Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1138-1144
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012135

点态化完备代数正规类中Amitsur-Kurosh根的映射刻画

杨宗文，娄本功

云南大学数学系，云南 昆明
Email: zwyang@ynu.edu.cn, bglou @ynu.edu.cn

收稿日期：2020年11月22日；录用日期：2020年12月7日；发布日期：2020年12月14日

摘 要

在点态化完备代数正规类中引入预根、拟根概念，证明了代数类中的幂等拟根与Amitsur-Kurosh根类可以相互确定，从而代数类中的幂等拟根P是Amitsur-Kurosh根类的基于映射刻画。

关键词

点态化完备代数正规类，预根，拟根，Amitsur-Kurosh根

The Characterization of Amitsur-Kurosh Radicals in Normal Classes of Pointwise Complete Algebras Based on Mapping

Zongwen Yang, Bengong Lou

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: zwyang@ynu.edu.cn, bglou @ynu.edu.cn

Received: Nov. 22nd, 2020; accepted: Dec. 7th, 2020; published: Dec. 14th, 2020

Abstract

In this paper, the concepts of preradical and quasiradical in the normal classes of pointwise complete algebras are defined. It is proved that the idempotent quasiradicals and Amitsur-Kurosh radicals in algebraic classes can be determined by each other. Thus, idemquasiradicals P in algebraic classes are the mapping based characterization of Amitsur-Kurosh radicals.

文章引用：杨宗文，娄本功．点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]．理论数学，2020，10(12): 1138-1144. DOI: 10.12677/pm.2020.1012135

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Preradicals, Quasiradicals, Amitsur-Kurosh Radicals

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了能在一般代数正规类中进一步统一地研究根，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根、正则根、κ-根和 β-根的结构性质。

本文在文献[24] [25] [26] [27]建立的点态化完备代数正规类概念基础上，给出了根类的一个映射刻画。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24] [25] [26] [27]。

定义 2.1 [12]： $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$，如果 R 满足：

a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $a \in \mathrm{R}$，则 $a/i \in \mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

b) $\forall a \in \mathscr{A}$，$a$ 有一个最大的 R-理想(记为 R(a))，称 a 的 R-根；

c) $\forall a \in \mathscr{A}$，有 $\mathrm{R}\left(a/\mathrm{R}(a)\right) = 0$。

则称 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，简称根。

以上的根类定义是 Amitsur-Kurosh 意义下的定义，是基于代数类的根性定义。根性质也可从另一方面来定义。下面我们从映射方面来对根性质进行刻画。

定义 2.2： $\mathscr{A}$ 是一个代数类，P 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个映射，$\forall a \in \mathscr{A}$，$\mathrm{P}(a) \lhd a$。下面是映射 P 相关的 4 个条件：

i) 对任意满同态：$f : a \to f(a)$，都有 $f\left(\mathrm{P}(a)\right) \le \mathrm{P}\left(f(a)\right)$；

ii) $\forall a \in \mathscr{A}$，$\mathrm{P}\left(a/\mathrm{P}(a)\right) = 0$；

iii) P 满足完备性：$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$\mathrm{P}(i) = i$，则 $i \le \mathrm{P}(a)$；

iv) P 满足幂等性：$\forall a \in \mathscr{A}$，则 $\mathrm{P}\left(\mathrm{P}(a)\right) = \mathrm{P}(a)$。

定义 2.3: $\mathscr{A}$ 是一个代数类，P 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个映射，$\forall a \in \mathscr{A}$，$\mathrm{P}(a) \lhd a$。

1) 如果 P 满足条件(i)，则称 P 是一个预根；

2) P 是一个预根，$a \in \mathscr{A}$，如果 $\mathrm{P}(a) = a$，则称 a 是一个 P-代数；$i \lhd a$，如果 i 是一个 P-代数，则称 i 是 a 的一个 P-理想；

3) P 是一个预根，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $i \le \mathrm{P}(a)$，有 i 是 a 的一个 P-理想，则称预根 P 是遗传的；

4) 如果 P 是一个预根并且满足条件(ii)，则称 P 是一个拟根。

引理 2.1： P 是 $\mathscr{A}$ 上一个预根，则 $\mathrm{P}(0) = 0$，从而理想 0 都是 P-理想。

证明 $\mathrm{P}(0) \lhd 0$，故 $\mathrm{P}(0) = 0$。证毕。

我们可以利用$\mathscr{A}$到$\mathscr{A}$的映射 P 给出根性质的一个刻画。

3. Amitsur-Kurosh 根性质的映射刻画

下面，对点态化完备代数类$\mathscr{A}$中预根、拟根性质进行研究，以建立 Amitsur-Kurosh 根性质的另一种刻画。

定理 3.1： P 是代数类$\mathscr{A}$中一个预根，则以下条件等价：

1) $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的 P-理想集，则$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$也是 P-理想；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的所有 P-理想集，则$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$也是 P-理想；

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i, j \lhd a$ 是 2 个 P-理想，则 $i \vee j$ 也是 P-理想；$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的 P-理想升链，则$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$也是 P-理想。

证明 1) $\Rightarrow$ 2)，1) $\Rightarrow$ 3)显然。

2) $\Rightarrow$ 1) 设$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的 P-理想集，考虑 $k=\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}\lhd a$，设$\{j_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$是 k 的所有 P-理想集，由(2)知$\vee\{j_\beta \mid \beta\in\Lambda\}$是 k 的 P-理想。又因为$\vee\{j_\beta \mid \beta\in\Lambda\} \ge \vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\} = k$，从而

$$k=\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}=\vee\{j_\beta \mid \beta\in\Lambda\},$$

即 k 是 P-代数，即 $k=\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$是 a 的 P-理想。

3) $\Rightarrow$ 1) 设$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的所有 P-理想集，由于 $0\in\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$非空，根据条件(3)，利用 Zorn 引理知$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$中存在一个极大元 m。如果有某个 $i_\alpha \not\le m$，则 $i_\alpha \vee m \ge m$ ($i_\alpha \ne m$)，由 2)知 $i_\alpha \vee m$ 也是 a 的 P-理想，与 m 是$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$中的极大元矛盾，因此$\forall\alpha$，有 $i_\alpha \le m$，即$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}\le m$，所以也是 P-理想$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}=m$。证毕。

定理 3.2： P 是$\mathscr{A}$上一个预根，则以下条件等价：

1) P 是完备的遗传预根；

2) 2.1 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的所有 P-理想集，则$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$也是 P-理想；

2.2 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\mathrm{P}(a)=\vee\{(x) \mid x\in S_a, \mathrm{P}((x))=(x)\}$；

3) 3.1 $\forall a \in \mathscr{A}$，$i, j \lhd a$ 是 2 个 P-理想，则 $i \vee j$ 也是 P-理想；

3.2 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的 P-理想升链，则$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$也是 P-理想；

3.3 $\forall a \in \mathscr{A}$，$x\in S_a$，$(x)$是 a 的 P-理想当且仅当 $x\in S_{\mathrm{P}(a)}$。

证明 1) $\Rightarrow$ 2) P 是完备的遗传预根。

$\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 a 的所有 P-理想集，由 P 的完备性得 $i_\alpha \le \mathrm{P}(a)$，$\alpha\in\Gamma$。所以

$$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}\le \mathrm{P}(a),$$

由 P 的遗传性得$\vee\{i_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$是 P-理想，即 2.1 成立；

$\forall a \in \mathscr{A}$，$\forall x\in S_a$，$\mathrm{P}((x))=(x)$，由 P 的完备性得$(x)\le \mathrm{P}(a)$，所以

$$k=\vee\{(x) \mid x\in S_a, \mathrm{P}((x))=(x)\}\le \mathrm{P}(a);$$

$\forall x\in S_{\mathrm{P}(a)}$，$(x)\le \mathrm{P}(a)$，由 P 的遗传性得$(x)$是 P-理想，所以$\forall x\in S_k$，进而有 $\mathrm{P}(a)\le k$，因此

$$\mathrm{P}(a)=k=\vee\{(x) \mid x\in S_a, \mathrm{P}((x))=(x)\},$$

即 2.2 成立。

综上 2)成立。

2) $\Rightarrow$ 1) 2.1，2.2 成立。

$\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，$i\le \mathrm{P}(a)$，$x\in S_i\subseteq S_{\mathrm{P}(a)}$，由 3.2 得 $\mathrm{P}((x))=(x)$，而 $i=\vee\{(x)\mid x\in S_i\}$，由 2.1 得 i 是 P-理想，即 P 是遗传的。

$\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，$\mathrm{P}(i)=i$。$\forall x\in S_i$，$(x)\le i=\mathrm{P}(i)$，由 P 的遗传性得 $\mathrm{P}(x)=(x)$，从而

$$(x)\le k=\vee\{(x)\mid x\in S_a,\mathrm{P}((x))=(x)\}\le \mathrm{P}(a),$$

故 $x\in S_{\mathrm{P}(a)}$，因此 $i\le \mathrm{P}(a)$，即 P 是完备的。

综上 1)成立。

2) $\Leftrightarrow$ 3) 由定理 3.1 知 2.1 与 3.1，3.2 等价，而 2.2 与 3.3 等价，因此 2)与 3)等价。

证毕。

定理 3.3： P 是 $\mathscr{A}$ 上一个预根，则以下条件等价：

1) P 是拟根；

2) $\forall$ 满同态：$f:a\to a/i$，$i\le \mathrm{P}(a)$，有 $f(\mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(f(a))$。

证明 1) $\Rightarrow$ 2) P 是拟根，$f:a\to a/i$ 是满同态，且 $i\le \mathrm{P}(a)$，由 P 是拟根有 $f(\mathrm{P}(a))\le \mathrm{P}(f(a))$，即 $\mathrm{P}(a)/i\le \mathrm{P}(a/i)$。

对代数 a/i，考虑满同态 $f:a/i\to (a/i)/(\mathrm{P}(a)/i)$，有

$$f(\mathrm{P}(a/i))=\mathrm{P}(a/i)/(\mathrm{P}(a)/i)\le \mathrm{P}(f(a/i))=\mathrm{P}((a/i)/(\mathrm{P}(a)/i)).$$

$$(a/i)/(\mathrm{P}(a)/i)\sim a/\mathrm{P}(a),\quad \mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a))=0,$$

故 $\mathrm{P}((a/i)/(\mathrm{P}(a)/i))=0$，$\mathrm{P}(a/i)\le \mathrm{P}(a)/i$，进而 $\mathrm{P}(a)/i=\mathrm{P}(a/i)$，即 $f(\mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(f(a))$，2) 成立。

2) $\Rightarrow$ 1)显然。证毕。

定理 3.4： P 是 $\mathscr{A}$ 上一个拟根。则 P 是完备的$\Leftrightarrow\forall a\in\mathscr{A}$，$a/\mathrm{P}(a)$没有非 0P-理想。

证明 “$\Rightarrow$”P 是拟根，$\forall a\in\mathscr{A}$，$k/\mathrm{P}(a)\lhd a/\mathrm{P}(a)$是 P-理想，其中 $\mathrm{P}(a)\le k\lhd a$。由 P 是完备的拟根得 $k/\mathrm{P}(a)\lhd \mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a))=0$，所以 $k/\mathrm{P}(a)=0$，即 $a/\mathrm{P}(a)$没有非 0P-理想。

“$\Leftarrow$” $\forall a\in\mathscr{A}$，$a/\mathrm{P}(a)$没有非 0P-理想，设 $i\lhd a$，$\mathrm{P}(i)=i$，则 $(i\vee \mathrm{P}(a))/\mathrm{P}(a)\sim i/(i\wedge \mathrm{P}(a))$。考虑 $f:a\to a/(i\wedge \mathrm{P}(a))$，则 $i\wedge \mathrm{P}(a)\le i$，由定理 3.3 知

$$i/(i\wedge \mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(i)/(i\wedge \mathrm{P}(a))=f(\mathrm{P}(i))=\mathrm{P}(f(i))=\mathrm{P}(i/(i\wedge \mathrm{P}(a))),$$

$$(i\vee \mathrm{P}(a))/\mathrm{P}(a)\sim i/(i\wedge \mathrm{P}(a)),$$

故 $(i\vee \mathrm{P}(a))/\mathrm{P}(a)$是 $a/\mathrm{P}(a)$的 P-理想，所以 $(i\vee \mathrm{P}(a))/\mathrm{P}(a)=0$，因此 $i\le \mathrm{P}(a)$，即 P 是完备的。证毕。

定理 3.5： P 是 $\mathscr{A}$ 上一个预根，则以下条件等价：

1) P 是遗传预根且 $\forall a\in\mathscr{A}$，$a/\mathrm{P}(a)$没有非 0P-理想；

2) P 是完备的遗传拟根；

3) $\forall a\in\mathscr{A}$，以下条件成立：

3.1 如果 $k\le i$ 是 a 的 2 个理想且 i/k 是 a/i 的 P-理想，k 是 a 的 P-理想，则 i 是 a 的 P-理想；

3.2 $\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 a 的 P-理想升链，则 $\vee\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 也是 P-理想；

3.3 $x\in S_a$，$(x)\le \mathrm{P}(a)$，则 $\mathrm{P}((x))=(x)$；

3.4 0 是 $a/\mathrm{P}(a)$唯一的 P-理想；

4) $\forall a\in\mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 a 的所有 P-理想集，则 $\vee\{i_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 也是 P-理想。且：

4.1 $\forall a\in\mathscr{A}$，$f:a\to a/i$，$i\lhd a$，$i\le \mathrm{P}(a)$，则 $f(\mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(f(a))$；

4.2 $\forall a\in\mathscr{A}$，$\mathrm{P}(a)=\vee\{(x)\mid x\in S_a,\mathrm{P}((x))=(x)\}$；

证明 1) $\Rightarrow$ 2) $\forall a \in \mathscr{A}$， $\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a)) \le \mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a))$，P 是遗传预根，从而 $\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a))$ 是 $a/\mathrm{P}(a)$ 的 P-理想。又因为 $a/\mathrm{P}(a)$ 没有非 0P-理想，因此 $\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a)) = 0$，从而 P 是遗传拟根。又因为 $\forall a \in \mathscr{A}$，$a/\mathrm{P}(a)$ 没有非 0 P-理想，由定理 3.4 知 P 是完备的，从而 2)成立。

2) $\Rightarrow$ 1) P 是完备的遗传拟根，由定理 3.4 知 $\forall a \in \mathscr{A}$， $a/\mathrm{P}(a)$ 没有非 0 P-理想，从而 1)成立。

2) $\Rightarrow$ 3) P 是完备的遗传拟根。

$\forall a \in \mathscr{A}$， $x \in S_a$， $(x) \le \mathrm{P}(a)$，P 是遗传拟根，故 $\mathrm{P}((x)) = (x)$，即 3.3 成立；

P 是完备的遗传拟根，由 1)与 2)等价，$a/\mathrm{P}(a)$ 没有非 0P-理想，而 $0 \le a/\mathrm{P}(a)$，由 P 是遗传拟根得 0 是 $a/\mathrm{P}(a)$ 的 P-理想，因此 0 是 $a/\mathrm{P}(a)$ 唯一的 P-理想，即 3.4 成立；

由定理 3.2 中 3.2 知 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 a 的 P-理想升链，则 $\vee\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 也是 P-理想，即 3.2 成立；

设 $k \le i$ 是 a 的 2 个理想且 i/k 是 a/i 的 P-理想，k 是 a 的 P-理想，由 P 的完备性知 $i \le \mathrm{P}(a)$，$i/k \le \mathrm{P}(a/i)$。由定理 3.3 中(2)得 $i/k \le \mathrm{P}(a/k) = \mathrm{P}(a)/k$，所以 $i \le \mathrm{P}(a)$，再由 P 的遗传性知，i 是 P-理想，即 3.1 成立。

综上，3)成立。

3) $\Rightarrow$ 4)条件 3)成立。$\forall a \in \mathscr{A}$， $i, j \lhd a$ 是 2 个 P-理想，

$$(i \vee j)/j \sim i/(i \wedge j) = \mathrm{P}(i)/(i \wedge j).$$

考虑满同态 $f : a \to a/(i \wedge j)$，则有

$$\mathrm{P}(i)/(i \wedge j) = f(\mathrm{P}(i)) \le \mathrm{P}(f(i)) = \mathrm{P}(i/(i \wedge j)) \lhd i/(i \wedge j),$$

从而 $\mathrm{P}(i/(i \wedge j)) = i/(i \wedge j)$，即 $i/(i \wedge j)$ 是 P-代数，进而 $(i \vee j)/j$ 是 a/j 的 P-理想，j 是 a 的 P-理想，由 3.1 成立得 $i \vee j$ 是 a 的 P-理想。再综合 3.2 成立，根据定理 3.1 知 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 a 的所有 P-理想集，则 $\vee\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 也是 P-理想。

$\forall a \in \mathscr{A}$，$f : a \to a/i$，$i \lhd a$，$i \le \mathrm{P}(a)$，$\mathrm{P}(a) = \vee\{(x) \mid x \in S_a\}$。由 3.3 成立，$\forall x \in S_a$，$(x) \le \mathrm{P}(a)$，有 $\mathrm{P}((x)) = (x)$，从而 $\mathrm{P}(a) = \vee\{(x) \mid x \in S_a, \mathrm{P}((x)) = (x)\}$，即 4.2 成立。根据定理 3.2，P 是完备的遗传预根，由 3.4 成立，知 $\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a)) = 0$，从而 P 是拟根。再根据定理 3.3 知 $f(\mathrm{P}(a)) = \mathrm{P}(f(a))$，即 4.1 成立。

综上，(4)成立。

4)$\Rightarrow$ 2) 由 $\forall a \in \mathscr{A}$，$\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 a 的所有 P-理想集，则 $\vee\{i_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 也是 P-理想及 4.2 成立，根据定理 3.2 知，P 是完备的遗传预根。由 4.1 成立再根据定理 3.3 知 P 是完备的遗传拟根，即 2)成立。

证毕。

定理 3.6： $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathscr{A}$ 中一个 Amitsur-Kurosh 根 R 可确定一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个满足条件 i)~iv)的映射 P。

证明 R 是一个 Amitsur-Kurosh 根，设 $\mathrm{P} : a \to \mathrm{R}(a)$，即 $\mathrm{P} : \mathrm{P}(a) = \mathrm{R}(a) \lhd a$，则 P 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个映射，$\forall a \in \mathscr{A}$， $\mathrm{P}(a) \lhd a$。

对任意满同态： $f : a \to a/i$，

$$f(\mathrm{P}(a)) = f(\mathrm{R}(a)) = (\mathrm{R}(a) \vee i)/i \sim \mathrm{R}(a)/(i \wedge \mathrm{R}(a)) \in \mathrm{R},$$

所以 $f(\mathrm{P}(a)) \le \mathrm{R}(a/i) = \mathrm{P}(f(a))$，即映射 P 满足条件(i)；

$\forall a \in \mathscr{A}$， $\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a)) = \mathrm{R}(a/\mathrm{P}(a)) = \mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a)) = 0$，即映射 P 满足条件(ii)；

$\forall a \in \mathscr{A}$， $i \lhd a$， $\mathrm{P}(i) = i$，即 $\mathrm{R}(i) = i$，则 $i \le \mathrm{R}(a) = \mathrm{P}(a)$，即 P 满足完备性条件(iii)；

$\forall a \in \mathscr{A}$，则 $\mathrm{P}(\mathrm{P}(a)) = \mathrm{P}(\mathrm{R}(a)) = \mathrm{R}(\mathrm{R}(a)) = \mathrm{R}(a) = \mathrm{P}(a)$，即 P 满足幂等性条件(iv)。

证毕。

定理 3.7： $\mathscr{A}$ 是一个代数类，P 是一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个满足条件 i)~iv)的映射， $\mathrm{R} = \{a \mid \mathrm{P}(a) = a\}$，

则 R 是一个 Amitsur-Kurosh 根类。

证明 $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $a\in\mathrm{R}$，$\mathrm{P}(a)=a$，$f:a\to a/i$ 是一个同态，则

$$a/i=f(a)=f(\mathrm{P}(a))\le\mathrm{P}(f(a))=\mathrm{P}(a/i),$$

从而 $\mathrm{P}(a/i)=a/i$，即 $a/i\in\mathrm{R}$，(a)成立；

$\forall a\in\mathscr{A}$，考虑

$$\mathrm{R}(a)=\vee\{i\lhd a\mid i\in\mathrm{R}\}=\vee\{i\lhd a\mid\mathrm{P}(i)=i\}\lhd a.$$

$\forall i\lhd a$，$\mathrm{P}(i)=i$，则 $i\le\mathrm{R}(a)$，且 $i\lhd\mathrm{R}(a)$，从而由(iii)有 $i\le\mathrm{P}(\mathrm{R}(a))$。因此 $\mathrm{R}(a)\le\mathrm{P}(\mathrm{R}(a))$，所以 $\mathrm{P}(\mathrm{R}(a))=\mathrm{R}(a)$，故 $\mathrm{R}(a)\in\mathrm{R}$，即 R($a$)是 a 的一个最大 R-理想，(b)成立；

$\forall a\in\mathscr{A}$，R(a)是 a 的一个最大 R-理想，有 $\mathrm{P}(\mathrm{R}(a))=\mathrm{R}(a)$，由(iii)有 $\mathrm{R}(a)\le\mathrm{P}(a)$。由(iv)有 $\mathrm{P}(\mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(a)$，从而 $\mathrm{P}(a)\in\mathrm{R}$，所以 $\mathrm{P}(a)\le\mathrm{R}(a)$，故 $\forall a\in\mathscr{A}$，有 $\mathrm{R}(a)=\mathrm{P}(a)$。由(ii)有

$$\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a))=\mathrm{R}(a/\mathrm{P}(a))=\mathrm{P}(a/\mathrm{P}(a))=0,$$

即(c)成立。

综上，R 是一个 Amitsur-Kurosh 根类。证毕。

定理 3.6、定理 3.7 说明一个 Amitsur-Kurosh 根类可以确定一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个满足条件 i)~iv)的映射 P，即一个 Amitsur-Kurosh 根类可以确定一个 $\mathscr{A}$ 上的幂等拟根；反之，一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个满足条件 i)~iv)的映射 P 可以确定一个 Amitsur-Kurosh 根类，即一个 $\mathscr{A}$ 上的幂等拟根可以确定一个 Amitsur-Kurosh 根类。总之，$\mathscr{A}$ 上的幂等拟根 P 是 Amitsur-Kurosh 根类的基于映射刻画。

4. 小结

本文在点态化完备代数正规类中引入预根、拟根概念，证明了 $\mathscr{A}$ 上的幂等拟根与 Amitsur-Kurosh 根类可以相互确定，从而 $\mathscr{A}$ 上的幂等拟根 P 是 Amitsur-Kurosh 根类的基于映射刻画。

基金项目

国家自然科学基金(11861076)；云南省自然科学基金(2019FB139)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley &Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, INC, New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037 https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7254

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens Radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] 蔡传仁. 对偶根和 F. A. SZÁSZ 的问题 21 [J]. 数学学报: 中文版, 1989, 32(3): 394-400.

[6] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-13.

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君. 关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-23.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30242-4

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-193.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-903.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554. https://doi.org/10.12677/PM.2018.85072

[25] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-723. https://doi.org/10.12677/PM.2018.86096

[26] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842. https://doi.org/10.12677/PM.2019.97109

[27] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014. https://doi.org/10.12677/PM.2019.99127