Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1229-1239
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012146

Hans汉斯

抛物型Baouendi-Grushin Laplace方程解的Schauder估计

元 琛，黄小涛

南京航空航天大学，江苏 南京
Email: chenyuan_152@163.com

收稿日期：2020年11月25日；录用日期：2020年12月23日；发布日期：2020年12月31日

摘 要

本文研究了一类退化抛物Baouendi-Grushin Laplace方程。通过构造与Baouemdi-Grushin向量场相对应的抛物Carnot-Carathéodory度量，利用嵌入定理和紧方法来证明方程解的Schauder估计。

关键词

退化抛物方程，Baouendi-Grushin算子，Schauder估计

Schauder Estimates for Parabolic Baouendi-Grushin Laplace Equations

Chen Yuan, Xiaotao Huang

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: chenyuan_152@163.com

Received: Nov. 25th, 2020; accepted: Dec. 23rd, 2020; published: Dec. 31st, 2020

Abstract

In this paper, we investigate a class of degenerate parabolic Baouendi-Grushin Laplace equations. By introducing the parabolic Carnot-Caratheodory metric which is associated with the geometry of the Baouendi-Grushin vector fields, we use imbedding theorem and compactness method to prove the Schauder estimates for the solutions of parabolic Baouendi-Grushin Laplace equations.

文章引用：元琛，黄小涛．抛物型 Baouendi-Grushin Laplace 方程解的 Schauder 估计[J]．理论数学，2020，10(12): 1229-1239. DOI: 10.12677/pm.2020.1012146

Keywords

Degenerate Parabolic Equations, Baouendi-Grushin Operator, Schauder Estimates

1. 引言

定义 $x \in R^n$， $y \in R^m$ 和 $\gamma > 0$。Baouendi-Grushin (B-G)向量场[1]定义

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, n,\ \ X_j = |x|^\gamma \frac{\partial}{\partial y_j}, \gamma > 0, j = 1, \cdots, m,$$

相应的 B-G 梯度可定义为

$$\nabla_\gamma = \left(\nabla_x, |x|^\gamma \nabla_y\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, |x|^\gamma \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, |x|^\gamma \frac{\partial}{\partial y_m}\right).$$

则 B-G 型拉普拉斯算子可定义为

$$\Delta_\gamma u = \left(\nabla_\gamma \cdot \nabla_\gamma\right) u = \Delta_x u + |x|^{2\gamma} \Delta_y u,$$

其中 Δx 和 Δy 分别代表 R^n 、 R^m 空间上的拉普拉斯算子。

当 $\gamma = 1$ 时，Jerison 和 Lee [2]研究了 B-G 拉普拉斯方程

$$\Delta_1 u = \Delta_x u + |x|^2 \Delta_y u = f(x, y). \tag{1}$$

此方程与 Cauchy-Riemann Yamabe 问题有密切关系。

当 γ 为正整数时，向量场 X_i 和 X_j 满足 Hörmander 条件[3]，由此可以得到方程的 H^ε 正则性估计。

当 γ 是任意的正数时，Franchi 通过研究与 B-G 向量场相关的加权 Sobolev-Poincare 不等式，证明了 Harnack 不等式和方程解的 C^α 估计(参见文献[4] [5] [6])。王[7]通过构造与 B-G 向量场相对应的椭圆 Carnot-Carathéodory (C-C)度量，给出了方程解的 Hölder 正则性估计。宋、王等人[8]建立了方程解的梯度的 L^p 估计。R. Monti 和 D. Morbidelli 研究了半线性的椭圆 Baouendi-Grushin 方程[9]，并利用 kelvin 变换给出了方程正解的球对称结果。

近年来，退化抛物 B-G 方程引起了众多学者的广泛关注(参见文献[3] [10])。

对于抛物型 B-G 方程，假设 $\Omega \subset R^n \times R^m$ 是一个有界开区域，抛物区域为 $\Omega_* = \Omega \times (0, T]$，那么抛物边界为 $\partial\Omega_* = \left(\partial\Omega \times (0, T]\right) \cup \left(\Omega \times \{t = 0\}\right)$。本文将研究下述抛物 B-G 拉普拉斯方程

$$Lu(x, y, t) := u_t - \Delta_\gamma u = \sum_{i=1}^n f_{x_i} + \sum_{j=1}^m |x|^\gamma f_{y_j}, x \in \Omega_*. \tag{2}$$

在区域 $\{(x, y, t) \in \Omega_* : x = 0\}$ 附近，此方程为退化抛物方程；如果远离 $\{x = 0\}$ 区域，则方程没有退化性。我们将分别研究在 $\{x = 0\}$ 附近区域和远离 $\{x = 0\}$ 的解的正则性，并给出方程解的一致性估计。

本文研究的主要结论如下：

定理 1： 设 u 为方程(2)的弱解，任意的正数 α 满足 $0 < \alpha < 1$，存在一个正常数 C，若 $f \in C_*^{\alpha, \frac{\alpha}{1+\gamma}, \frac{\alpha}{2}}(Q_1)$，那么存在多项式

$$p(x,y,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+Bx+Cy+Dt+E+Fy^2+Gxy, \tag{*}$$

使得

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r}\left|u-p_{(x_0,y_0,t_0)}\right|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le Cr^{2(2+\alpha)}.$$

其中 $0<r<1$，常数 C 与 $[f]_{C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)}$ 和 $\|u\|_{L^2(Q_1)}$ 有关。

说明：由下述引理 2 的证明过程可知，多项式 $p(x,y,t)$ 的形式与指标 α，γ 有关。

情况分类如下：若

1、$0<\gamma<\frac{1}{2}$，$\alpha>2\gamma$，多项式 $p(x,y,t)$ 的形式如(*)所示，

2、$0<\gamma<\frac{1}{2}$，$\gamma<\alpha<2\gamma$，多项式 $p(x,y,t)$ 系数 $F=0$，

3、$0<\gamma<\frac{1}{2}$，$\alpha<\gamma$，多项式 $p(x,y,t)$ 系数 $G=0$，

4、$\frac{1}{2}<\gamma<1$，$\alpha>\gamma$，多项式 $p(x,y,t)$ 系数 $F=0$，

5、$\frac{1}{2}<\gamma<1$，$\alpha<\gamma$，多项式 $p(x,y,t)$ 系数 $F=0$ 且 $G=0$。

定理结论类似可得。

在第二节，我们给出与 B-G 向量场相关的抛物 Carnot-Carathéodory (C-C)度量，在第三节给出方程解的 Schauder 估计的证明。

2. 预备知识

本节我们给出弱解的定义和一些重要的引理。

2.1. 内在度量

首先为了能对 B-G 向量场进行分析，我们引入 C-C 度量。

对任意的 $Z_1=(x_1,y_1,t_1),Z_2=(x_2,y_2,t_2)\in R^n\times R^m\times[0,+\infty)$，定义与 B-G 向量场相对应的抛物 C-C 度量为 $d_1s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\frac{\mathrm{d}y^2}{|x|^{2\gamma}}$，相对应的距离为 $d_\gamma(Z_1,Z_2)=|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x_1-x_2|+\frac{2|y_1-y_2|}{|x_1|^\gamma+|x_2|^\gamma}$。

当 $|x|,|y|\sim 1$ 时，抛物 C-C 距离可看成经典的抛物距离

$$d_\gamma(Z_1,Z_2)\sim d(Z_1,Z_2)=|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

令 $Z=(x,y,t)$，$rZ=(rx,r^{1+\gamma}y,r^2t)$，在抛物 C-C 度量下，算子 L 满足性质

$$L\left(u\left(rx,r^{1+\gamma}y,r^2t\right)\right)=r^2(Lu)\left(rx,r^{1+\gamma}y,r^2t\right). \tag{3}$$

记 $S_r(z_0)=\left\{(x,y):\left|x^i-x_0{}^i\right|<r,\left|y^j-y_0{}^j\right|<r^{1+\gamma}\right\}$，$(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$，

$Q_r(Z_0)=\left\{(x,y,t):(x,y)\in S_r(z_0),-r^2<t-t_0<r^2\right\}$，为方便书写，记 $S_r=S_r(0)$，$Q_r=Q_r(0)$。

2.2. Sobolev 空间

设 Ω_* 为有界抛物区域。定义 Sobolev 空间 $W_\gamma^{1,2}(\Omega_*)$ 为

$$W_\gamma^{1,2}(\Omega_*) := \left\{u \in L^2(\Omega_*), \nabla_\gamma u \in L^2(\Omega_*)\right\},$$

其范数定义为

$$\|u\|_{W_\gamma^{1,2}(\Omega_*)} := \left\{\int_{\Omega_*}|u|^2 + \int_{\Omega_*}|\nabla_\gamma u|^2\right\}^{1/2}.$$

通篇我们令 $Q = n + (1+\gamma)m + 2$。若 $2 < q < \frac{2Q}{Q-2}$，那么有嵌入定理

$$W_\gamma^{1,2}(\Omega_*) \hookrightarrow L^q(\Omega_*),$$

且在有界区域上此嵌入为紧嵌入(见[11])。

方程(2)的弱解可定义如下：

定义 2.1：如果 $u \in W_\gamma^{1,2}(\Omega_*)$ 且对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_*)$ 满足

$$\int_{\Omega_*} u\varphi_t \mathrm{d}z\mathrm{d}t - \int_{\Omega_*} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma \varphi = \int_{\Omega_*} f\, \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}t, \tag{4}$$

那么称 u 是方程(2)的弱解。

2.3. $C^{m,\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}$ 的等价定义

在 C-C 度量下，对任意的 $Z_0 = (x_0, y_0, t_0) \in Q_1$，$0 < a < 1$，如果存在一个 m 阶多项式 P 满足

$$P_{(x_0,y_0,t_0)}(x,y,t) = \sum_{i+(1+\gamma)j+2k\le m} a_{ijk}(x-x_0)^i (y-y_0)^{(1+\gamma)j}(t-t_0)^{2k},$$

并且

$$\left|u(x,y,t) - P(x,y,t)\right| \le Cd\left((x,y,t),(x_0,y_0,t_0)\right)^{m+\alpha}, (x,y,t) \in Q_1,$$

那么 $u \in C_*^{m,\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}$。

当 $m = 0$ 时，如果函数 $f \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)$，其半范数定义[12]]\为

$$[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)} = \sup_{0<\rho\le 1}\frac{1}{\rho^\alpha}\sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho}\left|f(x,y,t) - f(0,0,0)\right|^2} < \infty.$$

在 Hölder 空间中，还有一种等价形式的半范数[13]，即

$$[f]_{C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)} = \sup_{Z_1,Z_2\in\bar{Q}_1}\frac{\left|f(Z_1) - f(Z_2)\right|}{d_\gamma(Z_1,Z_2)^\alpha},$$

此时，其全范数为

$$\|f\|_{C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)} = \|f\|_{L^\infty(Q_1)} + [f]_{C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)}.$$

3. 正则性估计

本节我们证明方程(2)解的 Schauder 估计。证明的主要思路[14]是：首先利用 C-C 度量的性质(3)和紧方法，来研究在区域 $\{x=0\}$ 附近的正则性，然后利用一致抛物方程的正则性结论得到方程解在远离 $\{x=0\}$ 区域时的 Schauder 估计。

3.1. $\{(x,y,t)\in Q_1 : x=0\}$ 区域附近的估计

不妨假设 u 满足方程

$$u_t - \Delta_\gamma u = f(x,y,t),$$

令 $v(x,y,t) = u(rx, r^{1+\gamma} y, r^2 t)$，由 C-C 度量可知，在 $\{x=0\}$ 附近满足方程

$$v_t - \Delta_\gamma v = r^2 f(rx, r^{1+\gamma} y, r^2 t).$$

这是我们研究方程解在 $\{(x,y,t)\in Q_1 : x=0\}$ 区域附近正则性的基础。

定理 2： 设 $u \in W_\gamma^{1,2}$ 为方程(2)的弱解，对任意的 $0<\alpha<1$，存在一个正常数 C_1，若 $f \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)$，那么存在一个多项式

$$p(x,y,t) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Ax + Bx + Cy + Dt + E + Fy^2 + Gxy$$

满足 $p_t - \Delta_\gamma p = f(0,0,0)$，且

$$\frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho} \left|u - p_{(0,0,0)}\right|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le C_1 \rho^{2(2+\alpha)}. \tag{5}$$

其中 $0<\rho\le 1$，常数 C_1 与 $[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_\rho)}$ 以及 $\|u\|_{L^2(Q_\rho)}$ 有关。

在证明定理前，我们先给出所需用到的两个引理。

引理 1： 设 u 为方程(2)的弱解，对任意的正数 ε，存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,1)$，当 u 满足

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1 \tag{6}$$

且

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} f^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \delta^2, \tag{7}$$

则存在一个函数 h 满足

$$h_t - \Delta_\gamma h = 0,\ Z \in Q_1, \tag{8}$$

使得

$$\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \varepsilon^2. \tag{9}$$

证明： 反证法，假设存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 $\delta = 1/n$，存在 u_n， f_n 满足

$$\int_{Q_2} u_n \varphi_t \mathrm{d}z\mathrm{d}t - \int_{Q_2} \nabla_\gamma u_n \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}t = \int_{Q_2} \nabla_\gamma \varphi \cdot f_n \mathrm{d}z\mathrm{d}t, \tag{10}$$

且

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u_n|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1,\ \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |f_n|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \frac{1}{n^2}, \tag{11}$$

但是

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |u_n - h|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \ge \varepsilon_0. \tag{12}$$

由于 $W_\gamma^{1,2}(Q_2)$ 紧嵌入 $L^2(Q_2)$ 及有界性条件 $\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u_n|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1$，则存在一个子序列，不妨仍记为

$\{u_n\}$ 使得 u_n 在 $L^2(Q_2)$ 中强收敛于 u_∞， $\nabla_\gamma u_n$ 在 $L^2(Q_2)$ 中弱收敛于 $\nabla_\gamma u_\infty$
令 $n\to\infty$，由(10)和(11)可得

$$\int_{Q_2} u_\infty \varphi_t \mathrm{d}z\mathrm{d}t - \int_{Q_2} \nabla_\gamma u_\infty \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0,$$

这说明了 u_∞ 和 h 都是方程(8)的弱解。这与(12)式矛盾，证毕。

引理 2： 设 u 是方程(2)的弱解，对任意的 $0<\alpha<1$，存在一个常数 C_0， $0<\lambda<\frac{1}{2}$， $0<\delta<1$，当 u，f 分别满足

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1 \text{ 和 } \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} f^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \delta^2,$$

则存在一个多项式

$$p(x,y,t) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + Bx + Cy + Dt + E + Fy^2 + Gxy$$

满足 $p_t - \Delta_\gamma p = 0$ 且

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |u-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

其中

$$|A|+|B|+|C|+|D|+|E|+|F|+|G| \le C_0.$$

证明： 由引理 1 知，给定一个 $\varepsilon\in(0,1)$，那么

$$\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |u-h|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \varepsilon^2. \tag{13}$$

我们把 $h(x,y,t)$ 在 $(0,0,0)$ 处展开，同时取

$$\begin{aligned} p(x,y,t) &= \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + Bx + Cy + Dt + E + y^2 + xy \\ &= \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}D_x^2 h(0,0,0)x + xD_x h(0,0,0) + yD_y h(0,0,0) + tD_t h(0,0,0) \\ &\quad + h(0,0,0) + \frac{1}{2}y^2 D_y^2 h(0,0,0) + \frac{1}{2}xyD_x D_y h(0,0,0) \end{aligned}$$

那么 $p_t - \Delta_\gamma p = 0$ 。由多元高阶 *Taylor* 公式可得

$$|h(x,y,t) - p(x,y,t)| \le C\lambda^3,$$

其中 $Z=(x,y,t)\in Q_\lambda$， $0<\lambda<\frac{1}{2}$，

所以，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |u-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\ &\le \frac{2}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |u-h|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |h-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \frac{2}{|Q_\lambda|}\int_{Q_1} |u-h|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |h-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\ &\le \frac{2|Q_1|}{|Q_\lambda|}\frac{1}{Q_1}\int_{Q_1} |u-h|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |h-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \frac{2\varepsilon^2}{\lambda^m \cdot \lambda^{n(1+\gamma)} \cdot \lambda^2} + C\lambda^6 \end{aligned} \tag{14}$$

取 λ 足够小，使(14)第二项满足

$$C\lambda^{6} \le \frac{1}{2}\lambda^{2(2+\alpha)},$$

取 ε 足够小，使(14)第一项满足

$$\frac{2\varepsilon^{2}}{\lambda^{m}\cdot\lambda^{n(1+\gamma)}\cdot\lambda^{2}} \le \frac{1}{2}\lambda^{2(2+\alpha)}.$$

因此

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda}|u-p|^{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

证毕。

定理 2 的证明：不妨假设 $f(0,0,0)=0$，否则可以令

$$v(x,y,t)=u(x,y,t)-\frac{f(0,0,0)}{2n}|x|^{2},$$

那么

$$\begin{aligned} v_t-\Delta_\gamma v &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}+\sum_{j=1}^{m}|x|^{\gamma} f_{y_j}-f(0,0,0)-|x|^{2\gamma} f(0,0,0) \\ &=: f(x,y,t)-f(0,0,0), \end{aligned}$$

显然对 v 的估计可以转化成对 u 的估计。

另外，假设

$$[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)}<\delta, \tag{15}$$

$$\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\nabla_\gamma u^{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1. \tag{16}$$

否则，取

$$\tilde{u}=\frac{\delta u}{\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}u^{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}t+[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)}}},\quad \tilde{f}=\frac{\delta f}{\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}u^{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}t+[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)}}}$$

那么，计算容易得到 $\tilde{u}$， $\tilde{f}$ 满足

$$\tilde{u}_t-\Delta_\gamma\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_{x_i}+|x|^{\gamma}\sum_{j=1}^{m}\tilde{f}_{y_j}=:\tilde{f}(x,y,t),$$

且由 δ 充分小可得

$$[\tilde{f}]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)}<\delta,\quad \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\tilde{u}^{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le 1。$$

然后通过计算对 $\tilde{u}$ 的估计来得到对 u 的估计。

下面用归纳法证明：存在多项式

$$p_k(x,y,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_k x+B_k x+C_k y+D_k t+E_k+F_k y^{2}+G_k xy \tag{17}$$

满足 $(p_k)_t - \Delta_\gamma p_k = 0$，使得

$$\frac{1}{|Q_{\lambda^k}|}\int_{Q_{\lambda^k}} |u-p_k|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \lambda^{2k(2+\alpha)},\quad |x|\le \lambda^k,\quad |y|\le \lambda^{k(1+\gamma)},\quad |t|\le \lambda^{2k}, \tag{18}$$

并且系数满足

$$|A_{k+1}-A_k|\le C\lambda^{\alpha k},\quad |B_{k+1}-B_k|\le C\lambda^{k(1+\alpha)},\quad |C_{k+1}-C_k|\le C\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)}, \tag{19}$$

$$|D_{k+1}-D_k|\le C\lambda^{\alpha k},\quad |E_{k+1}-E_k|\le C\lambda^{k(2+\alpha)},\quad |F_{k+1}-F_k|\le C\lambda^{k(\alpha-2\gamma)}, \tag{20}$$

$$|G_{k+1}-G_k|\le C\lambda^{k(\alpha-\gamma)}. \tag{21}$$

1) 当 $k=0$ 时。取 $p_0(x,y,t)=0$，那么

$$\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} u^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \le 1$$

结果显然成立。

2) 当 $k=1$ 时。取 $p_1(x,y,t)=p(x,y,t)$，这里的 $p(x,y,t)$ 满足引理 2 的条件。那么

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda} |u-p|^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}$$

结果亦成立。

3) 假设 $k=k$ 时成立。令

$$\omega(x,y,t)=\frac{u\left(\lambda^k x,\lambda^{k(1+\gamma)}y,\lambda^{2k}t\right)-p_k\left(\lambda^k x,\lambda^{k(1+\gamma)}y,\lambda^{2k}t\right)}{\lambda^{k(2+\alpha)}}$$

那么计算得

$$\omega_t-\Delta_\gamma\omega=\frac{f\left(\lambda^k x,\lambda^{k(1+\gamma)}y,\lambda^{2k}t\right)}{\lambda^{\alpha k}},\quad \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\omega^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le 1,$$

且

$$\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\frac{\left|f\left(\lambda^k x,\lambda^{k(1+\gamma)}y,\lambda^{2k}t\right)\right|^2}{\lambda^{2k\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le [f]^2_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(0,0,0,Q_1)}\le\delta^2.$$

由引理 2 知：存在一个二次多项式 p_k 满足 $p_t-\Delta_\gamma p=0$ 且

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\int_{Q_\lambda}|\omega-p|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le\lambda^{2(2+\alpha)}$$

即

$$\frac{1}{|Q_{\lambda^{k+1}}|}\int_{Q_{\lambda^{k+1}}}\left|u(x,y,t)-p_k(x,y,t)-\lambda^{k(2+\alpha)}p\left(\frac{x}{\lambda^k},\frac{y}{\lambda^{k(1+\gamma)}},\frac{t}{\lambda^{2k}}\right)\right|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\le\lambda^{2(k+1)(2+\alpha)}.$$

取

$$p_{k+1}(x,y,t)=p_k(x,y,t)+\lambda^{k(2+\alpha)}p\left(\frac{x}{\lambda^k},\frac{y}{\lambda^{k(1+\gamma)}},\frac{t}{\lambda^{2k}}\right) \tag{22}$$

故对 $k+1$ 的情况也成立。再由(22)式可得结论(17)~(21)亦成立。

下面证明当 $k\to\infty$ 时，A_k，B_k，C_k，D_k，E_k，F_k，G_k 收敛于 A，B，C，D，E，F，G，且

$$p_k(x,y,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_kx+B_kx+C_ky+D_kt+E_k+F_ky^2+G_kxy$$

满足

$$|p_k-p|\le C\lambda^{k(2+\alpha)},\quad |x|\le\lambda^k,\quad |y|\le\lambda^{k(1+\gamma)},\quad |t|\le\lambda^{2k},\tag{23}$$

因为 $|A_{k+1}-A_k|\le C\lambda^{\alpha k}$，所以

$$\begin{aligned}|A_{k+m}-A_k|&\le|A_{k+m}-A_{k+m-1}|+\cdots+|A_{k+1}-A_k|\le C\lambda^{\alpha(k+m-1)}+\cdots+C\lambda^{k\alpha}\\&\le C\lambda^{\alpha(k-1)}\left(\lambda^{\alpha m}+\cdots+\lambda^{\alpha}\right)\le\frac{C}{1-\lambda^{\alpha}}\lambda^{\alpha k}.\end{aligned}$$

由 *Cauchy* 收敛定理知，$\{A_k\}$ 收敛，且 $|A_k-A|\le C\lambda^{\alpha k}$。

同理可得 $\{B_k\}$，$\{C_k\}$，$\{D_k\}$，$\{E_k\}$，$\{F_k\}$，$\{G_k\}$ 收敛，并且

$$|B_k-B|\le C\lambda^{k(1+\alpha)},\quad |C_k-C|\le C\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)},\quad |D_k-D|\le C\lambda^{\alpha k},$$

$$|E_k-E|\le C\lambda^{k(2+\alpha)},\quad |F_k-F|\le C\lambda^{k(\alpha-2\gamma)},\quad |G_k-G|\le C\lambda^{k(\alpha-\gamma)}.$$

因此，对任意的 $|x|\le\lambda^k$，$|y|\le\lambda^{k(1+\gamma)}$，$|t|\le\lambda^{2k}$，有

$$\begin{aligned}|p_k-p|&\le C\Big(\lambda^{\alpha k}|x|^2+\lambda^{k(1+\alpha)}|x|+\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)}|y|+\lambda^{\alpha k}|t|\\&\quad+\lambda^{k(2+\alpha)}+\lambda^{k(\alpha-2\gamma)}|y|^2+\lambda^{k(\alpha-\gamma)}|x||y|\Big)\\&\le C\lambda^{k(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

最后，对任意的 $\rho\in(0,1]$，一定存在非负整数 k，使得 $\lambda^{k+1}\le\rho\le\lambda^k$。因此，由(18)和(23)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho}|u-p|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t&\le\frac{2\int_{Q_\rho}|u-p_k|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_\rho|}+\frac{2\int_{Q_\rho}|p_k-p|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_\rho|}\\&\le\frac{2\int_{Q_{\lambda^k}}|u-p_k|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^{k+1}}|}+\frac{2\int_{Q_{\lambda^k}}|p_k-p|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^{k+1}}|}\\&\le\frac{1}{\lambda^m\cdot\lambda^{n(1+\gamma)}\cdot\lambda^2}\cdot\frac{2\int_{Q_{\lambda^k}}|u-p_k|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^k}|}+\frac{2\int_{Q_{\lambda^k}}|p_k-p|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^k}|}\\&\le\frac{2+2C}{\lambda^{m+n(1+\gamma)+2(2+\alpha)}}\cdot\lambda^{2(2+\alpha)(k+1)}\le C_1\rho^{2(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

结论得证。

3.2. 远离 $\{(x,y,t)\in Q_1:x=0\}$ 区域估计

上节得到了在区域 $\{(x,y,t)\in Q_1:x=0\}$ 附近的估计。接下来研究在 $Q_1\subset\Omega_*$ 内任意一点的估计。

定理 3： 假设 $|x_0|\ne0$。设 u 为方程(2)的弱解，任意的正数 α 满足 $0<\alpha<1$，存在一个正常数 C，若 $f\in C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)$，那么存在多项式

$$p(x,y,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+Bx+Cy+Dt+E+Fy^2+Gxy,$$

使得

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r}\left|u-p_{(x_0,y_0,t_0)}\right|^2\mathrm{dzd}t\le Cr^{2(2+\alpha)}.$$

其中 $0<r<1$，常数 C 与 $[f]_{C_*^{\alpha,\frac{\alpha}{1+\gamma},\frac{\alpha}{2}}(Q_1)}$ 和 $\|u\|_{L^2(Q_1)}$ 有关。

证明： 令 $Z_0=(x_0,y_0,t_0)\in Q_1$。由假设 $|x_0|\ne 0$ 及定理 2 知，存在一个多项式 $p_{(0,0,0)}(x,y,t)$，使得

$$\frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho}\left|u-p_{(0,0,0)}\right|^2\mathrm{dzd}t\le C\rho^{2(2+\alpha)}.$$

取 $\rho=2|x_0|$，有

$$\frac{1}{\left|Q_{2|x_0|}\right|}\int_{Q_{2|x_0|}}\left|u-p_{(0,0,0)}\right|^2\mathrm{dzd}t\le C|x_0|^{2(2+\alpha)}.$$

令

$$v(x,y,t)=\frac{\left(u-p_{(0,0,0)}\right)\left(|x_0|x,|x_0|^{1+\gamma}y,|x_0|^2t\right)}{|x_0|^{2+\alpha}},\tag{24}$$

那么

$$v_t-\Delta_\gamma v=\frac{f\left(|x_0|x,|x_0|^{1+\gamma}y,|x_0|^2t\right)}{|x_0|^{\alpha}}.$$

算子 L 在区域 $\bar{Q}=\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 内是一致抛物的，且当 $|x|,|y|\sim 1$ 时，$d_1s^2\sim\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2$，这表明我们可以在 Minkowski 度量下研究方程的正则性。根据二阶一致抛物方程经典的 $C^{2,\alpha}$ 估计(见[12])，可知存在一个二阶多项式 $p_1(x,y,t)$，使得

$$\frac{1}{\left|Q_{r|x_0|}\right|}\int_{Q_{r|x_0|}}|v-p_1|^2\mathrm{dzd}t\le C_1\left(r|x_0|\right)^{2(2+\alpha)},\tag{25}$$

其中 $0<r<\frac{1}{4}$。

再结合(24)和(25)，可以得到

$$\frac{1}{\left|Q_{r|x_0|}(Z_0)\right|}\int_{Q_{r|x_0|}(Z_0)}\left|u-p_{(0,0,0)}-|x_0|^{2+\alpha}\,p_1\left(\frac{x}{|x_0|},\frac{y}{|x_0|^{1+\gamma}},\frac{t}{|x_0|^2}\right)\right|^2\mathrm{dzd}t\le C_1\left(r|x_0|\right)^{2(2+\alpha)}.$$

令

$$p_{(x_0,y_0,t_0)}(x,y,t)=p_{(0,0,0)}(x,y,t)+|x_0|^{2+\alpha}\,p_1\left(\frac{x}{|x_0|},\frac{y}{|x_0|^{1+\gamma}},\frac{t}{|x_0|^2}\right).$$

后面迭代过程与前文相同。

至此我们分别得到了方程(2)在 $\{x=0\}$ 附近区域和远离 $\{x=0\}$ 的区域解的 Schauder 估计。

综上所述，定理 1 得证。

基金项目

南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2019044)。

参考文献

[1] Baouendi, M. (1967) Sur uneclassed’opérateursselliptiquesdégénérés. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **95**, 45-87. https://doi.org/10.24033/bsmf.1647

[2] Jerison, D. and Lee, J.M. (1987) The Yamabe Problem on C-R Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **25**, 167-197. https://doi.org/10.4310/jdg/1214440849

[3] Hörmander, L. (1967) Hypoelliptic Second Order Differential Equations. *Acta Mathematica*, **119**, 147-171. https://doi.org/10.1007/BF02392081

[4] Franchi, B. (1991) Weighted Sobolev-Poincaré Inequalities and Pointwise Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **327**, 125-158. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-1040042-8

[5] Franchi, B. and Lanconelli, E. (1983) Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operator with Measurable Coefficients. *Annalidella Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **10**, 523-541.

[6] Franchi, B. and Serapioni, R. (1987) Pointwise Estimsted for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: A Geometrical Approach. *Annalidella Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **14**, 527-568.

[7] Wang, L.H. (2003) Hölder Estimates for Subelliptic Operators. *Journal of Functional Analysis*, **199**, 228-242. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00093-4

[8] Song, Q.Z., Lu, Y., Shen, J.Z. and Wang, L.H. (2011) Regularity of a Class of Degenerate Elliptic Equations. *Annalidella Scuola Normalesuperiore di Pisa-Classe di Scienze*, X, 645-667.

[9] Monti, R. and Morbidelli, D. (2006) Kelvin Transform for Grushin Operators and Critical Semilinear Equations. *Duck Mathematical Journal*, **131,** 167-202. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-05-13115-5

[10] Dibenedetto, E. (1993) Degenerate Parabolic Equations. Springer, New York, 1993. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0895-2

[11] Franchi, B. and Lanconelli, E. (1984) An Embedding Theorem for Sobolev Spaces Related to Non-Smooth Vector Fields and Harnack Inequality. *Communications in Partial Differential Equations*, **9**, 1237-1264. https://doi.org/10.1080/03605308408820362

[12] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[13] Wang, L.H. (2003) Hölder Estimates for Subelliptic Operators. *Journal of Functional Analysis*, **199**, 228-242. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00093-4

[14] Byun, S.S. and Wang, L.H. (2004) Elliptic Equations with BMO Coefficients in Reifenberg Domains. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **57**, 1283-1310. https://doi.org/10.1002/cpa.20037