Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 16-21
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111003

Hans汉斯

一类特殊亚纯函数的唯一性

谭　艳

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 1158926829@qq.com

收稿日期：2020年12月10日；录用日期：2021年1月8日；发布日期：2021年1月15日

摘　要

在亚纯函数唯一性研究方面，一个未彻底解决的问题就是：关于亚纯函数CM型唯一性象集的最小基数到底是多少。本文对该问题作了进一步研究，证明了：在附加一定限制条件的一类特殊亚纯函数的唯一性象集的基数可以是5或4。

关键词

亚纯函数，CM分担值集，唯一性

Unique Range Sets for a Kind of Special Meromorphic Functions

Yan Tan

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1158926829@qq.com

Received: Dec. 10th, 2020; accepted: Jan. 8th, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

In the study of uniqueness of meromorphic functions, an unsolved problem is: what is the minimum cardinality of CM-type unique image set of meromorphic functions? In this paper, the problem of modification is further studied, and it is proved that the cardinality of the unique image set of a special meromorphic function can be 5 or 4 under certain restrictions.

Keywords

Meromorphic Function, CM Shared Set, Uniqueness

文章引用: 谭艳. 一类特殊亚纯函数的唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 16-21.
DOI: 10.12677/pm.2021.111003

1. 引言及主要结果

设 S 是 $\hat{C}$ 的非空子集。如果复平面上的非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 满足条件：对 $\forall a \in S$，若 z^* 为方程 $f(z)-a$ 的 p 重根，则相应 $\exists b \in S$ 使 z^* 亦是方程 $g(z)-b$ 的 p 重根，反之亦然。则称 S 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 型分担值集。

Frank G.和 Rainders M.证明了如下结果：

定理 A [1]设 n 为不小于 11 的整数，c 是异于 0 和 1 的有限复数，

$$S=\left\{z \in C \mid \frac{(n-1)(n-2)}{2} z^{n}-n(n-2) z^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}-c=0\right\},$$

则 S 是亚纯函数的 CM 型唯一性象集。

同年，仪洪勋在文[2]中也得到了一个含有 11 个元素的亚纯函数的 CM 型唯一性象集，并在该文中提出如下问题：

问题 2 [2]是否存在小于 11 个元素的亚纯函数的 CM 型唯一性象集？

在考虑亚纯函数极点“极少”的情况下，方明亮和华歆厚在文[3]中证明了下述结果：

定理 B [3] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且满足 $\Theta(\infty,f)>\frac{11}{12},\Theta(\infty,g)>\frac{11}{12}$，则存在含有 7 个元素的集合 S，只要 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 S,就一定有 $f(z)\equiv g(z)$。

2001 年，王新利改进了定理 B 并得到如下结论：

定理 C [4] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且 $\Theta(\infty,f)>\frac{3}{4},\Theta(\infty,g)>\frac{3}{4}$。则含有 7 个元素的集合 S 为这类亚纯函数的 CM 型唯一性象集。

2003 年徐炎在文[5]中推广并改进了定理 B 和定理 C 得到：

定理 D [5] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且满足 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\frac{3}{2}$，则存在含有 7 个元素的集合 S 为这类函数的 CM 型唯一性象集。

本文对上述问题做了进一步研究，证明了：

定理 1 设正数 $\lambda>\frac{13}{8}$，$f(z)$ 和 $g(z)$ 为开平面 C 上的非常数亚纯函数，且 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\lambda,\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\lambda$，如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{z \mid z^5+z^4+1=0\}$ 为 CM 型分担值集，则 $f(z)=g(z)$。

推论 1 设 n 为不小于 5 的整数,若非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{\omega \mid \omega^n+\omega^{n-1}+1=0\}$ 为 CM 分担值集，且 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\frac{13}{8},\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\frac{13}{8}$，则 $f(z)=g(z)$。

定理 2 设正数 $\lambda>\frac{7}{4}$，$f(z)$ 和 $g(z)$ 为开平面 C 上的非常数亚纯函数，且 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\lambda,\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\lambda$，如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{z \mid z^4+z^3+1=0\}$ 为 CM 型分担值，

则 $f(z)=g(z)$。

推论 2 设 n 为不小于 4 的整数，若非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{\omega \mid \omega^n+\omega^{n-1}+1=0\}$ 为 CM 分担值集，且 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\frac{13}{8},\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\frac{13}{8}$，则 $f(z)=g(z)$。

2. 几个辅助引理

引理 1 [6] 设 $f(z)$ 为开平面 C 上的非常数亚纯函数，$a_k(z)(k=1,2\cdots,p)$ 均为 $f(z)$ 的不恒等于∞的亚纯函数，$Q(f(z))=f^p(z)+a_1(z)f^{p-1}(z)+\cdots+a_p(z)$，则

$$T(r,Q(f))=pT(r,f)+S(r,f).$$

引理 2 [6] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数，且它们以 1 为其 CM 分担值。若

$$N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+N_2(r,f)+N_2(r,g)<(\mu+o(1))T(r)(r\in I),$$

其中 $\mu<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，$I$ 为 $(0,\infty)$ 的一个具有无穷线性测度的子集合，则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

引理 3 [6] 设 $f(z)$ 为 C 上的非常数亚纯函数，p 与 q 都为非负整数，$R(f(z))=\frac{P(f(z))}{Q(f(z))}$，其中系数 $a_k(z)(k=0,1,\cdots,p)$ 和 $a_k(z)(k=0,1,\cdots,p)$ 均为 $f(z)$ 的不恒等于 ∞ 的亚纯小函数，且 $a_p(z)\neq 0$，$b_q(z)\neq 0$。$P(w)=\sum_{k=0}^{p}a_k(z)w^k$ 和 $Q(z)=\sum_{j=0}^{q}b_j(z)w^j$ 关于 w 是互质的，则 $T(r,R(f))=\max\{p,q\}T(r,f)+S(r,f)$。

3. 主要结果的证明

定理 2 的证明：令

$$F(z)=-f^3(z)(f(z)+1),\quad G(z)=-g^3(z)(g(z)+1). \tag{3.1}$$

则 $F(z)$ 与 $G(z)$ 为开平面 C 上以 1 为 CM 分担值的非常数亚纯函数。于是由引理 1、定理条件及(3.1)式可得

$$T(r,F)=4T(r,f)+S(r,f) \tag{3.2}$$

$$T(r,G)=4T(r,g)+S(r,g) \tag{3.3}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\leq 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f+1}\right),\quad N_2(r,F)=2\bar{N}(r,f) \tag{3.4}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\leq 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g+1}\right),\quad N_2(r,G)=2\bar{N}(r,g) \tag{3.5}$$

又由 $\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\lambda$

得

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)<(2-\lambda+o(1))(T(r,f)+T(r,g)) \tag{3.6}$$

$$\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\lambda$$

得

$$\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)<\left(2-\lambda+o(1)\right)\left(T(r,f)+T(r,g)\right) \tag{3.7}$$

由(3.2)至(3.7)诸式和已知条件得

$$\begin{aligned}
&N_2(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\\
&\le 2\bar{N}(r,f)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f+1}\right)+2\bar{N}(r,g)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g+1}\right)+S(r,f)+S(r,g)\\
&\le 4(2-\lambda)\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+T(r,f)+T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)\\
&<\left(\frac{18-8\lambda}{4}+o(1)\right)T(r)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $T(r)=\max\left\{T(r,F),T(r,G)\right\}$。由于 $\lambda>\frac{7}{4}$，所以 $\frac{18-8\lambda}{4}<1$。于是由(3.8)式和引理 2 得 $F(z)\cdot G(z)\equiv 1$ 或 $F(z)\equiv G(z)$。

若 $F(z)\cdot G(z)\equiv 1$，则有

$$f^3(z)g^3(z)\left[f(z)+1\right]\left[g(z)+1\right]\equiv 1. \tag{3.9}$$

设 z_1 为 $f(z)+1$ 的零点，则由(3.9)式知 z_1 至少为 $f(z)+1$ 的 4 重零点，从而有

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\le\frac{1}{4}N\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\le\frac{1}{4}T(r,f)+O(1), \tag{3.10}$$

同理可得

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{g+1}\right)\le\frac{1}{4}N\left(r,\frac{1}{g+1}\right)\le\frac{1}{4}T(r,g)+O(1), \tag{3.11}$$

再由 Nevanlinna 第二基本定理、(3.10)和(3.11)及定理条件得

$$\begin{aligned}
&T(r,f)+T(r,g)\\
&<\bar{N}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g+1}\right)+S(r,f)+S(r,g)\\
&\le(4-2\lambda)\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+\frac{1}{4}\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S(r,f)+S(r,g)\\
&=\left(\frac{17}{4}-2\lambda\right)\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S(r,f)+S(r,g)\\
&<\frac{3}{4}\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S(r,f)+S(r,g)
\end{aligned}$$

这是一个矛盾。

若 $F(z)\equiv G(z)$，则有

$$f^4(z)+f^3(z)=g^4(z)+g^3(z), \tag{3.12}$$

令 $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$，则(3.12)式可变形为

$$\left(h^4(z)-1\right)g(z)+\left(h^3(z)-1\right)\equiv 0. \tag{3.13}$$

若 $h(z)\equiv const\neq 1$，则 $g(z)\equiv const$，这与 $g(z)$ 是非常数亚纯函数矛盾。从而 $h(z)$ 为常数函数时，必有 $h(z)\equiv 1$，即 $f(z)\equiv g(z)$。

若 $h(z)$ 不恒为常数函数，则由(3.13)式得

$$g(z)\equiv -\frac{h^3(z)-1}{h^4(z)-1}=-\frac{\left(h(z)-u\right)\left(h(z)-u^2\right)}{\left(h(z)-v\right)\left(h(z)-v^2\right)\left(h(z)-v^3\right)} \tag{3.14}$$

同理可得

$$f(z)\equiv -\frac{\frac{1}{h^3}-1}{\frac{1}{h^4}-1}=-\frac{\left(\frac{1}{h(z)}-u\right)\left(\frac{1}{h(z)}-u^2\right)}{\left(\frac{1}{h(z)}-v\right)\left(\frac{1}{h(z)}-v^2\right)\left(\frac{1}{h(z)}-v^3\right)} \tag{3.15}$$

其中(3.14)、(3.15)式中 $u=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), v=\exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)$。

由(3.14)、(3.15)式和引理 3 可得

$$T(r,g)=3T(r,h)+S(r,h), \tag{3.16}$$

$$\bar{N}(r,g)=\sum_{j=1}^{3}\bar{N}\left(r,\frac{1}{h-v^j}\right), \tag{3.17}$$

$$T(r,f)=3T\left(r,\frac{1}{h}\right)+S(r,h)=3T(r,h)+S(r,h), \tag{3.18}$$

$$\bar{N}(r,f)=\sum_{j=1}^{3}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{1}{h}-v^j}\right), \tag{3.19}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理及(3.16)至(3.19)诸式得

$$T(r,h)<\sum_{j=1}^{3}\bar{N}\left(r,\frac{1}{h-v^j}\right)+S(r,h)=\bar{N}(r,g)+S(r,h) \tag{3.20}$$

$$T\left(r,\frac{1}{h}\right)<\sum_{j=1}^{3}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{1}{h}-v^j}\right)+S(r,h)=\bar{N}(r,f)+S(r,h) \tag{3.21}$$

于是由(3.20)和(3.21)诸式及定理条件得

$$\begin{aligned}2T(r,h)&<\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+S(r,h)\\&\leq(2-\lambda)\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S(r,h)\\&\leq(12-6\lambda)T(r,h)+S(r,h)\\&\leq\frac{3}{2}T(r,h)+S(r,h)\end{aligned}$$

这是一个矛盾。

综上所述，可得 $f(z)\equiv g(z)$。定理 2.2 证毕。

定理 2.1 的证明与定理 2.2 的证明类似。

推论 1 的证明：

由于 n 为不小于 5 的整数，非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{\omega^n+\omega^{n-1}+1=0\}$ 为 CM 分担值集，且 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\frac{13}{8},\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>\frac{13}{8}$。则非常数亚纯函数 $F(z)=f^n(z)+f^{n-1}(z)$ 与 $G(z)=g^n(z)+g^{n-1}(z)$ 以 1 为 CM 分担值，同定理 2.2 的证明类似，可推出 $f(z)\equiv g(z)$。

推论 2 同推论类似。

参考文献

[1] Frank, G. and Reinders, M. (1998) A Unique Range Sets for Meromorphic Functions with 11 Elements. *Complex Variables*, *Theory and Application*: *An International Journal*, **37**, 185-193. https://doi.org/10.1080/17476939808815132

[2] 仪洪勋. 关于亚纯函数的精简唯一性象集[J]. 山东大学学报(自然科学版), 1998, 33(4): 361-369.

[3] Fang, M.L. and Hua, X.H. (1998) Meromorpic Functions That Share One Finite Set CM. *Journal of Nanjing university Mathematical Biquarterly*, **15**, 16-22.

[4] 王新利. 具有一个 CM 公共值集的亚纯函数[J]. 山东大学学报: 理学版, 2001, 36(1): 5-10.

[5] Xu, Y. (2003) Meromorphic Functions Sharing One Finite Set. *Computers and Mathematics with Applications*, **45**, 1489-1495. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00132-9

[6] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.