Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1131-1137
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012134

交换超环上的矩阵

黄冬明，王 鑫

海南大学理学院，海南 海口
Email: huangdm35@126.com

收稿日期：2020年11月22日；录用日期：2020年12月7日；发布日期：2020年12月14日

摘 要

本文旨在研究Krasner交换超环R与其上的全矩阵环$M_{n\times n}(R)$之间的一些内在联系，建立了一个从R的超理想集合到$M_{n\times n}(R)$的超理想集合之间的双射。进一步，又得到了结论：R是单(素)超环当且仅当$M_{n\times n}(R)$是单(素)超环。

关键词

Krasner超环，Salvo超环，超理想

Matrices over Commutative Hyperrings

Dongming Huang, Xin Wang

School of Science, Hainan University, Haikou Hainan
Email: huangdm35@126.com

Received: Nov. 22nd, 2020; accepted: Dec. 7th, 2020; published: Dec. 14th, 2020

Abstract

The main aim of this paper is to study the interplay between a commutative Krasner hyperring R and the matrix ring $M_{n\times n}(R)$ over it. A bijection from the hyperideals set of R to the hyperideals set of $M_{n\times n}(R)$ is established. Furthermore, it is concluded that R is a simple (res. prime) hyperring if and only if $M_{n\times n}(R)$ is a simple (res. prime) hyperring.

Keywords

Krasner Hyperrings, Salvo Hyperrings, Hyperideals

文章引用：黄冬明，王鑫．交换超环上的矩阵[J]．理论数学, 2020, 10(12): 1131-1137.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012134

1. 引言

1934 年，在第八届斯堪的纳维亚数学家大会上，F. Marty [1]引入了超运算的概念，进而定义了一种叫超群的代数结构。超运算是二元运算的推广，具体地，对于一个非空集合 H，两个元素在超运算作用下不再是一个元素而是 H 的一个非空子集。1972 年，Mittas [2] [3] [4]引入了正规超群的概念，它是 Marty 所定义超群的一个特殊子类。作为环的推广，超环也被引入并被研究。超环有着不同的定义，主要是来自于对环的两种运算推广的不同组合。大致分为三种情况：1) 两种运算都是超运算。这种超环被 DeSalvo [5]和 Barghi 以及 A. Asokkumar [6]和 Velrajan [7]所研究，这种超环称为 Salvo 超环；2) 乘法是超运算而加法是二元运算。这种超环通常称为乘法超环，它被 Rota [8]引入并研究；3) 加法是超运算而乘法是二元运算。这种超环称为加法超环，也称为 Krasner 超环，它被 Krasner [9]引入并研究。近年来，超代数的研究取得了很多进展，代数中许多经典结论都可以推广到超代数中来，比如中国剩余定理，同构定理都已推广到超环上，相关的结果可以参考文献[10] [11] [12] [13]。同时，超代数对象被发现广泛地存在于多个领域，如二次型理论[14]，MilnorK 理论[15]，热带几何(tropical geometry) [16]和数论[17]等领域。

另一方面，交换环上的线性代数被充分研究，它有着重要的理论和应用价值[18]。在其中，交换环上的矩阵以及交换环上的矩阵环的理想是重要的基础。一个自然的问题就是，能否对超环上的矩阵以及超环上矩阵的超理想作研究，并得到一些好的结论，为研究超环上的线性代数奠定基础。本文在这方面作了初步的研究。

2. 超环

这一节我们先回顾一些相关的概念与性质，具体内容也可以参考文献[13]。

定义 2.1 一个 Krasner 超环指的是一个代数结构 $(R,+,\cdot)$，它满足如下条件：

1) $(R,+)$ 是一个正规超群，即

i) $\forall x,y,z\in R$， $x+(y+z)=(x+y)+z$；

ii) $\forall x,y\in R$， $x+y=y+x$；

iii) 存在 $0\in R$，使得 $\forall x\in R$，有 $0+x=\{x\}$；

Iv) $\forall x\in R,\exists! x'\in R$，使得 $0\in x+x'$ (元素 x' 称为 x 的负元，并记为 $-x$)；

v) 由 $z\in x+y$ 可推得 $y\in -x+z$ 及 $x\in z-y$；

2) $(R,\cdot)$ 是一个半群，存在一个元素 0，且 0 关于乘法满足性质：$0\cdot x=x\cdot 0=0$；

3) 乘法关于超运算加法满足分配律，即 $\forall x,y,z\in R$，有 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ 及 $(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$。

如果还满足：

4) $\forall x,y\in R$，有 $x\cdot y=y\cdot x$；

则称 $(R,+,\cdot)$ 是交换 Krasner 超环。

若存在 $1\in R$，使得 $\forall x\in R$， $x\cdot 1=1\cdot x=x$，则称 1 是 R 的单位元。

注：在记号方面，把 $x\cdot y$ 简记为 xy， $0+x=\{x\}$ 简写为 $0+x=x$。

接下来给出 Krasner 超环的一些简单性质。

命题 2.2 在 Krasner 超环中，下列性质成立：

1) 零元是唯一的；

2) $-(-x)=x$；

3) $-(x+y)=-x-y$，其中 $-A=\{-a \mid a\in A\}$；

4) $x(-y)=(-x)y=-xy$；

5) $(-x)(-y)=xy$；

6) $0\in x-y\Rightarrow x=y$；

7) $\forall x,y,z,w\in R$，有 $(x+y)(z+w)\subseteq xz+xw+yz+yw$。

特别要注意的是(7)中的等号不一定成立，即在超环中分配律成立不能得到双分配律也成立。可参见例子[6.2.1 节 II]。

注：从现在起，本文的 Krasner 超环均指含有单位元的交换 Krasner 超环。

定义 2.3 Krasner 超环 $(R,+,\cdot)$ 的非空子集 I 称为 R 的 Krasner 超理想，若满足下列条件：

1) $\forall x,y\in I$，有 $x-y\subseteq I$；

2) $\forall x\in I, r\in R$，有 $xr\in I$。

下面再来介绍另一类超环：Salvo 超环。Salvo 超环与 Krasner 超环的区别在于 Salvo 超环的乘法运算也是超运算，定义如下：

定义 2.4 一个 Salvo 超环指的是一个代数结构 $(R,+,\cdot)$，它满足如下条件：

1) $(R,+)$ 是一个正规超群；

2) $(R,\cdot)$ 是一个半超群，且 0 关于乘法满足性质：$0\cdot x=x\cdot 0=0$；

3) 超运算乘法关于超运算加法满足分配律。

若存在 $1\in R$，使得 $\forall x\in R$，$x\cdot 1=1\cdot x=x$，则称 1 是 R 的单位元。

命题 2.2 中的性质(1)，(2)，(3)，(6)和(7)仍然成立，但对(4)，有如下结论：

命题 2.5 [6]设 $(R,+,\cdot)$ 是一个 Salvo 超环。若 $xy=t$，其中 $x,y,t\in R$，则有 $x(-y)=(-x)y=-xy$。

定义 2.6 [6]一个 Salvo 超环 $(R,+,\cdot)$ 称为准超环(*quasi-hyperring*)，若 R 还满足条件：$\forall x,y\in R$，$x(-y)=(-x)y=-xy$。

相应地，也有 Salvo 超理想的概念。

定义 2.7 Salvo 超环 $(R,+,\cdot)$ 的非空子集 I 称为 R 的 Salvo 右(左)超理想，若满足下列条件：

1) $\forall x,y\in I$，有 $x-y\subseteq I$；

2) $\forall x\in I, r\in R$，有 $xr\subseteq I\,(rx\subseteq I)$。

当 I 既是 R 的 Salvo 左超理想又是 R 的 Salvo 右超理想时，称为 R 的 Salvo 双边超理想，简称为 R 的超理想。

注：从现在起，本文的 Salvo 超环均指含有单位元的 Salvo 超环。

类似于一般环，我们给出超环上素超理想和素超环的定义。

定义 2.7 Krasner(Salvo)超环 $(R,+,\cdot)$ 的超理想 $P\subset R$ 称为 R 的素超理想，若对 R 的超理想 I,J，由 $IJ\subseteq P$ 可得 $I\subseteq P$，或 $J\subseteq P$。

定义 2.8 一个 Krasner(Salvo)超环 $(R,+,\cdot)$ 称为素超环，若(0)理想是 R 的素超理想。

定义 2.9 一个 Krasner(Salvo)超环 $(R,+,\cdot)$ 称为单超环，若 R 只有平凡理想：(0)和 R。

3. 超环上的矩阵及其理想

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个 Krasner (Salvo)超环。

定义 3.1 集合

$$\left\{A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\middle|a_{ij}\in R,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\right\}$$

称为 R 上的全矩阵集，记为 $M_{m\times n}(R)$。

若 $A\in M_{m\times n}(R)$，用 $[A]_{ij}$ 表示 A 的第 i 行第 j 列的元素。在 $M_{m\times n}(R)$ 上定义超加法如下：

$$A+B=\left\{C\middle|[C]_{ij}\in[A]_{ij}+[B]_{ij},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\right\}。$$

若 $r\in R$，可以定义 r 与 A 的数量积如下：

$$[rA]_{ij}=r[A]_{ij}.$$

$$\left(rA=\left\{C\middle|[C]_{ij}\in r[A]_{ij},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\right\}\right)$$

若 $A\in M_{m\times n}(R),B\in M_{n\times l}(R)$，可以定义 A 与 B 的超乘法如下：

$$AB=\left\{C\middle|[C]_{ij}\in\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,l\right\}。$$

当 $m=n=l$ 时，上面定义的矩阵的乘法是 $M_{n\times n}(R)$ 上的超乘法，即 $M_{n\times n}(R)$ 中两个矩阵的乘积是它的一个非空子集。

关于准超环，文献[6]有如下结论：

引理 3.2 [6，命题 1.5]若 $(R,+,\cdot)$ 是一个准超环，则 $M_{n\times n}(R)$ 在上面定义的超加法和超乘法运算下也是一个准超环。

定理 3.3 设 $(R,+,\cdot)$ 是一个 Krasner 超环，则 $M_{n\times n}(R)$ 是一个准超环。

证明：由命题 2.2(4)，Krasner 超环是准超环。再由引理 3.2，$M_{n\times n}(R)$ 是一个准超环。

命题 3.4 设 I 是 Krasner 超环 R 的一个超理想，那么

$$M_{n\times n}(I)=\left\{A\in M_{n\times n}(R)\middle|[A]_{ij}\in I,\forall i,j=1,\cdots,n\right\}$$

是准超环 $M_{n\times n}(R)$ 的超理想。

证明：$\forall A,B\in M_{n\times n}(I)$，则有 $[A]_{ij},[B]_{ij}\in I,i,j=1,\cdots,n$。从而，$[A]_{ij}-[B]_{ij}\in I$。这表明：$A-B\in M_{n\times n}(I)$。而 $\forall C\in M_{n\times n}(R)$，显然有 $AC,CA\in M_{n\times n}(I)$，所以 $M_{n\times n}(I)$ 是 $M_{n\times n}(R)$ 的超理想。

下面我们证明 $M_{n\times n}(R)$ 的超理想都具有命题 3.4 中 $M_{n\times n}(I)$ 这种形式，即对 $M_{n\times n}(R)$ 的每个超理想 $\mathscr{U}$，我们都存在 R 的一个超理想 I，使得 $\mathscr{U}=M_{n\times n}(I)$。

先定义一类特殊矩阵 E_{ij}：

$$E_{ij}=\begin{cases}1, & 若(p,q)=(i,j)\\0, & 其他\end{cases}$$

$\forall A\in M_{m\times n}(R)$，显然有 $A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}E_{ij}$。

引理 3.5 关于特殊矩阵 E_{ij}，有如下性质：

1) $E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, 若\ j=k\\O,\ 若\ j\neq k\end{cases}$；

2) 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{n\times n}(R)$，则 $\forall p,q=1,\cdots,n$，有

$$AE_{pq}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&a_{1p}&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&a_{2p}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&a_{np}&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\\text{第 }q\text{ 列}\end{array};$$

3) 设 $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(R)$，则 $\forall p,q=1,\cdots,n$，有

$$E_{pq}A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\\a_{q1}&a_{q2}&\cdots&a_{qn}\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\text{第 }p\text{ 行}\\\\\\\\\end{array};$$

4) 设 $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(R)$，则 $\forall k,s,p,q=1,\cdots,n$，有 $E_{ks}AE_{pq}=a_{sp}E_{kq}$。

证明：直接验证可得。

定理 3.6 设 R 是 Krasner 超环，$\mathcal{U}$ 是准超环 $M_{n\times n}(R)$ 的一个超理想，则存在 R 的唯一的超理想 I，使得 $\mathcal{U}=M_{n\times n}(I)$。

证明：令

$$I=\{r\in R \mid r\text{是}\mathcal{U}\text{中矩阵的元素}\}。$$

1) 先证 I 是 R 的超理想。

$\forall a,b\in I$，存在 $A,B\in\mathcal{U}$，使得 a,b 分别是矩阵 A,B 的元素，设 $a=[A]_{kp},b=[B]_{sq}$，其中 $k,p,s,q\in\{1,\cdots,n\}$。由引理 3.5，$a-b=\{[C]_{kq} \mid C\in AE_{pq}-E_{ks}B\}$。而 $AE_{pq}-E_{ks}B\subseteq\mathcal{U}$，所以 $a-b\subseteq I$。$\forall a\in I,r\in R$，存在 $A\in\mathcal{U}$，使得 a 是矩阵 A 的元素，设 $a=[A]_{kp}$，其中 $k,p\in\{1,\cdots,n\}$。注意到 $ra=[rEA]_{kp}$。而 $rEA\in\mathcal{U}$，因此 $ra\in I$。所以 I 是 R 的超理想。

2) 再证 $\mathcal{U}=M_{n\times n}(I)$。

显然 $\mathcal{U}\subseteq M_{n\times n}(I)$。下证反包含关系。设 $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(I)$，那么 $a_{ij}\in I$，$\forall i,j=1,\cdots,n$，同时也有 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$。由于 $a_{ij}\in I$，所以存在矩阵 $B\in\mathcal{U}$，存在 $p,q\in\{1,\cdots,n\}$。使得 $a_{ij}=[B]_{pq}$，由引理 3.5(4)，有

$$a_{ij}E_{ij}=[B]_{pq}E_{ij}=E_{ip}BE_{qj}\in\mathcal{U}。$$

从而 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\in\mathcal{U}$。所以 $\mathcal{U}=M_{n\times n}(I)$。

3) 最后证明超理想 I 的唯一性，即证：若存在 R 的超理想 J，使得 $\mathcal{U}=M_{n\times n}(J)$，则 $I=J$。

由 I 的定义，显然有 $J\subseteq I$。$\forall a\in I$，存在矩阵 $B\in\mathcal{U}$，存在 $p,q\in\{1,\cdots,n\}$，使得 $a=[B]_{pq}$，由引理 3.5(4)，有

$$aE_{11}=[B]_{pq}E_{11}=E_{1p}BE_{q1}\in\mathcal{U}=M_{n\times n}(J)。$$

因此，$a\in J$，于是 $I\subseteq J$。所以 $I=J$。

把 R 与 $M_{n\times n}(R)$ 的理想的集合分别记为 $\mathscr{I}(R)$ 与 $\mathscr{I}(M_{n\times n}(R))$，由命题 3.4 和定理 3.6 的证明过程，有如下结论：

定理 3.7 设 R 是 Krasner 超环，则 $f:\mathscr{I}(R)\to\mathscr{I}(M_{n\times n}(R)), I\mapsto M_{n\times n}(I)$ 是 $\mathscr{I}(R)$ 到 $\mathscr{I}(M_{n\times n}(R))$ 的双射。

由定理 3.7 可直接得到如下推论。

推论 3.8 设 R 是 Krasner 超环，则 R 是单超环当且仅当 $M_{n\times n}(R)$ 是单超环。

推论 3.9 设 R 是 Krasner 超环，则 R 是素超环当且仅当 $M_{n\times n}(R)$ 是素超环。

证明：“必要性”设 R 是素超环。若存在 $\mathscr{U},\mathscr{V}\in\mathscr{I}(M_{n\times n}(R))$，使得 $\mathscr{U}\mathscr{V}\subseteq(0)$。由定理 3.7，存在 $I,J\in\mathscr{I}(R)$，使得 $\mathscr{U}=M_{n\times n}(I),\mathscr{V}=M_{n\times n}(J)$。因此，$M_{n\times n}(I)M_{n\times n}(J)\subseteq(0)$。$\forall a\in I,b\in J$，注意到 $abE_{11}=(aE_{11})(bE_{11})\subseteq M_{n\times n}(I)M_{n\times n}(J)\subseteq(0)$。于是，$ab=0$，由 a,b 的任意性 $IJ\subseteq(0)$。由于 R 是素超环，我们有 $I\subseteq(0)$ 或 $J\subseteq(0)$。从而 $M_{n\times n}(I)\subseteq(0)$ 或 $M_{n\times n}(J)\subseteq(0)$，即 $\mathscr{U}\subseteq(0)$ 或 $\mathscr{V}\subseteq(0)$。所以 $M_{n\times n}(R)$ 是素超环。

“充分性”设 $M_{n\times n}(R)$ 是素超环。若存在 $I,J\in\mathscr{I}(R)$，使得 $IJ\subseteq(0)$。此时，显然有 $M_{n\times n}(I)M_{n\times n}(J)\subseteq(0)$。由于 $M_{n\times n}(R)$ 是素超环，有 $M_{n\times n}(I)\subseteq(0)$ 或 $M_{n\times n}(J)\subseteq(0)$。从而有 $I\subseteq(0)$ 或 $J\subseteq(0)$。所以 R 是素超环。

基金项目

海南省自然科学基金项目(编号：118MS003)。

参考文献

[1] Marty, F. (1934) Sur une generalization de la notion de groupe. 8*th Congress of Scandinavian*. *Mathematics*, Stockholm, 45-49.

[2] Mittas, J. (1970) hypergroupes canoniques hypervalues. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie A*, **271**, 4-7.

[3] Mittas, J. (1971) Contributions a la theorie des hypergroupes, hyperanneaux, et les hypercorps hypervalues. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie A*, **272**, 3-6.

[4] Mittas, J. (1972) Hypergroupes Canoniques. *Mathematica Balkanica*, **2**, 165-179.

[5] De Salvo, M. (1984) Hyperrings and Hyperfields. *Annales Scientifiques de l'Universite de Clermont-Ferrand II*, No. 22, 89-107.

[6] Rahnamai Barghi, A. (2003) A Class of Hyperrings. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **6**, 227-233. https://doi.org/10.1080/09720529.2003.10697979

[7] Asokkumar, A. and Velrajan, M. (2007) Characterizations of Regular Hyperrings. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **22**, 115-124.

[8] Rota, R. (1990) Strongly Distributive Multiplicative Hyperrings. *Journal of Geometry*, **39**, 130-138. https://doi.org/10.1007/BF01222145

[9] Krasner, M. (1983) A Class of Hyperrings and Hyperfields. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **6**, 307-311. https://doi.org/10.1155/S0161171283000265

[10] Davvaz, B. (2004) Isomorphism Theorems of Hyperrings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **35**, 321-332.

[11] Davvaz, B. and Salasi, A. (2006) A Realization of Hyperrings. *Communications in Algebra*, **34**, 4389-4400. https://doi.org/10.1080/00927870600938316

[12] Nakassis, A. (1985) Recent Results in Hyperring and Hyperfield Theory. *International Journal of Mathematical Sciences*, **8**, 725-728.

[13] Ramaruban, N. (2014) Commutative Hyperalgebra. University of Cincinnati, Cincinnati.

[14] Marshall, M. (2006) Real Reduced Multirings and Multifields. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **205**, 452-468. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.07.011

[15] Marshall, M. (2008) Review of the Book Valuations, Orderings and Milnor K-Theory. Math. Surveys and Monographs 124. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45**, 439-444. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-07-01166-4

[16] Viro, O. (2010) Hyperfields for Tropical Geometry I. Hyperfields and Dequantization.

[17] Connes, A. and Consani, C. (2011) The Hyperring of Adele Classes. *Journal of Number Theory*, **130**, 159-194. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2010.09.001

[18] Brown, W.C. (1993) Matrices over Commutative Rings. Marcel Dekker Inc., New York, 1-20.