Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1190-1198
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012142

Hans汉斯

直纹面问题的解题思路分析

幸冬梅

南昌大学数学系，江西 南昌
Email: dongdongsh2000@sina.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月20日；发布日期：2020年12月28日

摘 要

通过对直纹面的分析与研究，讨论直线在曲面上的问题。分析实例，借助坐标变换，直面曲面的几何特征，判断曲面所属类型；探讨将锥面、柱面的证明问题，转化为计算题，完成问题的证明。

关键词

直纹面，柱面锥面，直线参数方程，恒等式

Analysis on Solving Problems of Ruled Surface

Dongmei Xing

Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang Jiangxi
Email: dongdongsh2000@sina.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 20th, 2020; published: Dec. 28th, 2020

Abstract

By analyzing and studying on ruled surfaces, we deal with the problems of lines on the surfaces. Using coordinate transformations when some surfaces problems are discussed, the types of the surfaces are determined according to the geometrical features of the surfaces. The method about turning a proof of cones or cylinders into a calculation problem will be discussed.

Keywords

Ruled Surface, Cylinder Cone, Linear Parametric Equation, Identity

文章引用: 幸冬梅. 直纹面问题的解题思路分析[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1190-1198.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012142

1. 引言

几何课程的学习从初中数学开始到大学的高等数学一直伴随着学生们的学习生涯，然而与几何相关的课程的成绩，以及学生们对这些课程的钻研程度相比于代数、微积分却有相当的差距。作为富有直观特征的几何问题，充分利用数与形的相结合，添加适当的示意图，对于学习几何课程有极大的帮助。在解析几何的学习中，我们建立适当的仿射标架或直角标架，利用曲面或其它空间几何图形的几何特征建立它们的方程；反过来，通过讨论方程，总结几何图形的性质。

二次曲面有五类曲面，分别是椭球面、双曲面、抛物面、锥面和柱面，其中柱面、锥面、单叶双曲面和双曲抛物面(亦称马鞍面)均是直纹面[1] [2] [3]。曲面为直纹面是指存在一族直线，该族直线中的任意一条直线均在曲面上，且曲面上任意一点在该直线族的某条直线上；该直线族称为直纹面的一族直母线。直纹面在实际中有着广泛的应用[4] [5]，是教学中相对较难处理的曲面。在后续内容中，我们首先通过实例讨论求通过同一点且在曲面上的直线，分析处理直线在二次曲面上的问题；其次证明二次曲面为柱面、锥面的方法解析；再讨论解题过程中如何利用发散思维灵活运用坐标变换与柱面、锥面方程特点，最后总结本文。

2. 直纹面与直线的关系

直线在曲面上的相关题设可能有：求解通过曲面上的一点的直线；证明满足某些条件的直线在曲面上。

例 1 求二次曲面 $(x-y+1)(y-z+2)-2(x+y-1)=0$ 上过点 $(1,1,1)$ 的直线方程。

分析：这类题目通常有两种不同的解题思路。

方法一因式分解法。类似于大学教材[1] [2] [3]中证明直纹面的方法，将二次曲面方程变换成等式左右两边均为两个因式乘积的形式，如 $AB=CD$，转化为比值关系(内项乘积 = 外项乘积)：$\frac{A}{C}=\frac{D}{B}\triangleq\frac{\mu_1}{\upsilon_1}$ [1] 或 $\frac{A}{D}=\frac{C}{B}\triangleq\frac{\mu_2}{\upsilon_2}$，从而得到两簇直线，将已给点坐标分别代入两簇直线方程，一般可以得到 $\mu:\upsilon$ 两组比值；

方法二直线参数与恒等式结合法。假设所求直线的方向为 $\boldsymbol{\upsilon}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$，将直线的参数方程[1] [2] (用 $t\in R$ 表示参数)代入曲面方程中，得到的是关于参数 $t\in R$ 的恒等式，从恒等式角度出发 [2]，一般可以得到 $X:Y:Z$ 的两组值。

解.

方法一 $(x-y+1)(y-z+2)-2(x+y-1)=0$

$$(x-y+1)(y-z+2)=2(x+y-1)$$

$$\frac{x-y+1}{2}=\frac{x+y-1}{y-z+2}\triangleq\lambda_1 \text{ 或 } \frac{x-y+1}{x+y-1}=\frac{2}{y-z+2}\triangleq\frac{1}{\lambda_2}\text{，其中 } \lambda_1,\lambda_2\in R,$$

得两簇直线如下：$\begin{cases}x-y+1-2\lambda_1=0\\x+y-1-\lambda_1(y-z+2)=0\end{cases}$，$\begin{cases}\lambda_2(x-y+1)-(x+y-1)=0\\y-z+2-2\lambda_2=0\end{cases}$

[1] v_1,μ_1 不全为 0；若 $C=0$ 或 $B=0$，则取 $v_1=0$，$\mu_1\neq0$。

[2] 两个多项式恒等，对应系数相等。

将点$(1,1,1)$的人坐标代入上面的两簇直线，得$\lambda_1=\dfrac{1}{2}$，$\lambda_2=1$

故所求的直线方程为

$$\begin{cases}x-y=0\\2x+y+z-4=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$$

方法二 设所求直线的方程为

$$L:\ \frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z}$$

因为直线L在曲面上，所以L上的点$P(1+Xt,1+Yt,1+Zt)(t\in R)$满足曲面的方程，有

$$\left[(X-Y)t+1\right]\left[(Y-Z)t+2\right]-2\left[(X+Y)t+1\right]=0，\ \forall t\in R.$$

即$(X-Y)(Y-Z)t^2-(3Y+Z)t=0$，$\forall t\in R$。

因此

$$(X-Y)(Y-Z)=0，\ 3Y+Z=0.$$

由此得

$$X:Y:Z=1:1:(-3)，\text{或}\ X:Y:Z=1:0:0$$

故所求直线方程为

$$L:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}\ \text{或}\ L:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$$

例 2 设直线$L:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$与二次曲面

$$\Sigma: Ax^2+By^2+Cz^2+2(ax+by+cz)+D=0$$

有三个不同的交点M_1,M_2,M_3。证明整条直线L都在二次曲面Σ上。

证明 分析：这类题目可以利用例 1 中的方法二。将直线L的方程写成参数方程

$$L:\ \begin{cases}x=x_0+Xt,\\y=y_0+Yt,\\z=z_0+Zt.\end{cases}\tag{1}$$

式(1)代入曲面方程，得

$$A(x_0+Xt)^2+B(y_0+Yt)^2+C(z_0+Zt)^2+2\left[a(x_0+Xt)+b(y_0+Yt)+c(z_0+Zt)\right]+D=0\tag{2}$$

整理得

$$\begin{aligned}&\left(AX^2+BY^2+CZ^2\right)t^2+2\left(Ax_0X+By_0Y+Cz_0Z+aX+bY+cZ\right)t\\&+Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2\left(ax_0+by_0+cz_0\right)+D=0\end{aligned}\tag{3}$$

设直线上的点M_1,M_2,M_3对应的参数为t_1,t_2,t_3，即$M_i\left(x_0+Xt_i,y_0+Yt_i,z_0+Zt_i\right)$，$i=1,2,3$。由于$M_1,M_2,M_3$在二次曲面$\Sigma$上，所以$t_1,t_2,t_3$满足(2)，即$t_1,t_2,t_3$满足(3)。由此可知

$$AX^2+BY^2+CZ^2=0,$$

否则(3)式是关于 t 的二次方程，不可能有三个根。同理可得

$$Ax_0X+By_0Y+Cz_0Z+aX+bY+cZ=0.$$

又因为(3)式有解 t_1,t_2,t_3，所以

$$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2\left(ax_0+by_0+cz_0\right)+D=0.$$

于是任何实数 t 都满足(3)，由此可知直线(1)上任意一点 M 的坐标 $\left(x,y,z\right)=\left(x_0+Xt,y_0+Yt,z_0+Zt\right)$ 都满足(2)。故直线 L 在二次曲面 Σ 上。

3. 证明曲面为锥面的方法解析

证明一个曲面 Σ 为锥面，有二种解题思路：

思路一通过判断曲面 Σ 方程为齐次方程完成证明过程[1] [2]；

思路二将证明题转化为计算题，求以某个适当的点作为顶点，由已知曲面与某个平面(或曲面)的交线作为准线的锥面 $\Sigma1$ 方程，判断锥面 $\Sigma1$ 与曲面 Σ 的方程相同从而完成证明过程；

例 3 证明曲面 $\Sigma:\left(x+y-z\right)^2-\left(y-2z+2\right)\left(x-z\right)=0$ 是锥面，求出它的顶点和一条准线。

分析：

方法一、齐次方程法。分二步：

1) 判断对应曲面的方程是否为齐次方程，或通过简单的点的直角坐标变换得到曲面的方程为齐次方程，那么就证明了已给的曲面为锥面，顶点为原坐标系(或新的仿射坐标系)的原点[1] [2]；

2) 任选择一个与曲面 $\Sigma:\left(x+y-z\right)^2-\left(y-2z+2\right)\left(x-z\right)=0$ 相交的平面或曲面(以简单为原则，可以考虑选择某个坐标平面)，设其交线为 S，则 S 为一条准线。

方法二、因式分解法，将证明题转化为计算题。分三步：

1) 找锥面的顶点。类似于大学教材[1] [2]中证明直纹面的方法，将曲面方程调整成等式左右两边均为两个因式乘积的形式，如 $AB=CD$，转化为比值关系：$\dfrac{A}{C}=\dfrac{D}{B}\triangleq\dfrac{\mu_1}{\upsilon_1}$，取 $\dfrac{\mu_1}{\upsilon_1}$ 的两组值，得到两条直线，求其交点 P；

2) 找准线。任选择一个与曲面 $\Sigma:\left(x+y-z\right)^2-\left(y-2z+2\right)\left(x-z\right)=0$ 相交的平面或曲面(以简单为原则，可以选择某个坐标平面)，设其交线为 S；

3) 求以 P 为顶点、S 为准线的锥面 $\Sigma1$ 方程。判断两个曲面 $\Sigma1$ 与 Σ 方程的一致性。

证明.

方法一齐次方程法，利用坐标变换。在进行坐标变换时，尽可能利用右手直角坐标变换，使得曲面方程在新的直角标架 $\mathrm{II}:\left[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\right]$ 中为齐次方程。

作移轴坐标变换

$$\begin{cases}x=x'+1\\y=y'\\z=z'+1\end{cases}$$

曲面 Σ 的方程化为 $\left(x'+y'-z'\right)^2-\left(y'-2z'\right)\left(x'-z'\right)=0$。

这是一个 2 次齐次方程，所以曲面 Σ 是锥面，它的顶点是新的右手直角坐标系的原点 $O'(1,0,1)$，它的一条准线可取为以 O' 为球心，半径为 1 的球面与曲面 Σ 的交线，即

$$\begin{cases}\left(x+y-z\right)^2-\left(y-2z+2\right)\left(x-z\right)=0,\\\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z-1\right)^2=1.\end{cases}$$

方法二因式分解法， 将证明题转化为计算题。

曲面Σ有直母线簇：$\begin{cases} n(x+y-z)=m(x-z) \\ m(x+y-z)=n(y-2z+2) \end{cases}$ (m，n不全为0)，分别取$\frac{m}{n}=1, \frac{m}{n}=2$，得直线

$$l_1:\begin{cases} x+y-z=x-z \\ y-2z+2=x+y-z \end{cases},\quad l_2:\begin{cases} x+y-2=2x-2z \\ 2x+2y-2z=y-2z+2 \end{cases}$$

经计算可得l_1与l_2相交与点$P(1,0,1)$。

平面$z=0$截曲面Σ得到曲线$S:\begin{cases} (x+y)^2-(y+2)x=0 \\ z=0 \end{cases}$

以S为准线，P为顶点的锥面记为$\Sigma 1$。求锥面$\Sigma 1$的方程。在$\Sigma 1$上任取一点$M(x,y,z)(M\neq P)$，则存在$M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$，使得M_0,M,P共线，有以下式子成立：

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x_0-1}=\dfrac{y-0}{y_0-0}=\dfrac{z-1}{z_0-1} & (4) \\ (x_0+y_0)^2-(y_0+2)x_0=0 & (5) \\ z_0=0 & (6) \end{cases}$$

将(6)代入(4)得：

$$x_0=\frac{z-x}{z-1},\quad y_0=-\frac{y}{z-1} \tag{7}$$

将(7)代入(5)$\left(-\frac{x-z}{z-1}-\frac{y}{z-1}\right)^2-\left(-\frac{y}{z-1}+2\right)\left(1-\frac{x-1}{z-1}\right)=0$

化简整理得锥面$\Sigma 1$的方程为：$(x+y-z)^2-(y-2z+2)(x-z)=0$，易知$P$满足$\Sigma 1$的方程。

故曲面$\Sigma:(x+y-z)^2-(y-2z+2)(x-z)=0$是锥面，$S$为它的一条准线，$P(1,0,1)$为顶点。

4. 证明曲面为柱面的方法解析

证明一个曲面Σ为柱面，亦有三种解题思路：

思路一判断方程是否只含有两个自变量，或通过坐标变换[1] [2] (仿射坐标变换[3]或直角坐标变换)转化成只含有两个自变量的方程，若是则完成证明；

思路二类似于锥面的解析法二，将证明题转化为计算题。分三步：找出母线方向；找一条准线；求柱面方程，判断所求柱面方程与已知曲面方程的一致。思路三直线参数与恒等式结合法，类似于例1中的方法二；

思路三直线参数与恒等式结合法，类似于例1中的方法二。曲面$\Sigma:F(x,y,z)=0$是柱面的充要条件是存在一个固定方向$X:Y:Z$使得对曲面上任意一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线

$$L:\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+Zt \end{cases}$$

上的点都在曲面Σ上[1] [2]，即

[3]代数曲线的次数在任何一个仿射坐标系均相同。直线是一次代数曲线，两条相互平行的直线在任何一个彷射坐标系中均平行[2]，因为平行直线的方向向量可以取为同一个非零向量。

$$F\left(x_0+Xt,y_0+Yt,z_0+Zt\right)=0$$

是一个关于 t 的恒等式。这种思路的关键是找出这样的固定方向 $X:Y:Z$。

例 4 证明：在右手直角坐标系 $\mathrm{I}:\left[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right]$ 中，曲面 $\Sigma:(x-2y-2z+2)(2x+y-z)=1$ 表示的图形是柱面，并求出它的母线方向。

证明：

方法一坐标变换法。在进行坐标变换时，尽可能利用右手直角坐标变换使得曲面方程在新的仿射标架 $\mathrm{II}:\left[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\right]$ 中只含两个自变量。

令

$\begin{cases}x'=x-2y-2z+2\\ y'=2x+y-z\\ z'=z\end{cases}$，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\left(x'+y'+4z'-2\right)\\ y=\dfrac{1}{5}\left(-2x'+y'-3z'\right)+\dfrac{4}{5}\\ z=z'\end{cases}\tag{8}$$

其中，从标架 I 到标架 II 的点坐标变换公式(8)中右端 x',y',z' 的系数分别构成了基向量 $\boldsymbol{e}_1'=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2'=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$，它们是仿射标架 $\mathrm{II}:\left[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\right]$ 的基向量 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ 在原来的右手直角标架 $\left[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right]$ 中的坐标。

在新仿射标架 $\mathrm{II}:\left[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\right]$ 下，曲面 Σ 的方程为 $x'y'=1$，它是一个母线方向为 $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{e}_3'=(4,-3,5)^{\mathrm{T}}$，准线为 $C:\begin{cases}x'y'=1\\ z'=0\end{cases}$ 的柱面。在原右手直角标架 $\mathrm{I}:\left[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right]$ 下，柱面 Σ 的母线方向为 $(4,-3,5)^{\mathrm{T}}$，其中一条准线为 $C:\begin{cases}(x-2y-2z+2)(2x+y-z)=1\\ z=0\end{cases}$

方法二 因式分解法，将证明题转化为计算题。

直线[4] $\begin{cases}x-2y-2z+2=1,\\ 2x+y-z=1\end{cases}$

的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=\left(\begin{vmatrix}-2&-2\\1&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=(4,-3,5)^{\mathrm{T}}$，

下面求以曲线

$$C:\begin{cases}(x-2y-2z+2)(2x+y-z)=0,\\ z=0\end{cases}\tag{9}$$

为准线，以 $\boldsymbol{v}=(4,-3,5)^{\mathrm{T}}$ 为母线方向的柱面 Σ_1 的方程。

---

[4] 所给的直线是曲面 Σ 的一簇直母线：$\dfrac{x-2y-2z+2}{1}=\dfrac{1}{2x+y-z}\triangleq\lambda(\lambda\in R)$，即直线簇 $\begin{cases}x-2y-2z+2=\lambda\\ \lambda(2x+y-z)=1\end{cases}(\lambda\in R)$ 中的一条直线，此处取 $\lambda=1$。

过 C 上一点 $M(x',y',0)$ 的直母线参数方程为 $\begin{cases} x = x'+4t, \\ y = y'-3t, \\ z = 5t. \end{cases}$

$$故\ t=\frac{z}{5}，\quad x'=x-\frac{4}{5}z，\quad y'=y+\frac{3}{5}z \tag{10}$$

将(10)代入(9)的第一个方程，得柱面 Σ_1 的方程

$$\left[\left(x-\frac{4}{5}z\right)-2\left(y+\frac{3}{5}z\right)+2\right]\left[2\left(x-\frac{4}{5}z\right)+\left(y+\frac{3}{5}z\right)\right]=0$$

整理得

$$(x-2y-2z+2)(2x+y-z)=1 \tag{11}$$

方程(11)与 Σ 的方程相同，证明了 $\Sigma=\Sigma_1$ 是柱面，它的母线方向为 $\boldsymbol{v}=(4,-3,5)^{\mathrm{T}}$ 。□

例 5 证明：在仿射坐标系中，方程 $x^2+y^2+z^2+2xz-1=0$ 表示的曲面是柱面。

证明

说明：利用方法三恒等式与直线参数结合法，类似于例 1 中的方法二。

注意到：曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 是柱面的充要条件是存在一个固定方向 $X:Y:Z$ 使得对曲面上任意一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ ，直线

$$L:\begin{cases} x = x_0+Xt, \\ y = y_0+Yt, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = z_0+Zt \end{cases}$$

上的点都在曲面 Σ 上，即

$$F(x_0+Xt,y_0+Yt,z_0+Zt)=0$$

是一个关于 t 的恒等式。所以我们只需找出这样的方向 $X:Y:Z$ 。

将曲面方程改写成 $(x+z)^2+y^2-1=0$ 。考虑关于 t 的方程

$$(x_0+Xt+z_0+Zt)^2+(y_0+Yt)^2-1=0, \tag{12}$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 满足方程 $(x_0+z_0)^2+y_0^2-1=0$ 。整理得

$$\left[(X+Z)^2+Y^2\right]t^2+2\left[(x_0+z_0)(X+Z)+y_0Y\right]t=0. \tag{13}$$

当 $X+Z=0$ 且 $Y=0$ ，即 $X:Y:Z=1:0:(-1)$ 时，式(13)成为恒等式。因此它是一个柱面，方向为 $1:0:(-1)$ 。

附注：曲面 Σ 的准线可取 $C:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$ 但是平面 $y=0$ 与柱面的交线 $\begin{cases} (x+z)^2=1, \\ y=0 \end{cases}$ 是两条母线，不能作为准线。□

例 6 证明：在右手直角坐标系中，方程 $f(2x+y-3z,x-2y)=0$ 表示的图形是柱面。求出它的母线方向；找出它的一条准线。

证明

方法一坐标变换法(使用直角坐标变换) [2]。

设原右手直角坐标系为 $\mathrm{I}:[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 。两个平面

$$\pi_1: 2x+y-3z=0 \text{ 与 } \pi_2: x-2y=0$$

垂直，且都经过原点 O。分别以 π_1,π_2 为新右手直角坐标系 $\mathrm{II}:[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$ 的 $y'Oz'$ 平面 $x'=0$ 和 $x'Oz'$ 平面 $y'=0$，取这两个平面的单位法向量为 $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$，再取 $\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'$，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1'=\dfrac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_2-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}_3'=-\dfrac{6}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_1-\dfrac{3}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_2-\dfrac{5}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_3.\end{cases}$$

于是，II 到 I 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{14}}&\dfrac{1}{\sqrt{5}}&-\dfrac{6}{\sqrt{70}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{14}}&-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&-\dfrac{3}{\sqrt{70}}\\ -\dfrac{3}{\sqrt{14}}&0&-\dfrac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{14}}&\dfrac{1}{\sqrt{14}}&-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}&-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&0\\ -\dfrac{6}{\sqrt{70}}&-\dfrac{3}{\sqrt{70}}&-\dfrac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

所以

$$x'=\frac{1}{\sqrt{14}}(2x+y-3z),\quad y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y),\quad z'=-\frac{1}{\sqrt{70}}(6x+3y+5z),$$

即有

$$2x+y-3z=\sqrt{14}x',\quad x-2y=\sqrt{5}y'.$$

在新坐标系中，方程 $f(2x+y-3z,x-2y)=0$ 化为 $f\left(\sqrt{14}x',\sqrt{5}y'\right)=0$。所以它的图形是一个母线平行于 z' 轴(即 π_1,π_2 的交线)的柱面，母线方向是

$$\boldsymbol{e}_3'=-\frac{6}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_2-\frac{5}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_3\,/\!/\,6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3.$$ [5]

在坐标系 II 中，它的一条准线为

$$C:\begin{cases}f\left(\sqrt{14}x',\sqrt{5}y'\right)=0,\\ z'=0.\end{cases}$$

这条准线在坐标系 I 中的方程是

$$C:\begin{cases}f(2x+y-3z,x-2y)=0,\\ 6x+3y+5z=0.\end{cases}\qquad\square$$

方法二 将证明题转化为计算题。找出母线方向和一条准线，求柱面方程。

两个平面 $\pi_1:2x+y-3z=0$ 与 $\pi_2:x-2y=0$ 的交线方向是 $6:3:5$。因此 $\pi:6x+3y+5z=0$ 是一个与 π_1,π_2 都垂直的平面。考虑以

$$C:\begin{cases}F(x,y,z)\equiv f(2x+y-3z,x-2y)=0,\\ 6x+3y+5z=0\end{cases}$$

[5] $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线，此处“$\boldsymbol{e}_3'=-\frac{6}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_2-\frac{5}{\sqrt{70}}\boldsymbol{e}_3\,/\!/\,6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$”是指 $\boldsymbol{e}_3'$ 与向量 $6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$ 共线。故，母线方向亦为 $6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$。

为准线，母线方向为$6:3:5$的柱面Σ。设$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$，过$M$点的母线与准线$C$交于点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)\equiv f(2x_0+y_0-3z_0,x_0-2y_0)=0 & (14) \\ 6x_0+3y_0+5z_0=0 & (15) \\ x=x_0+6u,\ \ y=y_0+3u,\ \ z=z_0+5u,\ \ u\in R & (16) \end{cases}$$

由(16)得

$$x_0=x-6u,\quad y_0=y-3u,\quad z_0=z-5u \tag{17}$$

将(17)代入(14)，(15)，得

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} F(x-6u,y-3u,z-5u)\equiv f\big(2(x-6u)+(y-3u)-3(z-5u),(x-6u)-2(y-3u)\big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = f(2x+y-3z,x-2y)=0, \\ 6(x-6u)+3(y-3u)+5(z-5u)=0 \end{cases}$$

所以方程组(I)等价于

$$\begin{cases} f(2x+y-3z,x-2y)=0, \\ 70u=6x+3y+5z. \end{cases}$$

由上面第二个方程得$u=(6x+3y+5z)/70$，代入上面第一个方程得柱面Σ的方程

$$f(2x+y-3z,x-2y)=0.$$

这说明方程$f(2x+y-3z,x-2y)=0$的图形是柱面Σ，它的母线方向是$6:3:5$，它的一条准线是C。

注 如果题给的两个平面不垂直，则第一种证明方法失效。例如，方程$f(x+y-3z,x-2y)=0$表示的图形也是柱面，但是不能通过直角坐标变换来证明，然而可以利用仿射坐标变换来证明。□

5. 结束语

本文分析了直纹面的一些相关问题，是同学们学习中感觉较难处理的问题。利用坐标的仿射变换法证明问题时，用到了仿射坐标变换下直线的平行性不变的性质，引入该方法主要是考虑平行直线的方向向量可以取同一个向量，只提这点可能有些欠周到(因为其中还用到了关键点：共线三点在任何仿射坐标系中均共线)。

参考文献

[1] 丘维声. 解析几何[M]. 第三版. 北京: 北京大学出版社, 2017: 86, 90, 99, 102, 140, 216.

[2] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 135.

[3] 廖华奎, 王宝富. 解析几何教程[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2007.

[4] 易中, 袁承志. 直纹面建筑[J]. 建筑技术开发, 2013, 40(2): 57-60.

[5] Do Carmo, M.P. (1999) Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 32-36.