Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 32-36
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111005

Hans汉斯

一个涉及Beta函数积分不等式的多种推广

吴春阳，洪 勇

广东白云学院数学教研室，广东 广州
Email: hongyonggdcc@yeah.net

收稿日期：2020年12月11日；录用日期：2021年1月8日；发布日期：2021年1月15日

摘 要

本文对南开大学的一个考研积分不等式进行分析，给出了一种解答，并在此基础上对其进行了多种形式的推广，有助于在教学中引导学生进行数学探讨。

关键词

积分不等式，Hölder不等式，Beta函数，Gamma函数，推广

Some Extensions of an Integral Inequality with Beta Function

Chunyang Wu, Yong Hong

Department of Mathematics, Guangdong Baiyun College, Guangzhou Guangdong
Email: hongyonggdcc@yeah.net

Received: Dec. 11th, 2020; accepted: Jan. 8th, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

We analyse the integral inequality of a postgraduate examination at Nankai University, a method of proof is given, and on the basis several extensions have been made to it, it is helpful to guiding students to carry out mathematics research.

Keywords

Integral Inequality, Hölder's Inequality, Beta Function, Gamma Function, Extension

文章引用: 吴春阳, 洪勇. 一个涉及 Beta 函数积分不等式的多种推广[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 32-36.
DOI: 10.12677/pm.2021.111005

南开大学近年的数学考研题中有这样一个积分不等式证明题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，试证：

$$\int_0^1 |f'(x)|^3 \mathrm{d}x \ge \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2. \tag{1}$$

这个数学证明题有一定困难，一是不等式的右边是一个具体的数字，而不是一个数学式子，提供的解题思路很少。二是条件与结论中涉及的三个被积函数 $f(x)$，$xf(x)$ 及 $f'(x)$ 之间有什么关系需要弄清楚。因此其证明有较大难度。下面给出一种利用重积分的证明方法，并在此基础给出多种形式的推广。

式(1)的证明：设 $x\in[0,1]$，利用分部积分法，有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x)-\int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t,$$

两边同时积分，得

$$\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

交换积分次序，并根据已知条件，有

$$\int_0^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t=1-\int_0^1 t(1-t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

又因为由已知条件，有

$$\int_0^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=1-1=0,$$

据此并利用 Hölder 不等式(见[1])，有

$$1=\int_0^1 t(1-t)f'(t)\mathrm{d}t\le\left(\int_0^1[t(1-t)]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^1|f'(t)|^3\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{3}},$$

利用 Beta 函数与 Gamma 函数(见[2])的定义与性质，有

$$\begin{aligned}\int_0^1[t(1-t)]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t&=\int_0^1 t^{\frac{5}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}-1}\mathrm{d}t=B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)}\\&=\frac{1}{4!}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1}{4!}\left(\frac{3}{2}\right)^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4!}\frac{9}{4}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right),\\&=\frac{1}{4!}\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{128}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{128}\frac{\pi}{\sin\pi/2}=\frac{3\pi}{128}\end{aligned}$$

所以

$$1 \le \left(\frac{3\pi}{128}\right)^2 \int_0^1 \left|f'(x)\right|^3 \mathrm{d}x,$$

从而(1)式成立。

下面我们利用此证明方法，给出几种推广。

命题 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，$n \ge 2$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$，则有

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|^n \mathrm{d}x \ge \left[\frac{n}{4(n+1)(3n-1)}\right]^{1-n} B^{1-n}\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\right).$$

证明：由前述证明，可得

$$\int_0^1 x(1-x)f'(x)\mathrm{d}x = 1,$$

利用 Hölder 不等式，有

$$1 = \int_0^1 x(1-x)f'(x)\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 \left|f'(x)\right|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 \left[x(1-x)\right]^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

所以

$$1 \le \int_0^1 \left|f'(x)\right|^n \mathrm{d}x \left(\int_0^1 \left[x(1-x)\right]^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x\right)^{n-1},$$

又因为

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[x(1-x)\right]^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x &= B\left(\frac{n}{n-1}+1,\frac{n}{n-1}+1\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{n-1}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{n-1}+2\right)} \\
&= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n-1}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n-1}+4\right)} = \frac{n\Gamma^2\left(\frac{1}{n-1}\right)}{4(n+1)(3n-1)\Gamma\left(\frac{2}{n-1}\right)} \\
&= \frac{n}{4(n+1)(3n-1)} B\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\right),
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|^n \mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 \left[x(1-x)\right]^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x\right)^{1-n} = \left[\frac{n}{4(n+1)(3n-1)}\right]^{1-n} B^{1-n}\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\right).$$

注：当 $n=3$ 时，便得到式(1)。

命题 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $2n+1$ 阶连续导数，$n \ge 0$，$m \ge 2$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，且

$$\int_0^1 x^k f^{(k-1)}(x)\mathrm{d}x = k!,\quad k = 1,2,\cdots,2(n+1).$$

则有

$$\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^m \mathrm{d}x \ge \left[(2n+1)!\right]^m B^{1-m}\left(\frac{m}{m-1}(2n+1)+1,\frac{m}{m-1}+1\right).$$

证明：利用分部积分法，有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x) - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t = xf(x) - \frac{1}{2}x^2 f'(x) + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f''(t)\mathrm{d}t$$
$$= xf(x) - \frac{1}{2!}x^2 f'(x) + \frac{1}{3!}x^3 f''(x) - \frac{1}{3!}\int_0^x t^3 f'''(t)\mathrm{d}t = \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}f^{(k-1)}(x) - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n+1} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

两边同时积分并利用已知条件，得到

$$\int_0^1\int_0^x f(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k f^{(k-1)}(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1\int_0^x t^{2n+1} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$= 1 - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 (1-t)t^{2n+1} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

又因为

$$\int_0^1\int_0^x f(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 1-1=0,$$

所以有

$$(2n+1)! = \int_0^1 (1-t)t^{2n+1} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$$
$$\le \left(\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^m \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_0^1 \left[x^{2n+1}(1-x)\right]^{\frac{m}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-1}{m}}$$
$$\le \left(\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^m \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}} B^{\frac{m-1}{m}}\left(\frac{m}{m-1}(2n+1)+1, \frac{m}{m-1}+1\right),$$

于是

$$\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^m \mathrm{d}x \ge \left[(2n+1)!\right]^m B^{1-m}\left(\frac{m}{m-1}(2n+1)+1, \frac{m}{m-1}+1\right).$$

注：当 $n=0$，$m=3$ 时，则可得到式(1)。

命题 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $2n+1$ 阶连续导数，$n \ge 0$，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1,\quad \int_0^1 x^k f^{(k-1)}(x)\mathrm{d}x = k!,\quad k=1,2,\cdots,2(n+1)$$

则有

$$\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^{2n+3}\mathrm{d}x \ge \left[2(n+2)\right]^{2(n+1)}\left[(2n+1)!\right]^{2n+3}.$$

证明：仿命题 2 的证明，可得

$$(2n+1)! = \int_0^1 (1-x)x^{2n+1} f^{(2n+1)}(x)\mathrm{d}x,$$

利用涉及多个函数的 Hölder 不等式(见[1])，有

$$
\begin{aligned}
\left[(2n+1)!\right]^{2n+3} &= \left(\int_0^1 (1-x)xx\cdots xf^{(2n+1)}(x)\mathrm{d}x\right)^{2n+3} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{2n+1}\int_0^1 x^{2n+3}\mathrm{d}x\right)\int_0^1 (1-x)^{2n+3}\,\mathrm{d}x\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^{2n+3}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2(n+2)}\right]^{2(n+1)}\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^{2n+3}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\int_0^1 \left|f^{(2n+1)}(x)\right|^{2n+3}\mathrm{d}x \ge \left[2(n+2)\right]^{2(n+1)}\left[(2n+1)!\right]^{2n+3}.
$$

参考文献

[1] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1997: 20-22.

[2] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 372-382.