

二维Burgers方程的分裂高阶有限差分方法

马佳琪, 王 博

中国民航大学理学院, 天津
Email: bowangcauc@163.com

收稿日期: 2020年12月10日; 录用日期: 2021年1月8日; 发布日期: 2021年1月15日

摘 要

本文主要研究了二维Burgers方程的分裂高阶差分方法, 利用能量的方法, 证明了所提出的差分格式在时间上具有二阶收敛率以及在空间上具有四阶收敛率。数值结果验证了算法的精度和有效性。

关键词

Burgers方程, 有限差分方法, 收敛性, 稳定性

The Splitting High-Order Finite Difference Method of Two-Dimensional Burgers Equation

Jiaqi Ma, Bo Wang

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin
Email: bowangcauc@163.com

Received: Dec. 10th, 2020; accepted: Jan. 8th, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

The study is concerned with the splitting higher-order finite difference method of two-dimensional Burgers equation. By using the energy method, the proposed difference scheme is proved to have the second-order convergence rate in time and the fourth-order convergence rate in space. The accuracy and efficiency of the algorithm are verified by numerical findings.

Keywords

Burgers Equations, Finite Difference Method, Convergence, Stability

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在如今这个科技快速发展的情势下, 偏微分方程的理论形成和发展在数学及科学技术中应用广泛, Burgers 方程作为其重要分支, 应用于数学及社会生活的许多领域, 它作为最简单的非线性对流扩散的模型, 在湍流、传热、传质、大气、水资源污染及连续随机过程等众多领域中发挥着极其重要的作用。对 Burgers 方程的深入研究有助于其他非线性问题[1]的研究, 所以求解非线性 Burgers 方程的数值解十分有意义。

近年来, 关于 Burgers 方程的数值研究有不少的成果[2] [3] [4]。文献[3]研究了一维 Burgers 方程的两种线性化差分格式, 文献[1] [3]研究了二维 Burgers 方程的 Crank-Nicolson 格式, 并得到了时间二阶和空间二阶的收敛速度。本文参考文献[5]中的技巧, 采用维数分裂的技巧, 提出二维 Burgers 方程的分裂高阶有限差分方法, 并对其稳定性以及收敛性进行理论性分析, 最后通过数值算例进行验证。

2. 分裂高阶有限差分方法

考虑如下二维 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = V \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (\text{a})$$

其初边值条件为

$$u(x, y, 0) = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (\text{b})$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{c})$$

其中矩形区域 $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, 时间周期为 $T > 0$ 。

2.1. 记号

为建立差分格式, 首先对求解区域

$\Omega = \{(x, y, t) | 0 \leq x \leq I, 0 \leq y \leq J, 0 \leq t \leq T\}$ 做网格剖分。取 x -和 y -方向上的空间步长分别为 $h_x = \frac{a}{I}$, $h_y = \frac{b}{J}$, 时间步长为 $\tau = \frac{T}{N}$, 其对应网格节点坐标为 $u(x_i, y_j, t_n)$ 且 $x_i = i \cdot h_x$, $i = 0, 1, \dots, I$; $y_j = j \cdot h_y$, $j = 0, 1, \dots, J$; $t_n = n \cdot \tau$; $n = 0, 1, \dots, N$ 。记 $\Omega_{h_x} = \{x_i | 0 \leq x \leq I\}$, $\Omega_{h_y} = \{y_j | 0 \leq y \leq J\}$, $\Omega_{\tau_n} = \{\tau_n | 0 \leq \tau \leq N\}$, $\Omega_{h\tau} = \Omega_{h_x} \times \Omega_{h_y} \times \Omega_{\tau_n}$ 。

设 $\{u_{ij}^n | 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J, 0 \leq n \leq N\}$ 为一个网格函数。下面, 我们定义一些差分算子:

$$\begin{aligned} \delta_x u_{ij}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n}{h_x}, \quad u_{ij}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{ij}^n}{h_y}, \\ \delta_t u_{ij}^n &= \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau}, \\ \delta_x^2 u_{ij}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_x}, \quad \delta_y^2 u_{ij}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_y}, \\ \delta_x^2 u_{ij}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2}, \quad \delta_y^2 u_{ij}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}. \end{aligned}$$

根据泰勒展开式所得 h 为二阶, 为提升至四阶, 引入高阶紧算子,

$$\begin{aligned} L_x u_{ij}^n &= \frac{1}{12} (u_{i+1,j}^n + 10u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n), \\ L_y u_{ij}^n &= \frac{1}{12} (u_{i,j+1}^n + 10u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n), \\ M_x u_{ij}^n &= \frac{1}{6} (u_{i+1,j}^n + 4u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n), \\ M_y u_{ij}^n &= \frac{1}{6} (u_{i,j+1}^n + 4u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n), \end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned} L_x \frac{\partial^2 u_{ij}^n}{\partial x^2} &= \delta_x^2 u_{ij}^n + o(h_x^4), \\ L_y \frac{\partial^2 u_{ij}^n}{\partial x^2} &= \delta_y^2 u_{ij}^n + o(h_y^4), \\ M_x \frac{\partial u_{ij}^n}{\partial x} &= \delta_x u_{ij}^n + o(h_x^4), \\ M_y \frac{\partial u_{ij}^n}{\partial x} &= \delta_y u_{ij}^n + o(h_y^4). \end{aligned}$$

2.2. 差分格式的建立

根据抛物方程的分裂技巧, 在时间步 $(t_n, t_{n+1}]$ 下, 将方程(a)分裂成两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = V \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} = V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.2.2}$$

令 U_{ij}^n 是 u_{ij}^n 的近似解, 对于方程(2.2.1)~(2.2.2), 我们提出分裂差分格式:

$$\frac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{3} \phi \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) = VL_x^{-1} \delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{4}}, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{1}{3} \psi \left(U_{ij}^{n+\frac{3}{4}} \right) = VL_y^{-1} \delta_y^2 U_{ij}^{n+\frac{3}{4}}. \tag{2.2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\phi\left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}}\right) &= U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} M_x^{-1} \delta_x U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} + M_x^{-1} \delta_x \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}}\right)^2, \\ \psi\left(U_{ij}^{n+\frac{3}{4}}\right) &= U_{ij}^{n+\frac{3}{4}} M_y^{-1} \delta_y U_{ij}^{n+\frac{3}{4}} + M_y^{-1} \delta_y \left(U_{ij}^{n+\frac{3}{4}}\right)^2.\end{aligned}$$

格式的边界条件为

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (2.2.5)$$

初值条件为

$$U_{ij}^0 = u(x, y). \quad (2.2.6)$$

2.3. 守恒性和收敛性分析

为了方便稳定性和收敛性的证明, 我们给出一些内积和范数的定义。令 $V_h = \{u_{ij} \mid (x_i, y_j) \in \bar{\Omega}_h, u_{ij} \mid \partial\Omega_h = 0\}$, 我们定义离散的内积和范数

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y,$$

$$(u, v)_x = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y,$$

$$(u, v)_y = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y,$$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad \|u\|_x = \sqrt{(u, u)_x}, \quad \|u\|_y = \sqrt{(u, u)_y}.$$

为了证明紧格式的离散电荷和能量的守恒性, 我们给出以下一些引理。

引理 2.3.1 [5] 对于网格函数 $u, v \in V_h$, 我们有

$$\left(\delta_x^2 u, v\right) = -\left(\delta_x u, \delta_x v\right)_x, \quad \left(\delta_y^2 u, v\right) = -\left(\delta_y u, \delta_y v\right)_y.$$

引理 2.3.2 [5] 对于网格函数 $u, v \in V_h$, 我们有

$$\left(L_x u, v\right) = \left(u, L_x v\right), \quad \left(M_x u, v\right) = \left(u, M_x v\right),$$

$$\left(L_x^{-1} u, v\right) = \left(u, L_x^{-1} v\right), \quad \left(M_x^{-1} u, v\right) = \left(u, M_x^{-1} v\right).$$

引理 2.3.3 [5] 对于网格函数 $U, V \in V_h$, 若 $\|U\|_{L_2}$ 和 $\|V\|_{L_2}$ 有界, 则存在正常数 C , 使得

$$\left(\phi(U) - \phi(V), U - V\right) \leq C\left(\|U - V\|^2 + \|\delta_x(U - V)\|_x^2\right).$$

引理 2.3.4 对于对称的正定矩阵 \mathcal{L}_x^{-1} , \mathcal{M}_x^{-1} , 我们有

$$\mathcal{L}_x^{-1} = \mathcal{R}_1^T \mathcal{R}_1, \quad \mathcal{M}_x^{-1} = \mathcal{R}_2^T \mathcal{R}_2.$$

和

$$C_0 \|U^n\| \leq \|\mathcal{R}_1 U^n\| \leq C_1 \|U^n\|, \quad C_3 \|U^n\| \leq \|\mathcal{R}_2 U^n\| \leq C_4 \|U^n\|$$

其中 $\mathcal{R}_1 = \text{Chol}(\mathcal{L}_x^{-1})$, $\mathcal{R}_2 = \text{Chol}(\mathcal{M}_x^{-1})$, $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为正常数。

证: 因为 \mathcal{L}_x^{-1} 是一个对称的正定矩阵, 故存在矩阵 \mathcal{R}_1 , 其中 \mathcal{R}_1 为上三角矩阵, 满足 $\mathcal{L}_x^{-1} = \mathcal{R}_1^T \mathcal{R}_1$, 其

中 $\mathcal{R}_1 = Chol(\mathcal{L}_x^{-1})$ 。

根据矩阵中范数的定义, 我们有

$$C_0 \|U^n\| \leq \|\mathcal{R}_1 U^n\| \leq C_1 \|U^n\|$$

同样, 矩阵 \mathcal{M}_x^{-1} , \mathcal{R}_2 也有类似的结果。

引理 2.3.5 [5] 对于网格函数 $u \in V_h$, 我们有

$$\|\delta_x u^n\|_x^2 \leq \frac{4}{h_x^2} \|u^n\|^2, \quad \|\delta_y u^n\|_y^2 \leq \frac{4}{h_y^2} \|u^n\|^2.$$

引理 2.3.6 [5] (Gronwall 不等式) 设 $w^n \geq 0$ 且存在常数 C_3, C_4 , 使得 $w^n \leq C_3 + C_4 \tau \sum_{k=0}^{n-1} w^k$, $0 < n\tau < T$, 那么

$$w^n \leq C_3 e^{C_4 T}, \quad 0 < n\tau < T.$$

定理 2.3.1 (守恒性) 分裂高阶有限差分格式(2.2.3)~(2.2.6)满足离散的电荷守恒, 即

$$Q^{n+1} = Q^n. \tag{2.3.1}$$

其中

$$Q^n = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} U_{ij}^n h_x h_y. \tag{2.3.2}$$

对任意的 $n \geq 0$ 成立。

证: 对方程(2.2.3)两端同时乘以 $h_x h_y$, i 从 1 到 $I-1$ 求和, j 从 1 到 $J-1$ 求和:

$$h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{3} h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \phi \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - V h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} L_x^{-1} \delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} = 0$$

考虑边界条件(2.2.5), 有

$$\begin{aligned} U_{0j}^n &= U_{1j}^n = U_{i0}^n = U_{i1}^n = U_{I-1,j}^n = U_{ij}^n = U_{i,J-1}^n = U_{ij}^n = 0 \\ h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} L_x^{-1} \delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} &= h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} = h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x^2} \\ &= h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left[\left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} - U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} & h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \phi \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) \\ &= h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} M_x^{-1} \delta_x U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} + M_x^{-1} \delta_x \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right)^2 \right) \\ &= h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(M_x^{-1} U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \delta_x U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) + h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \delta_x \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right)^2 \\ &= h_x h_y \left(\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} \right) \left(\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \delta_x U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) + h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \delta_x \left(U_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

所以

$$h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\tau} = 0$$

即

$$h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = h_x h_y \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} U_{ij}^n$$

即 $Q^{n+1} = Q^n$, 因此(2.2.3)~(2.2.6)满足电荷守恒。

推论 (稳定性) 差分格式(2.2.3)~(2.2.6)是无条件稳定的。

证: 由定理 2.3.1 可得: 对于任意的 $n \geq 0$, 有

$$\|U^{n+1}\| = \|U^n\| = \|U^{n-1}\| = \dots = \|U^1\| = \|U^0\| \text{ 成立}$$

因此, 差分格式(2.2.3)~(2.2.6)是无条件稳定的。

定理 2.3.2 (收敛性) 假设问题(a)~(c)的精确解 v 足够光滑, 令 u 是分裂高阶有限差分格式(2.2.3)~(2.2.6)的数值解, 对于固定的 $T > 0$, 存在一个独立的 τ , h_x , h_y 和正常数 C , 满足:

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|v^n - u^n\| \leq C(\tau^2 + h_x^4 + h_y^4).$$

证: 令截断误差

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^n &= \frac{v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - v_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{3} \phi \left(v_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - VL_x^{-1} \delta_x^2 v_{ij}^{n+\frac{1}{4}}, \\ \eta_{ij}^n &= \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{1}{3} \psi \left(v_{ij}^{n+\frac{3}{4}} \right) - VL_y^{-1} \delta_y^2 v_{ij}^{n+\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

由(2.2.3)易得: 令 $e_{ij}^n = v_{ij}^n - u_{ij}^n$

有:

$$\zeta_{ij}^n = \frac{e_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - e_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{3} \phi \left(v_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - \frac{1}{3} \phi \left(u_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - VL_x^{-1} \delta_x^2 e_{ij}^{n+\frac{1}{4}}.$$

让 ζ_{ij}^n 与 $e_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + e_{ij}^n$ 作内积:

$$\begin{aligned} \left(\zeta^n, e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) &= \frac{1}{\tau} \left(\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| e^n \right\|^2 \right) + \frac{1}{3} \left(\phi \left(v_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - \frac{1}{3} \phi \left(u_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right), e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \\ &\quad - V \left(L_x^{-1} \delta_x^2 e^{n+\frac{1}{4}}, e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \end{aligned}$$

由引理 2.3.3:

$$\phi \left(v_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) - \phi \left(u_{ij}^{n+\frac{1}{4}} \right) \leq C \left(\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| e^n \right\|^2 + \left\| \delta_x e^{n+\frac{1}{2}} \right\|_x^2 + \left\| \delta_x e^n \right\|_x^2 \right). \quad (2.3.3)$$

根据引理 2.3.4:

$$\begin{aligned}
 & \left| L_x^{-1} \delta_x^2 e^{n+\frac{1}{4}}, e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right| \\
 &= \left| R_1 \delta_x^2 e^{n+\frac{1}{4}}, R_1 \left(e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \right| = \left| - \left[R_1 \delta_x e^{n+\frac{1}{4}}, R_1 \delta_x \left(e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \right]_x \right|, \tag{2.3.4} \\
 &= \frac{1}{2} \left\| R_1 \delta_x \left(e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \right\|_x^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \delta_x \left(e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \right\|_x^2 \leq \left\| \delta_x e^{n+\frac{1}{2}} \right\|_x^2 + \left\| \delta_x e^n \right\|_x^2
 \end{aligned}$$

又:

$$\left(\xi^n, e^{n+\frac{1}{2}} + e^n \right) \leq \left\| \xi^n \right\|^2 + 2 \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + 2 \left\| e^n \right\|^2, \tag{2.3.5}$$

将(2.3.3)~(2.3.5)代入, 则有:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau} \left(\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| e^n \right\|^2 \right) &\leq \left\| \xi^n \right\|^2 + 2 \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + 2 \left\| e^n \right\|^2 + C \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + C \left\| e^n \right\|^2 \\
 &\quad + C \left\| \delta_x e^{n+\frac{1}{2}} \right\|_x^2 + C \left\| \delta_x e^n \right\|_x^2 + V \left\| \delta_x e^{n+\frac{1}{2}} \right\|_x^2 + V \left\| \delta_x e^n \right\|_x^2,
 \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| e^n \right\|^2 &\leq \tau \left\| \xi^n \right\|^2 + \tau(2+C) \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \tau(2+C) \left\| e^n \right\|^2 \\
 &\quad + \tau(V+C) \left\| \delta_x e^{n+\frac{1}{2}} \right\|_x^2 + \tau(V+C) \left\| \delta_x e^n \right\|_x^2,
 \end{aligned}$$

由引理 2.3.5 得:

$$\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right) \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \left\| e^n \right\|^2 + \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right) \left\| e^n \right\|^2 + \tau \left\| \xi^n \right\|^2,$$

即:

$$\left[1 - \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right) \right] \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \left[1 + \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right) \right] \left\| e^n \right\|^2 + \tau \left\| \xi^n \right\|^2$$

我们假设 $\tau = o(h_x^2)$, 有 $1 - \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right) > 0$

则:

$$\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \frac{1 + \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right)}{1 - \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right)} \left\| e^n \right\|^2 + \frac{\tau}{1 - \tau \left(2+C + \frac{4}{h_x^2} (V+C) \right)} \left\| \xi^n \right\|^2$$

令 $P_1 = 2 + C + \frac{4}{h_x^2}(V + C)$, 则有:

$$\left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \frac{1 + \tau P_1}{1 - \tau P_1} \|e^n\|^2 + \frac{\tau}{1 - \tau P_1} \|\xi^n\|^2 \quad (2.3.6)$$

类似地: 由方程(2.2.4), 令 $P_2 = 2 + C + \frac{4}{h_y^2}(V + C)$, 有:

$$\|e^{n+1}\|^2 \leq \frac{1 + \tau P_2}{1 - \tau P_2} \left\| e^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\tau}{1 - \tau P_2} \|\eta^n\|^2 \quad (2.3.7)$$

由(2.3.6), (2.3.7)得到:

$$\|e^{n+1}\|^2 \leq \frac{(1 + P_1\tau)(1 + P_2\tau)}{(1 - P_1\tau)(1 - P_2\tau)} \|e^n\|^2 + \frac{\tau}{1 - P_2\tau} \|\eta^n\|^2 + \frac{\tau}{1 - P_1\tau} \cdot \frac{1 + P_2\tau}{1 - P_2\tau} \|\xi^n\|^2$$

即

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|^2 &\leq (1 + C_1\tau) \|e^n\|^2 + C_2\tau \left(\|\xi^n\|^2 + \|\eta^n\|^2 \right) \\ &\leq (1 + C_1\tau) \|e^n\|^2 + C_2\tau (\tau^2 + h_x^4 + h_y^4)^2 \end{aligned}$$

又 $e^0 = 0$, 由 Gronwall 不等式:

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|v^n - u^n\| \leq C (\tau^2 + h_x^4 + h_y^4).$$

3. 数值算例

通过算例验证数值结果, 考虑二维 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = V \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

区域为 $[0,1] \times [0,1]$, 精确解为

$$u(x, y, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

初始条件和边界条件有精确解直接得到。

表 1 和表 2 列出了分裂高阶有限差分格式具有空间四阶的收敛率、时间二阶的收敛率, 这个结果和我们的理论分析是一致的。

Table 1. When $t = 10^{-6}$, space step error and convergence order, where $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = h$

表 1. 当 $t = 10^{-6}$ 时, 空间步长的误差和收敛阶, 其中 $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = h$

h	L_2 -error	order
0.2	7.64496e-07	---
0.1	5.04436e-08	3.9218
0.05	3.14199e-09	4.0049
0.025	1.96320e-10	4.0004

Table 2. When $t = 0.1$, space step error and convergence order, where $h_x = h_y = 0.1$

表 2. 当 $t = 0.1$ 时, 时间步长的误差和收敛阶, 其中 $h_x = h_y = 0.1$

τ	L_2 -error	order
0.01	0.08011	---
0.005	0.02010	1.9306
0.0025	0.0054	1.9648
0.00125	0.00130	2.0002

我们考虑下方的精确解

$$u(x, y, t) = \exp(-k\pi^2 t) \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

表 3 可以看出, 当 k 的值发生变化时, 时间步长和空间步长分别为 $h_x = h_y = 0.2$, $\tau = 10^{-7}$, 我们提出的差分格式的电荷的误差足够小, 并且始终为正值, 因此差分格式满足电荷守恒, 也验证了定理 2.3.1 的分析结果。

Table 3. When $h_x = h_y = 0.2$, $\tau = 10^{-7}$, space error and convergence order of different exact solutions

表 3. 当 $h_x = h_y = 0.2$, $\tau = 10^{-7}$ 时, 不同精确解的时间步长的误差和收敛阶

k	Q	error of Q
2	0.1500	1.1169e-13
4	0.1500	1.0270e-13
6	0.1500	1.5688e-13
8	0.1500	1.2563e-13

图 1 和图 2 分别展示了 $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = 0.05$ 时, 差分格式的数值解和精确解的图像。可以看出, 精确解和数值解的三维立体图是完全一致的, 而且曲面的几何特性也是完全相同的。而且我们发现, 当空间步长 h_x, h_y 越小时, 网格剖分越密集, Burgers 方程的解模拟的更加精密。

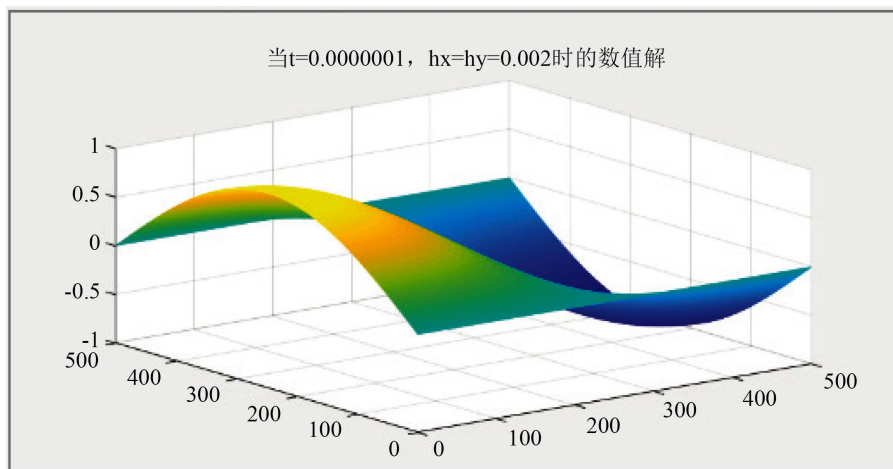


Figure 1. When $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = 0.002$, numerical solutions of difference schemes

图 1. $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = 0.002$ 时, 差分格式的数值解

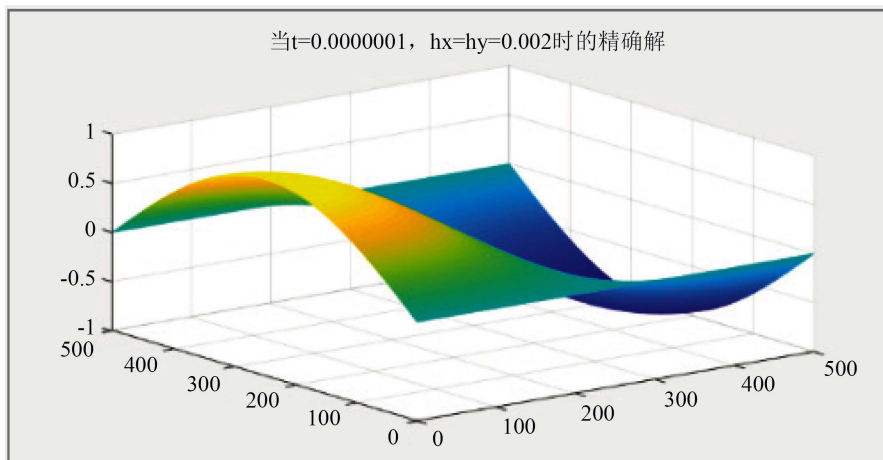


Figure 2. When $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = 0.002$, the exact solutions of difference schemes

图 2. $\tau = 10^{-7}$, $h_x = h_y = 0.002$ 时, 差分格式的精解

4. 结论

通过抛物型方程的高精度分裂方法[6] [7], 我们提出了二维 Burgers 方程的高阶分裂有限差分方法。借用能量法, 我们证明了所提格式是守恒的, 并且满足时间二阶、空间四阶的收敛性。最后, 数值算例和理论结果一致。

基金项目

大学生创新创业训练计划项目(项目编号 202010059074)。

参考文献

- [1] 陈景良, 邓定文. 非线性延迟波动方程的两类差分格式[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 508-517.
- [2] 黄展鹏. 解 Burgers 方程的修正局部 Crank-Nicolson 方法[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2009.
- [3] Sun, H. and Sun, Z.Z. (2015) On Two Linearized Difference Schemes for Burgers Equation. *International Journal of Computational Methods*, **92**, 1160-1179. <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.927059>
- [4] Xu, P.P. and Sun, Z.Z. (2009) A Second Order Accurate Difference Scheme for the Two-Dimensional Burgers System. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **25**, 172-194. <https://doi.org/10.1002/num.20335>
- [5] Wang, B., Sun, T.J. and Liang, D. (2019) The Conservative and Fourth-Order Compact Finite Difference Schemes for Regularized Long Wave Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **356**, 98-117. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.01.036>
- [6] Wang, B., Liang, D. and Sun, T.J. (2017) The Conservative Splitting High-Order Compact Finite Difference Scheme for Two-Dimensional Schrodinger Equations. *International Journal of Computational Methods*, **15**, Article ID: 1750079. <https://doi.org/10.1142/S0219876217500797>
- [7] 陈宁, 顾海明. 抛物型方程的高精度交替方向法[J]. 青岛科技大学学报(自然科学版), 2009, 30(1): 3-5.