Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1213-1219
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012144

Hans汉斯

基于RTT实现的量子超代数的坐标超代数

耿亚娜，常智华*

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: *mazhhchang@scut.edu.cn

收稿日期：2020年11月25日；录用日期：2020年12月23日；发布日期：2020年12月31日

摘 要

一个量子超代数可以通过一个R-矩阵及相应的RTT关系给出。对于一个由R-矩阵$\mathcal{R}$定义的量子超代数$U(\mathcal{R})$，本文验证了它的坐标超代数$\mathcal{A}(\mathcal{R})$的矩阵生成元也满足RTT关系。我们进一步的以量子超代数$U_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$和$U_q(\mathfrak{q}_n)$为例阐释了上述结果。

关键词

R-矩阵，量子超代数，坐标超代数

Coordinate Superalgebras of Quantum Superalgebras Based on the RTT Relation

Yana Geng, Zhihua Chang*

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangzhou
Email: *mazhhchang@scut.edu.cn

Received: Nov. 25th, 2020; accepted: Dec. 23rd, 2020; published: Dec. 31st, 2020

Abstract

A quantum superalgebra can be given by an R-matrix and the corresponding RTT relation. For a quantum superalgebra $U(\mathcal{R})$ defined by the R-matrix $\mathcal{R}$, we verified that the matrix generators of its coordinate superalgebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ also satisfy the RTT relation in this paper. And we further illustrate the above results by taking quantum superalgebras $U_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$ and $U_q(\mathfrak{q}_n)$ as examples.

*通讯作者。

文章引用: 耿亚娜, 常智华. 基于 RTT 实现的量子超代数的坐标超代数[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1213-1219.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012144

Keywords

R-Matrix, Quantum Superalgebras, Coordinate Superalgebras

1. 引言

量子超代数是李超代数的泛包络代数的量子化，有限维单李超代数的量子包络代数出现于 1990 年前后，最简单的量子超代数$U_q\left(\mathfrak{osp}_{2|1}\right)$由 P. P. Kulish 和 N. Y. Reshetikhin 在[1]中给出。随后，M. Chaichian 和 P. Kulish 在[2]中定义了 A 型的量子包络超代数$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$；G. I. Olshankski 在论文[3]中构造了 queer 李超代数$\mathfrak{q}_n$的量子包络超代数$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$。

近年来，这些量子超代数的结构和表示理论受到了数学和理论物理研究的广泛关注。R. B. Zhang 在[4]中得到了量子超代数$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$的有限维表示。A. J. Bracken，M. D. Gould 和 R. B. Zhang 在论文[5] [6]中对量子超代数对应的泛 R 矩阵进行了研究，给出了一般超 Hopf 代数的分次泛 R 矩阵的公式，并具体得到了$U_q\left(\mathfrak{osp}_{1|2}\right)$和$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$的自然表示上的 R-矩阵。D. Grancharov，J.-H. Jung，S.-J. Kang 和 M. Kim 在[7]中对量子超代数$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$的张量模范畴进行了详细的刻画。

在这一系列对量子超代数的研究中，它们的坐标超代数都起到了重要的作用。坐标超代数是论文[6]构造 quantum double 的重要部分，在 Y. Zhang 对$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$的不变量理论基本定理的证明过程[8]中也起到了多项式代数的量子化的作用。

量子超代数的坐标代数是它作为 Hopf 代数的余有限对偶中由自然表示的矩阵元生成的子代数。众多的例子已经表明这些坐标代数的矩阵生成元满足 RTT 关系。RTT 关系是 L. D. Faddeev，N. Y. Reshetikhin 和 L. A. Takhtajan 在论文[9]中引入的量子代数的矩阵生成元之间的关系。它给出了量子包络代数的一种非常简洁的实现方式。而且具有易于描述其中的余乘和反极等 Hopf 代数结构的优势。

我们在这篇小论文中验证：在一个通过 RTT 实现的量子超代数的坐标超代数中，它的矩阵生成元仍然满足 RTT 关系。我们还将以量子超代数$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$和$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$为例阐释上述结果。

2. 量子超代数

本节我们首先给出基于 RTT 实现的量子超代数及其坐标代数的定义。

设$\mathbb{K}$是一个特征为零的域。考虑域$\mathbb{K}$上的超线性空间(即$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的线性空间)，$V=\mathbb{K}^{m|n}$。V有标准基$\{v_1,\cdots,v_{m+n}\}$，其中v_i在$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次中的次数为

$$|v_i|=|i|=\begin{cases}\bar{0}, & 如果 1\le i\le m,\\ \bar{1}, & 如果 m+1\le i\le m+n.\end{cases}$$

相应的 V 的自同态代数 $\mathrm{End}V$ 也有一个自然地$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次结构，即

$$|e_{ij}|=|i|+|j|,\ \ i,j=1,\cdots,m+n,$$

其中$e_{ij}\in\mathrm{End}V$是由$e_{ij}v_k=\delta_{jk}v_i, k=1,\cdots,m+n$决定的矩阵单位，$\delta_{jk}$为Kronecker符号。

设

$$\mathcal{R}=\sum_{i,j,k,l}R_{kl}^{ij}e_{ij}\otimes e_{kl}\in \mathrm{End}V\otimes \mathrm{End}V.$$

注意到从 $\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V$ 到 $\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V$ 有三个典范同态：

$$a\otimes b\mapsto a\otimes b\otimes 1,\quad a\otimes b\mapsto a\otimes 1\otimes b,\quad a\otimes b\mapsto 1\otimes a\otimes b.$$

我们把 $\mathcal{R}$ 在三个典范同态下的像分别记为 $\mathcal{R}_{12},\mathcal{R}_{13},\mathcal{R}_{23}$。若 $\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V$ 中偶元素(次数为 $\overline{0}$ 的齐次元)满足Yang-Baxter方程

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}=\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{2.1}$$

则称 $\mathcal{R}$ 是一个***R*-矩阵**。Yang-Baxter方程(2.1)也可等价地写为

$$\sum\nolimits_{p,r,s}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|j|)}R_{br}^{ap}R_{cs}^{pi}R_{sk}^{rj}=\sum\nolimits_{p,r,s}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|r|)}R_{cs}^{br}R_{sk}^{ap}R_{rj}^{pi} \tag{2.2}$$

定义2.1 设 $\mathcal{R}\in\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V$ 是一个*R*-矩阵。我们定义相应的量子超代数 $U(\mathcal{R})$ 为域 $\mathbb{K}$ 上由次数为 $|i|+|j|$ 的齐次元 $t_{ij},i,j=1,2,\cdots,m+n$ 生成的含幺结合超代数。这些生成元满足定义关系

$$\mathcal{R}T_1T_2=T_2T_1\mathcal{R} \tag{2.3}$$

其中

$$T=\sum_{i,j=1}^{m+n}e_{ij}\otimes t_{ij}$$

且 T_1,T_2 分别为T在从 $\mathrm{End}V\otimes U(\mathcal{R})$ 到 $\mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V\otimes U(\mathcal{R})$ 的两个典范同态

$$a\otimes u\mapsto a\otimes 1\otimes u,\quad a\otimes u\mapsto 1\otimes a\otimes u$$

下的同态像，

定义关系式(2.3)也可以等价地写为

$$\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|j|)}R_{br}^{ap}t_{pi}t_{rj}=\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|r|)}t_{br}t_{ap}R_{rj}^{pi}$$

上述通过RTT实现的结合超代数 $U(\mathcal{R})$ 自然地具有超双代数的结构，其中的余乘由

$$\Delta(t_{ij})=\sum_{k=1}^{m+n}(-1)^{(|i|+|k|)(|k|+|j|)}t_{ik}\otimes t_{kj}$$

给出。

例2.2 设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}(q)$ 为一个未定元q的复有理函数域，在线性空间 $V=\mathbb{K}^{m|n}$ 上有*R*-矩阵

$$\mathcal{R}:=\sum\nolimits_i q^{(-1)^{|i|}}e_{ii}\otimes e_{ii}+\sum\nolimits_{i\neq j}e_{ii}\otimes e_{jj}+\left(q-q^{-1}\right)\sum\nolimits_{i<j}(-1)^{|j|}e_{ij}\otimes e_{ji}. \tag{2.4}$$

则一般线性李超代数的量子包络超代数 $U_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 可以定义为域 $\mathbb{K}$ 上由次数为 $|i|+|j|$ 的齐次生成元 $t_{ij}^{\pm},i,j=1,\cdots,m+n$ 生成的含幺结合代数，它们满足

$$t_{ij}^{+}=t_{ji}^{-}=0,i>j \text{ 和 } t_{ii}^{+}t_{ii}^{-}=1=t_{ii}^{-}t_{ii}^{+},i=1,\cdots,m+n$$

以及定义关系

$$\mathcal{R}T_1^{(\pm)}T_2^{(\pm)}=T_2^{(\pm)}T_1^{(\pm)}\mathcal{R}$$

$$\mathcal{R}T_1^{(+)}T_2^{(-)}=T_2^{(-)}T_1^{(+)}\mathcal{R}$$

其中 $T^{(+)}=\sum\nolimits_{i,j}e_{ij}\otimes t_{ij}^{+}$，$T^{(-)}=\sum\nolimits_{i,j}t_{ij}^{-}\otimes e_{ij}$。这样的定义给出了量子包络超代数 $U_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的RTT实现。事

实上，类似于文献[10]，可以证明了这样由RTT实现给出的量子包络代数$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$与Drinfeld实现给出的量子包络代数是同构的。

例2.3 域$\mathbb{K}=\mathbb{C}(q)$与例2.2相同，线性空间$V=\mathbb{K}^{m|n}$是有相同维数n的奇偶空间，我们分别用$\{-n,\cdots,-1\}$和$\{1,\cdots,n\}$来作为它的奇空间和偶空间的标准基的指标集。V上有R-矩阵

$$\mathcal{R}:=\sum_{i,j}q^{\varphi(i,j)}e_{ii}\otimes e_{jj}+\left(q-q^{-1}\right)\sum_{i<j}(-1)^{|i|}\left(e_{ji}+e_{-j,-i}\right)\otimes e_{ij}\in \mathrm{End}(V)\otimes \mathrm{End}(V), \tag{2.5}$$

其中$\varphi(i,j)=(-1)^{|j|}\left(\delta_{ij}+\delta_{i,-j}\right)$。由G. I. Olshanski给出的queer量子包络超代数$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$是由次数为$|i|+|j|$的齐次元$t_{ij},i\le j$生成的结合超代数，生成元满足关系

$$\mathcal{R}T_1T_2=T_2T_1\mathcal{R}$$

及$t_{ii}t_{-i,-i}=1=t_{-i,-i}t_{ii},i=-n,\cdots,-1,1,\cdots,n$，其中

$$T=\sum_{i\le j}t_{ij}\otimes e_{ij}.$$

这是一个由RTT实现给出的量子包络代数。Queer量子超代数$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$的Drinfeld实现已由D. Grantcharov，J.-H. Jung，S.-J. Kang和M. Kim在文献[7]中给出。

3. 坐标代数

从双代数的一般理论[11]我们知道，每一个双代数的有限对偶也是一个双代数。这里我们考虑超双代数$U(\mathcal{R})$的有限对偶。用$U(\mathcal{R})^*$表示$U(\mathcal{R})$的对偶空间，即从$U(\mathcal{R})$到$\mathbb{K}$的线性函数全体，则超双代数$U(\mathcal{R})$的有限对偶定义为

$$U(\mathcal{R})^\circ:=\left\{f\in U(\mathcal{R})^*\,|\,U(\mathcal{R})\text{如果存在余维数有限的理想}I\text{使得}f(I)=0\right\}.$$

我们用$\langle f,x\rangle$表示$f\in U(\mathcal{R})^*$在$x\in U(\mathcal{R})$的取值，那么超双代数$U(\mathcal{R})^\circ$上的乘积和余乘积由下列关系决定：

$$\langle fg,x\rangle=\sum_{(x)}(-1)^{|x_{(1)}||g|}\left\langle f,x_{(1)}\right\rangle\left\langle g,x_{(2)}\right\rangle,\text{如果}\Delta(x)=\sum_{(x)}x_{(1)}\otimes x_{(2)},$$

$$\langle f,xy\rangle=\sum_{(f)}(-1)^{|f_{(2)}||x|}\left\langle f_{(1)},x\right\rangle\left\langle f_{(2)},y\right\rangle,\text{如果}\Delta^\circ(f)=\sum_{(f)}f_{(1)}\otimes f_{(2)},$$

其中$f,g\in U(\mathcal{R})^*$，$x,y\in U(\mathcal{R})$。

对于超双代数$U(\mathcal{R})$，我们可以借助R-矩阵在线性空间V上定义它的自然表示：

$$\rho:U(\mathcal{R})\to \mathrm{End}V,\quad T\mapsto \mathcal{R}.$$

即，

$$\rho\left(t_{ij}\right)=\sum_{k,l}R_{ij}^{kl}e_{kl},\quad i,j=1,\cdots,m+n.$$

自然表示的矩阵系数定义了$U(\mathcal{R})$上的线性函数$\tau_{ik}\in U(\mathcal{R})^*$，即

$$\rho(x)\cdot v_l=\sum_k\langle\tau_{kl},x\rangle v_k,\quad x\in U(\mathcal{R}). \tag{3.1}$$

特别地，

$$\left\langle\tau_{kl},t_{ij}\right\rangle=R_{ij}^{kl}.$$

注意到V是$U(\mathcal{R})$的有限维表示，$\ker\rho$是$U(\mathcal{R})$的一个余维数有限的双边理想，且τ_{kl}在$\ker\rho$上取零值，因此$\tau_{kl}\in U(\mathcal{R})^\circ$。

定义3.1 超双代数$U(\mathcal{R})^{\circ}$中由$\tau_{kl},k,l=1,\cdots,m+n$生成的子代数称为超代数$U(\mathcal{R})$的坐标超代数，记为$A(\mathcal{R})$。

命题3.2 超代数$A(\mathcal{R})$的生成元$\tau_{kl},k,l=1,\cdots,m+n$满足

$$\Delta^{\circ}(\tau_{kl})=\sum_{p}(-1)^{(|k|+|p|)(|p|+|l|)}t_{kp}\otimes t_{pl}. \tag{3.2}$$

即，$A(\mathcal{R})$是$U(\mathcal{R})^{\circ}$的一个子双代数。

证明。我们直接验证等式(3.2)。由τ_{kl}的定义，对于$x,y\in U(\mathcal{R})$，有

$$\rho(xy)\cdot v_l=\sum_{k}\langle\tau_{kl},xy\rangle v_k.$$

同时，因ρ是$U(\mathcal{R})$的一个表示，也有

$$\rho(xy)\cdot v_l=\rho(x)\rho(y)\cdot v_l=\sum_{p}\langle\tau_{pl},y\rangle\rho(x)\cdot v_p=\sum_{k,p}\langle\tau_{kp},x\rangle\langle\tau_{pl},y\rangle v_k.$$

对比两式右端v_k的系数，我们有

$$\langle\tau_{kl},xy\rangle=\sum_{p}\langle\tau_{kp},x\rangle\langle\tau_{pl},y\rangle.$$

注意到$\langle\tau_{kp},x\rangle$仅当$|x|=|k|+|p|$时非零，因此，$U(\mathcal{R})^{\circ}$中等式(3.2)成立。

由于$\tau_{kl},k,l=1,2,\cdots,m+n$是超代数$A(\mathcal{R})$的生成元，等式(3.2)事实上说明了有限对偶代数$U(\mathcal{R})^{\circ}$的余乘在超代数$A(\mathcal{R})$上是封闭的，即$A(\mathcal{R})$是$U(\mathcal{R})^{\circ}$的超子双代数。

定理3.3 超代数$A(\mathcal{R})$的生成元$\tau_{kl},k,l=1,2,\cdots,m+n$满足

$$\mathcal{R}X_1X_2=X_2X_1\mathcal{R},$$

其中$X=\sum_{ij}\tau_{ij}\otimes e_{ij}$。

证明。在超双代数$U(\mathcal{R})$中，我们有

$$\Delta(t_{ck})=\sum_{s}(-1)^{(|c|+|s|)(|s|+|k|)}t_{cs}\otimes t_{sk}.$$

因此，

$$\langle\tau_{pi}\tau_{rj},t_{ck}\rangle=\sum_{s}(-1)^{(|c|+|s|)(|s|+|k|)+(|c|+|s|)(|r|+|j|)}\langle\tau_{pi},t_{cs}\rangle\langle\tau_{rj},t_{sk}\rangle=\sum_{s}R_{cs}^{pi}R_{sk}^{rj},$$

其中$\langle\tau_{rj},t_{sk}\rangle=R_{sk}^{rj}$仅当$|r|+|j|=|s|+|k|$时非零。由Yang-Baxter方程(2.2)，

$$\begin{aligned}&\left\langle\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|j|)}R_{br}^{ap}\tau_{pi}\tau_{rj},t_{ck}\right\rangle\\&=\sum_{p,r,s}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|j|)}R_{br}^{ap}R_{cs}^{pi}R_{sk}^{rj}\\&=\sum_{p,r,s}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|r|)}R_{cs}^{br}R_{sk}^{ap}R_{rj}^{pi}\\&=\left\langle\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|r|)}\tau_{br}\tau_{ap}R_{rj}^{pi},t_{ck}\right\rangle.\end{aligned}$$

注意到$t_{ck},c,k=1,2,\cdots,m+n$生成超代数$U(\mathcal{R})$，我们有

$$\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|j|)}R_{br}^{ap}\tau_{pi}\tau_{rj}=\sum_{p,r}(-1)^{(|p|+|i|)(|b|+|r|)}\tau_{br}\tau_{ap}R_{rj}^{pi},$$

即，

$$\mathcal{R}X_1X_2=X_2X_1\mathcal{R}$$

例3.4 对于例2.2中给出的量子包络超代数$U_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$，其坐标代数$A_q(\mathfrak{gl}_{m|n})$有一组生成元$\tau_{ij},i,j=1,\cdots,m+n$满足RTT关系

$$\mathcal{R}X_1X_2 = X_2X_1\mathcal{R}, \tag{3.3}$$

其中 $\mathcal{R}$ 为(2.4)式给出的R-矩阵， $X=\sum_{i,j}\tau_{ij}\otimes e_{ij}$ 。具体来说，$U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)$ 在V上有自然表示

$$\rho: U_q\left(\mathfrak{gl}_{m|n}\right)\to \mathrm{End}V,\quad T^{(+)}\mapsto \mathcal{R}, T^{(-)}\mapsto \mathcal{R}^{-1},$$

其中，

$$\mathcal{R}^{-1}=\sum_i q^{-(-1)^{|i|}}e_{ii}\otimes e_{ii}+\sum_{i\neq j}e_{ii}\otimes e_{jj}-\left(q-q^{-1}\right)\sum_{i<j}(-1)^{|j|}e_{ij}\otimes e_{ji}$$

为 $\mathcal{R}$ 的逆矩阵，因此，相应的自然表示的矩阵元 $\tau_{kl}, k,l=1,\cdots,m+n$ 满足

$$\left\langle \tau_{kl}, t_{ii}^{+}\right\rangle = q^{(-1)^{|i|}\delta_{il}}, \left\langle \tau_{kl}, t_{ii}^{-}\right\rangle = q^{-(-1)^{|i|}\delta_{il}},$$

$$\left\langle \tau_{kl}, t_{ij}^{+}\right\rangle = \delta_{jk}\delta_{il}\left(q-q^{-1}\right)(-1)^{|j|}, \left\langle \tau_{kl}, t_{ji}^{-}\right\rangle = -\delta_{ik}\delta_{jl}\left(q-q^{-1}\right)(-1)^{|j|}, i<j.$$

容易验证，它们满足关系式

$$(\tau_{ak})^2=0, |a|+|k|=1,$$

$$\tau_{ak}\tau_{bk}=(-1)^{(|a|+|k|)(|b|+|k|)}q^{(-1)^{|k|}}\tau_{bk}\tau_{ak}, a>b,$$

$$\tau_{ak}\tau_{al}=(-1)^{(|a|+|k|)(|b|+|l|)}q^{(-1)^{|a|}}\tau_{al}\tau_{ak}, k>l,$$

$$\tau_{ak}\tau_{al}=(-1)^{(|a|+|k|)(|b|+|l|)}q^{(-1)^{|a|}}\tau_{al}\tau_{ak}, k>l,$$

$$\tau_{ak}\tau_{bl}=(-1)^{(|a|+|k|)(|b|+|l|)}\tau_{bl}\tau_{ak}+(-1)^{|a|(|b|+|l|)+|b||l|}\left(q-q^{-1}\right)\tau_{bk}\tau_{al}, a>b, k>l.$$

这等价于关系式(3.3)成立。

例 3.5 对于例 2.3 中给出的量子包络超代数 $U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$，其坐标代数 $A_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$ 有一组生成元 $\tau_{ij}, i,j=-n,\cdots,-1,1,\cdots,n$ 满足RTT关系

$$\mathcal{R}X_1X_2 = X_2X_1\mathcal{R}, \tag{3.4}$$

其中 $\mathcal{R}$ 为(2.5)式给出的R-矩阵， $X=\sum_{i,j}\tau_{ij}\otimes e_{ij}$ ，具体来说， $\rho: U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)\to \mathrm{End}V, T\mapsto \mathcal{R}$ 给出了量子包络超代数$U_q\left(\mathfrak{q}_n\right)$的自然表示，即，

$$\rho\left(t_{ii}\right)=\sum_j q^{\varphi(j,i)}e_{jj},\quad \rho\left(t_{ij}\right)=\left(q-q^{-1}\right)(-1)^{|i|}\left(e_{ji}-e_{-j,-i}\right).$$

相应地矩阵元 $\tau_{kl}, k,l=-n,\cdots,-1,1,\cdots,n$ 满足

$$\left\langle \tau_{kl}, t_{ii}\right\rangle = q^{\varphi(l,i)}\delta_{kl},\quad \left\langle \tau_{kl}, t_{ij}\right\rangle = \left(q-q^{-1}\right)(-1)^{|i|}\left(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{-i,l}\delta_{-j,k}\right),\quad i<j.$$

容易验证它们满足关系式

$$\begin{aligned}&q^{\varphi(i,j)}\tau_{ia}\tau_{jb}-(-1)^{(|i|+|a|)(|j|+|b|)}q^{\varphi(a,b)}\tau_{jb}\tau_{ia}\\&=(-1)^{|i||j|+|j||b|+|b||i|}\left(q-q^{-1}\right)\left(\left(\delta_{a<b}-\delta_{j<i}\right)\tau_{ja}\tau_{ib}+(-1)^{|j|+|b|}\left(\delta_{-a<b}-\delta_{j<-i}\right)\tau_{-j,a}\tau_{-i,b}\right).\end{aligned}$$

即，关系式(3.4)成立。

致　谢

本研究已经进入收尾阶段了，此时的我既激动又紧张，从开题到现在论文的顺利完成，有许多同学、老师都给予了我很大的帮助，在此，我想向他们表示我真诚的感谢。

首先，是我的导师常智华老师，该论文是在常智华老师的悉心指导下完成的，常老师思维开阔，知识储备丰富，提出的许多观点都很新颖，在论文写作过程中多次和我就论文问题进行深入探讨，并且给予我许多切实可行的指导性建议。更重要的是，常老师对我来说亦师亦友，作为他的学生，不仅能学到学术方面的知识，更能学到许多做人做事的道理，在学习、生活上，常老师都给了我很大的帮助，能够做他的学生，我特别自豪！

其次，是和我一起上讨论班的小伙伴陆狄雷同学和刘宁同学，在该论文创作的过程中，我们一起探讨彼此的论文，他们总是能准确地发现问题所在，并对此提出建议，在查询资料遇到问题时，他们也会向我推荐合适的书籍、论文等资料，大大地节省了查询的时间，这些都对我的论文顺利完成有很大的帮助。

此外，我还要感谢数学学院的所有同学，在我论文创作过程中，难免会心情低落，陷入一种负面状态中，他们组织的许多课余活动给了我放松的空间，让我能及时调整状态，继续进行学术的研究。

最后，还要感谢文献中提到的许多的数学界前辈，他们优秀的研究成果对我的论文研究也有很大的启发。同时，广东省自然科学基金－面上项目的支持也给予了我很大的帮助。

在整个论文写作过程中，给予我帮助的人有很多，最后，我再一次向他们表示我的感谢！

基金项目

本论文由广东省自然科学基金(项目编号：2020A1515011417)支持。

参考文献

[1] Kulish, P.P. and Reshetikhin, N.Y. (1989) Universal R-Matrix of the Quantum Superalgebra $\mathfrak{osp}(2|1)$. *Letters in Mathematical Physics*, **18**, 143-149. https://doi.org/10.1007/BF00401868

[2] Chaichian, M. and Kulish, P. (1990) Quantum Lie Superalgebras and Q-Oscillators. *Physics Letters B*, **234**, 72-80. https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)92004-3

[3] Olshanski, G.I. (1992) Quantum Universal Enveloping Superalgebra of Type Q and a Super-Extension of the Hecke Algebra. *Letters in Mathematical Physics*, **24**, 93-102. https://doi.org/10.1007/BF00402673

[4] Zhang, R.B. (1993) Finite-Dimensional Irreducible Representations of the Quantum Supergroup $\mathrm{U}_q(\mathfrak{gl}(m|n))$. *Journal of Mathematical Physics*, **34**, 1236-1254. https://doi.org/10.1063/1.530198

[5] Bracken, A.J., Gould, M.D. and Zhang, R.B. (1990) Quantum Supergroups and Solutions of the Yang-Baxter Equation. *Modern Physics Letters A*, **5**, 831-840. https://doi.org/10.1142/S0217732390000925

[6] Gould, M.D., Zhang, R.B. and Bracken, A.J. (1993) Quantum Double Construction for Graded Hopf Algebras. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **47**, 353-375. https://doi.org/10.1017/S0004972700015197

[7] Grantcharov, D., Jung, J.-H., Kang, S.-J. and Kim, M. (2010) Highest Weight Modules over Quantum Queer Superalgebra $\mathrm{U}_q(\mathfrak{q}_n)$. *Communications in Mathematical Physics*, **296**, 827-860. https://doi.org/10.1007/s00220-009-0962-6

[8] Zhang, Y. (2020) The First and Second Fundamental Theorems of Invariant Theory for the Quantum General Linear Supergroup. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**, 106411. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2020.106411

[9] Faddeev, L.D., Reshetikhin, N.Y. and Takhtajan, L.A. (1990) Quantization of Lie Groups and Lie Algebras. *Advanced Series in Mathematical Physics*, **1**, 193-225. https://doi.org/10.1142/9789812798336_0016

[10] Ding, J. and Frenkel, I. (1993) Isomorphism of Two Realizations of Quantum Affine Algebra $\mathrm{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$. *Communications in Mathematical Physics*, **156**, 277-300. https://doi.org/10.1007/BF02098484

[11] S. Montgomery Hopf 代数及其在环上的作用[M]. 北京：高等教育出版社, 2018: 149-151, 1-16.