和项，我们有以下估计

$$\sum_{q>Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\frac{S_2^3(q,a)S_k(q,a)}{q^5}\left(\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma-\log q)\mathfrak{L}_2(x,y)\right)$$
$$\ll\sum_{q\geqslant Q}q^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{k}}y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}\log x\ll y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}}(\log x)Q^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\ll y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{29}$$

综合公式(20)~(29)，我们有

$$I_1(x,y)=M(x,y)+R_1(q;x,y)+R_2(q;x,y)+R_3(q;x,y)$$
$$=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right) \tag{30}$$
$$+O\left(y^3x^{-\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}\log x+y^3x^{-\frac{13}{6}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{\frac{7}{6}-\frac{1}{k}}+y^2x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{2-\frac{1}{k}}\right),$$

其中

$$\mathcal{K}_1=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^5}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}S_2^3(q,a)S_k(q,a),\quad \mathcal{K}_2=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log q}{q^5}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}S_2^3(q,a)S_k(q,a).$$

接下来我们需要证明级数$\mathcal{K}_1$，$\mathcal{K}_2$均收敛，定义 Dirichlet 级数

$$L(s,\Phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(n)}{n^s},$$

其中

$$\Phi(n)=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\(a,n)=1}}S_2^3(n,a)S_k(n,a),$$

由公式(18)得$\Phi(n)\ll n^{\frac{5}{2}-\frac{1}{k}}\varphi(n)\ll n^{\frac{7}{2}-\frac{1}{k}}$，则当$Res>\frac{9}{2}-\frac{1}{k}$时，级数$L(s,\Phi)$收敛。此时

$$-L'(s,\Phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(n)\log n}{n^s},$$

同理得$\Phi(n)\log n\ll n^{\frac{5}{2}-\frac{1}{k}}\varphi(n)\log n\ll n^{4-\frac{1}{k}}$，则当$Res>5-\frac{1}{k}$时，级数$-L'(s,\Phi)$收敛。因此由$\mathcal{K}_1=L(5,\Phi)$，$\mathcal{K}_2=-L'(5,\Phi)$知$\mathcal{K}_1$，$\mathcal{K}_2$均为收敛的级数。

4.2. 余区间上积分的估计

由余区间的定义，当$\alpha\in\mathfrak{m}$时，$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda$，$|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}$，$1\leqslant a\leqslant q$，$(a,q)=1$，且$q$满足

$$Q<q\leqslant\tau. \tag{31}$$

设$X-Y=N_1^{\frac{1}{k}}$，$X+Y=N_1^{\frac{1}{k}}$，$\mathcal{X}=X-Y$，$m=n+\mathcal{X}$，改写$f_k(\alpha)$为

$$f_k(\alpha)=\sum_{N_1<m^k\leqslant N_2}e(m^k\alpha)=\sum_{X-Y<m\leqslant X+Y}e(m^k\alpha)=e(\alpha\mathcal{X}^k)\sum_{1\leqslant n\leqslant 2Y}e(\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n), \tag{32}$$

其中

$$\alpha_j=\binom{k}{j}\mathcal{X}^{k-j}\alpha,\ (1\leqslant j\leqslant k).$$

4.2.1. $k=3$ 时，定理 1.1 的证明

当$k=3$时，对$f_2^2(\alpha)$进行估计，我们有

$$|f_2(\alpha)|^2=\sum_{N_1^{\frac{1}{2}}<m,n\leqslant N_2^{\frac{1}{2}}}e((m^2-n^2)\alpha)=\left(N_2^{\frac{1}{2}}-N_1^{\frac{1}{2}}\right)+T(x)+\overline{T(x)}, \tag{33}$$

其中

$$T(x)=\sum_{N_1^{\frac{1}{2}}<n<m\leqslant N_2^{\frac{1}{2}}}e((m^2-n^2)\alpha).$$

对于 $T(x)$，我们有以下估计

$$T(x)=\sum_{1\leqslant v\leqslant N_2^{\frac{1}{2}}-N_1^{\frac{1}{2}}}e(v^2\alpha)\sum_{N_1^{\frac{1}{2}}<n\leqslant N_2^{\frac{1}{2}}-v}e(2nv\alpha)\ll\sum_{1\leqslant v\leqslant yx^{-\frac{1}{2}}}\min\left(yx^{-\frac{1}{2}},\frac{1}{\|2v\alpha\|}\right)\ll\left(yx^{-\frac{1}{2}}+q\log q\right)\left(\frac{yx^{-\frac{1}{2}}}{q}+1\right)$$

$$\ll y^2x^{-1}q^{-1}+yx^{-\frac{1}{2}}\log q+q\log q,$$

结合上式以及公式(31)、(33)，我们有

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_2(\alpha)\right|\ll yx^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x+\tau^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x. \tag{34}$$

由 Hölder 不等式，引理 3.2，公式(34)，以及 Zhang 和 Li [9]对于 $f(-\alpha)$ 积分均值的估计

$$\int_0^1\left|f(-\alpha)\right|^2\mathrm{d}\alpha\ll y\log^3 x, \tag{35}$$

我们有

$$\begin{aligned}I_2(x,y)&\ll\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_2(\alpha)\right|\left(\int_0^1\left|f_2(\alpha)\right|^6\mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_0^1\left|f_3(\alpha)\right|^6\mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_0^1\left|f(-\alpha)\right|^2\mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\\&\ll y^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{10}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}\log^{\frac{3}{2}}x\left(yx^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x+\tau^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x\right)\\&\ll y^3x^{-\frac{49}{36}+\varepsilon}+y^{\frac{7}{2}}x^{-\frac{29}{18}+\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{36}$$

结合公式(16)、(30)、(36)，我们有

$$\begin{aligned}S_3(x,y)=&\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{13}{6}-\varepsilon}\right)\\&+O\left(y^3x^{-\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{6}}\log x+y^3x^{-\frac{11}{6}+\varepsilon}Q^{\frac{5}{6}}+y^2x^{-\frac{7}{6}+\varepsilon}+y^{\frac{7}{2}}x^{-\frac{29}{18}+\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}$$

且当 $x^{\frac{11}{36}}\ll Q\ll x^{\frac{11}{36}+\frac{7}{2}\varepsilon}$，我们有

$$S_3(x,y)=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{13}{6}-\varepsilon}\right).$$

4.2.2. $4\le k\le 5$ 时，定理 1.1 的证明

当 $4\le k\le 5$ 时，由引理 3.3 以及公式(32)，我们有

$$\begin{aligned}f_k(\alpha)&=e\left(\alpha\mathcal{X}^k\right)\sum_{1\leqslant n\leqslant 2Y}e\left(\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n\right)\\&\ll\sum_{1\leqslant n\leqslant 2Y}e\left(\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n\right)\\&\ll Y^{1+\varepsilon}\left(q^{-1}+Y^{-1}+qY^{-k}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}},\end{aligned}$$

由上式以及公式(31)，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_k(\alpha)\right|&\ll Y^{1+\varepsilon}\left(Q^{-1}+Y^{-1}+\tau Y^{-k}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}\\&\ll yx^{-1+\frac{1}{k}+\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}+\tau y^{-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}\\&\ll yx^{-1+\frac{1}{k}+\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}.\end{aligned} \tag{37}$$

由 Hölder 不等式，引理 3.2 以及公式(35)、(37)，我们有

$$I_2(x,y) \ll \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_k(\alpha)\right|\left(\int_0^1\left|f_2(\alpha)\right|^6 \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\left|f(-\alpha)\right|^2 \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}} \tag{38}$$
$$\ll y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2^{k-1}}}+y^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2^{k-1}}}x^{-2+\frac{1}{k}+\frac{k-1}{k\cdot 2^{k-1}}+2\varepsilon}.$$

结合公式(16)、(30)、(38)，我们有

$$S_k(x,y)=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right)$$
$$+O\left(y^3x^{-\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}+y^3x^{-\frac{11}{6}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{\frac{7}{6}-\frac{1}{k}}+y^2x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{2-\frac{1}{k}}+y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2^{k-1}}}\right),$$

且当 $x^{\frac{2^{k-2}}{2^{k-1}+k+1}+2^{k-1}\varepsilon} \ll Q \ll x^{\frac{2^{k-2}+1/2}{2^{k-1}+k+1}+(2k-1/2)\varepsilon}$，我们有

$$S_k(x,y)=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right).$$

4.2.3. $k \geq 6$ 时，定理 1.1 的证明

当 $k \geq 6$ 时，由引理 3.4 以及公式(32)，我们有

$$f_k(\alpha)=e\left(\alpha\mathcal{X}^k\right)\sum_{1\leqslant n\leqslant 2Y}e\left(\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n\right)$$
$$\ll \sum_{1\leqslant n\leqslant 2Y}e\left(\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n\right)$$
$$\ll Y^{1+\varepsilon}\left(q^{-1}+Y^{-1}+qY^{-k}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}},$$

由上式以及公式(31)，我们有

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_k(\alpha)\right| \ll Y^{1+\varepsilon}\left(Q^{-1}+Y^{-1}+\tau Y^{-k}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}}$$
$$\ll yx^{-1+\frac{1}{k}+\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}+\tau y^{-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}} \tag{39}$$
$$\ll yx^{-1+\frac{1}{k}+\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}}.$$

由 Hölder 不等式，引理 3.1 以及公式(35)、(39)，我们有

$$I_2(x,y) \ll \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}\left|f_k(\alpha)\right|\left(\int_0^1\left|f_2(\alpha)\right|^6 \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\left|f(-\alpha)\right|^2 \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}\left(Q^{-1}+y^{-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2k(k-1)}} \tag{40}$$
$$\ll y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2k(k-1)}}+y^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2k(k-1)}}x^{-2+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+2\varepsilon}.$$

结合公式(16)、(30)、(40)，我们有

$$
\begin{aligned}
S_k(x,y)={}&\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right)\\
&+O\left(y^3x^{-\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}+y^3x^{-\frac{11}{6}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{\frac{7}{6}-\frac{1}{k}}+y^2x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{k}+\varepsilon}Q^{2-\frac{1}{k}}+y^{\frac{7}{2}}x^{-2+\frac{1}{k}+2\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2k(k-1)}}\right),
\end{aligned}
$$

且当 $x^{\frac{2k-2}{k^2-3k+5}+2k(k-1)\varepsilon}\ll Q\ll x^{\frac{2k^2-6k+6}{(k-2)(k^2-3k+5)}+\frac{6k}{k-2}\varepsilon}$，我们有

$$
S_k(x,y)=\mathcal{K}_1\mathfrak{L}_1(x,y)+2(\gamma\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2)\mathfrak{L}_2(x,y)+O\left(y^4x^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{k}-\varepsilon}\right).
$$

结合以上三种情况的讨论，我们最终证明了定理 1.1。

参考文献

[1] Gafurov, N. (1985) On the Sum of the Number of Divisors of a Quadratic Form. *Dokl.akad.naukTadzhik.ssr*, **28**, 371-375.

[2] Gafurov, N. (1993) On the Number of Divisors of a Quadratic Form. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **200**,137-148.

[3] Yu, G. (2000) On the Number of Divisors of the Quadratic Form. *Canadian Mathematical Bulletin*, **43**, 239-256. https://doi.org/10.4153/CMB-2000-032-3

[4] Calderán, C. and de Velasco, M.J. (2000) On Divisors of a Quadratic Form. *Boletim Da Sociedade Brasileira De Matematica*, **31**, 81-91. https://doi.org/10.1007/BF01377596

[5] Guo, R.T. and Zhai, W.G. (2012) Some Problems about the Ternary Quadratic Form $m_1^2+m_2^2+m_3^2$. *Acta Arithmetica*, **156**, 101-121. https://doi.org/10.4064/aa156-2-1

[6] Heath-Brown, D.R. (1979) The Fourth Power Moment of the Riemann Zeta Function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **38**, 385-422. https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.385

[7] Zhao, L.L. (2014) The Sum of Divisors of a Quadratic Form. *Acta Arithmetica*, **163**, 161-177. https://doi.org/10.4064/aa163-2-6

[8] Hu, L.Q. and Yao, Y.J. (2015) Sums of Divisors of the Ternary Quadratic with Almost Equal Variables. *Journal of Number Theory*, **155**, 248-263. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.03.018

[9] Zhang, M. and Li, J.J. (2020) On the Sum of Divisors of Mixed Powers in Short Intervals. *The Ramanujan Journal*, **51**, 333-352. https://doi.org/10.1007/s11139-018-0064-1

[10] Hu, L.Q. (2014) An Asymptotic Formula Related to the Divisors of the Quaternary Quadratic Form. *Acta Arithmetica*, **166**, 129-140. https://doi.org/10.4064/aa166-2-2

[11] Hu, L.Q. and Liu, H.F. (2016) Sum of Divisors of a Quaternary Quadratic Form with Almost Equal Variables. *The Ramanujan Journal*, **40**, 557-571. https://doi.org/10.1007/s11139-015-9758-9

[12] Vaughan, R.C. (1997) The Hardy-Littlewood Method. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511470929

[13] Wooley, T.D. (2012) Vinogradov's Mean Value Theorem via Efficient Congruencing. *Annals of Mathematics*, **175**, 1575-1627. https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.3.12