Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 74-78
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111011

Hans汉斯

整函数涉及一个IM分担值的唯一性定理

郅皓翔，贾　丽

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 1255086416@qq.com

收稿日期：2020年12月13日；录用日期：2021年1月14日；发布日期：2021年1月22日

摘　要

本文证明了：如果非常数整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以1为IM分担值，且满足 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\bar{N}(r,f)+\bar{N}_{(2}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)}{T(r,f)}\le\dfrac{1}{6}$，$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\dfrac{1}{g}\right)}{T(r,g)}\le\dfrac{1}{6}$，则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

关键词

整函数，分担值，亏值，唯一性

Uniqueness Theorem of Entire Functions with Share on Value IM

Haoxiang Zhi, Li Jia

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1255086416@qq.com

Received: Dec. 13th, 2020; accepted: Jan. 14th, 2021; published: Jan. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, we shall prove that if two non-constant entire function $f(z)$ and $g(z)$ share the

文章引用: 郅皓翔, 贾丽. 整函数涉及一个 IM 分担值的唯一性定理[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 74-78.
DOI: 10.12677/pm.2021.111011

value 1 IM, and $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\bar{N}(r,f)+\bar{N}_{(2}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)}{T(r,f)}\le\dfrac{1}{6}$, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\bar{N}\left(r,\dfrac{1}{g}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\dfrac{1}{g}\right)}{T(r,g)}\le\dfrac{1}{6}$, then $f(z)\equiv g(z)$ or $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$.

Keywords

Entire Function, Shared Value, Deficient Value, Uniqueness

1. 引言及主要结果

亚纯函数在涉及分担值的唯一性问题研究，前人已经有了许多成果，其中最具有突出贡献之一的是R. Nevanlinna所创立的值分布论，它在应用于亚纯函数涉及分担值的唯一性研究中有着很重要的意义。

本文所使用通常的Nevanlinna值分布理论的符号和记号(见文献[1] [2])，除此之外本文所需的另外一些特殊符号和记号(见文献[3])。

本文主要研究涉及一个IM分担值及在亏值约束条件下整函数之间的关系。

1976年，M. Ozuwa证明了如下定理：

定理A [4]设两个非常数整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以1为CM分担值，若 $\delta(0,f)>0$，且0是 $g(z)$ 的缺值，则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

1987年，仪洪勋证明了：

定理B [5]设两个非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以1为CM分担值，且满足 $\delta(\infty,f)=\delta(\infty,g)=1$，$\delta(0,f)+\delta(0,g)>1$，则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

本文将以上定理中CM分担值的条件减弱到IM分担值，再与亏值相结合进行讨论，得到如下定理：

定理1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为复平面上的两个非常数整函数，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以1为IM分担值，且

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\bar{N}(r,f)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{T(r,f)}\le\frac{1}{6},\tag{1.1}$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)}{T(r,g)}\le\frac{1}{6},\tag{1.2}$$

则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

2. 几个引理

为了证明上述结论，我们需借助一些引理。

引理1 [6] [7]设 $f(z)$ 为超越亚纯函数，则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)<N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2 [2]设非常数整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 1 为 IM 分担值，则

$$\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le\bar{N}(r,f)+S(r,f),\quad \bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le\bar{N}(r,g)+S(r,g).$$

引理 3 [5]设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，若它们满足以 1 为 CM 分担值，$\delta(\infty,f)=\delta(\infty,g)=1$，且

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,f)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{T(r,f)}\le\frac{1}{2},\quad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)}{T(r,g)}\le\frac{1}{2},$$

则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。

引理 4 [2] 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数，若 z_0 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的公共单重极点，则 $\left.\left(\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}\right)\right|_{z_0}=0$。

3. 定理 1 的证明

令

$$H=\left(\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}\right)-2\left(\frac{f'}{f-1}-\frac{g'}{g-1}\right).$$

我们断言 $H(z)\equiv 0$。事实上，若 $H(z)\not\equiv 0$，如果 z_0 为 $f(z)-1$ 和 $g(z)-1$ 的单重零点，由引理 4 可得，$H(z_0)=0$，从而有

$$N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{H}\right)\le T(r,H)+O(1)\le N(r,H)+S(r,f)+S(r,g). \tag{1.3}$$

又由于 $H(z)$ 的极点只可能产生在 $f'(z)$ 与 $g'(z)$ 的零点和 $f(z)-1$ 与 $g(z)-1$ 没有相同级的重零点处，故

$$N(r,H)\le\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right). \tag{1.4}$$

根据条件知，$f(z)$ 与 $g(z)$ 以 1 为 IM 分担值，容易得到

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right). \tag{1.5}$$

结合上式(1.3)、(1.4)和(1.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\\
&\le 2N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\\
&\le\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)\\
&\quad+N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+S(r,f)+S(r,g)
\end{aligned}. \tag{1.6}$$

而且，我们有

$$\begin{aligned}&N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\\&\le\frac{1}{2}\left(N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\right)\le\frac{1}{2}\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+O(1)\end{aligned}. \quad (1.7)$$

由(1.6)和(1.7)得

$$\begin{aligned}&\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\\&\le\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)\\&+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\frac{1}{2}\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S(r,f)+S(r,g)\end{aligned}. \quad (1.8)$$

又根据 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为非常数整函数，从而由 Nevanlinna 的第二基本定理得

$$\begin{aligned}&T(r,f)+T(r,g)\\&\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g)\end{aligned}. \quad (1.9)$$

结合上式(1.8)，(1.9)和引理 2 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}T(r,f)+\frac{1}{2}T(r,g)\\&\le 3\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+3\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,f)+S(r,g)\\&\le 3\left[\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right]+3\left[\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)\right]+S(r,f)+S(r,g)\end{aligned}. \quad (1.10)$$

由(1.1) (1.2)知 $\exists\varepsilon>0$，当 $r\to\infty$ 时，有

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)<\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right)T(r,f),\ \bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)<\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right)T(r,g). \quad (1.11)$$

将(1.11)代入(1.10)得

$$6\varepsilon\left(T(r,f)+T(r,g)\right)\le S(r,f)+S(r,g).$$

矛盾，故 $H(z)\equiv 0$。

又知 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 1 为 IM 分担值，从而可知 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 1 为 CM 分担值。

于是根据引理 3，我们得到 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$。定理证毕。

参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[3] 王丽. 具有一个分担值集和亏量的整函数的一个性质[J]. 楚雄师范学院学报, 2016(12): 8-13.

[4] Ozawa, M. (1976) Unicity Theorems for Entire Functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, **30**, 411-420. https://doi.org/10.1007/BF02786728

[5] 仪洪勋. 具有两个亏值的亚纯函数[J]. 数学学报, 1987(30): 588-597.

[6] 林秀清, 仪洪勋. 分担 1IM 公共值的整函数的唯一性定理[J]. 数学进展, 2011, 40(1): 79-86.

[7] Ye, S.Z. (1992) Uniqueness of Meromorphic Funcitions That Share Three Values. *Kodai Mathematical Journal*, **15**, 236-243.