Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 282-290
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112038

Hans汉斯

复线性微分方程在Orlicz型空间上解的性质

黄星星，杨丛丽*，罗　颜

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳
Email: 1790094497@qq.com, *229602241@qq.com

收稿日期：2021年1月14日；录用日期：2021年2月17日；发布日期：2021年2月25日

摘　要

复线性微分方程，$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=F(z)$ 在不同空间上解的性质被许多学者研究，如Hardy空间，Dirichket空间等等，在这些空间上考虑了解的函数空间属性。在该文章中，我们主要研究了该方程在γ-Bloch-Orilicz空间上解的函数空间属性以及解的增长性，其中$A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1),F(z)$是单位$D=\{|z|<1\}$上的解析函数。

关键词

Bloch-Orilicz空间，级，解析函数

Properties of Solutions of Complex Linear Differential Equations in Orilicz Type Spaces

Xingxing Huang, Congli Yang*, Yan Luo

Department of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: 1790094497@qq.com, *229602241@qq.com

Received: Jan. 14th, 2021; accepted: Feb. 17th, 2021; published: Feb. 25th, 2021

Abstract

The properties of the solution of the following complex linear differential equation

*通讯作者。

文章引用: 黄星星, 杨丛丽, 罗颜. 复线性微分方程在 Orlicz 型空间上解的性质[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 282-290.
DOI: 10.12677/pm.2021.112038

$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=F(z)$ is studied in some spaces as the weighted Hardy spaces and Dirichlet spaces, the properties of the solutions of the complex linear differential equations in these spaces is considered. In this paper, some results of the properties and growth of solutions of the equations are obtained in γ-Bloch-Orilicz spaces, where $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1),F(z)$ are analytic in the unit disc $D=\{|z|<1\}$.

Keywords

Bloch-Orilicz Spaces, Order, Analytic Functions

1. 引言

1982 年，Pommerenke 研究了二阶复线性微分方程 $f''+A_0(z)f=0$ 的解与空间的关系，给出了该方程系数的一些条件，得到了该方程的解属于哈代空间 H^2，详见文献[1]，2000 年，J. Heittokangas 在文献[2]中给出了该方程得到了复线性微分方程系数的一些条件下，得到了方程的解属于一些解析空间的结论，J. Heittokangas 也在该文章中得到了复线性微分方程的系数如果在单位圆 D 上解析，那么它的解在单位圆 D 上也是解析的。在那之后，单位圆上的复线性微分方程的解析解和一些函数空间关系被许多学者研究，并且得到了很多有意义的结论，详见文献[3]-[11]，下面我们将主要考虑复线性微分方程。

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=F(z) \tag{1}$$

其中系数 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是单位圆 D 上的解析函数并且 $F(z)\neq 0$，在以上的条件的基础上我们得到了一些相关结论。

为了证明我们的结论，我们需要引入一些如下的基本的概念。

2. 预备知识

令 $H(D)$ 表示 D 上所有的全纯函数，那么 Bloch 空间的定义为:

$$B=\left\{f(z)\in H(D);\|f\|_B=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)\left|f(z)'\right|<\infty\right\}$$

它是 Banach 空间且它的范数为；$\|f\|_B=|f|+|f|_B$，详见文献[12]，对于 $\alpha>0$，那么 α-Bloch 空间的定义为：

$$B_\alpha=\left\{f(z)\in H(D);\|f\|_{B_\alpha}=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|f(z)'\right|<\infty\right\}$$

关于 α-Bloch 空间的更多性质我们可以在文献[13]中找到，

令 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是严格递增的凸函数，并且 $\varphi(0)=0,\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$，此时我们将 Bloch-Orilicz 空间 B^φ 定义为：

$$B^\varphi=\left\{f(z)\in H(D);\|f\|_{B^\varphi}=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)\varphi\left(\lambda\left|f(z)'\right|\right)<\infty\right\}$$

对于一些取决于 f 且大于 0 的 λ，$\|f\|_{\varphi}=\inf\left\{k>0,S_{\varphi}\left(\frac{f'}{k}\right)\right\}$，其中 $S_{\varphi}\left(\frac{f'}{k}\right)=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)\varphi\left(\left|f(z)'\right|\right)$，详见文献[14]，类似于 α-Bloch 空间的定义，我们将 γ-Bloch-Orilicz 空间 B_{γ}^{φ} 定义为：

$$B_{\gamma}^{\varphi}=\left\{f(z)\in H(D);\|f\|_{B_{\gamma}^{\varphi}}=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\gamma}\varphi\left(\lambda\left|f(z)'\right|\right)<\infty\right\}$$

其中 γ,λ 取决于 f 且 $\gamma,\lambda>0$，该定义我们可以在文献[15]中找到。

令 $\varphi(t)$ 为凸函数，则下列陈述成立；

i) 若 $s<1,t>0$，那么 $\varphi(st)\le s\varphi(t)$；

ii) 若 $s>1,t>0$，那么 $\varphi(st)\ge s\varphi(t)$；

iii) 若 $s>1,t>0$，那么 $\varphi^{-1}(st)\le s\varphi^{-1}(t)$，其中 φ^{-1} 是 φ 的逆函数。

若 $0<p<\infty$，当 f 满足下列条件时，我们称 H^p 为哈代空间。

$$H^p=\left\{f(z)\in H(D):\sup_{0\le r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p\mathrm{d}\varphi\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

当 $p=\infty$ 的情况我们可以参考文献[16]。

如果函数 $f\in H(D)$，当函数满足条件：

$$\sup_{z\in D}|f(z)|<\infty$$

时，那么我们称 $f\in H^{\infty}$，显然 H^{∞} 是由 D 上全体有界解析函数组成，令 $0<q<\infty$，相应地加权哈代空间 H_q^{∞} 的定义为：

$$H_q^{\infty}=\left\{f(z)\in H(D):\|f\|_{H_q^{\infty}}=\sup_{0\le r<1}|f(z)|\left(1-|z|^2\right)^q<\infty\right\}$$

当 $f(z)$ 满足条件时：

$$p=\inf\left\{q>0;f(z)\in H_q^{\infty}\right\}$$

那么我们说 $f\in G_p$ 空间，关于 G_p 空间的更多知识我们可以详见文献[17]。

接下来为我们来介绍单位圆 D 上的解析函数 $f(z)$ 的级 $\sigma_M(f)$ 的定义为：

$$\sigma_M(f)=\limsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

其中 $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$。

最后，我们来回顾 ε^{β} 空间的定义。

设 $f(z)\in H(D)$，存在 $\alpha\in(0,\infty)$ 使得 $|f(z)|\le e^{\frac{\alpha}{(1-|z|)^{\beta}}}$，则 $f(z)\in\varepsilon^{\beta}$。

2003 年，Chyzhykov 等人在文献[18]中研究了方程 $f^{(k)}+A(z)f=0$ 解的增长性，从他们的研究中我们知道了若系数 $A(z)\in G_p$，那么就有 $\sigma_M(f)\le\frac{p}{k}-1$。

后来，李和肖在文献[8]研究了高阶非齐次线性微分方程：

$$f^{(k)}+A(z)f=F(z)\tag{2}$$

解与函数空间的性质，这是对文献[2]中结果的推广，在该文章中得到了如下的结论：

定理 2：若方程(2)中的系数 $A(z), F(z)$ 在 D 上解析且满足：

$$\left|A(z)\right| \le \frac{\alpha}{\left(1-|z|\right)^{\beta}}, F(z) \in H^{p}$$

其中 $\alpha > 0, \beta \ge 0$ 是两个有限的常数。且 $\frac{1}{k} \le p \le \infty$，那么方程(2)解满足

i) 若 $0 \le \beta < k$，那么 $f(z) \in H^{\infty}$；

ii) 若 $\beta = k$，那么 $f(z) \in H^{\infty}_{\frac{\alpha}{k-1}}$；

iii) 若 $k < \beta < \infty$，那么 $f(z) \in \varepsilon^{\beta=k}$。

根据以上结论，2020 年，曾在文献[19]中再一次研究了方程(1)的解与函数空间的关系，得到了如下结论：

定理 2.1.4：若方程(1)中的系数 $A_j\,(j = 0,1,\cdots,k-1), F(z)$ 都是 D 上的解析函数且满足：

$$\left|A_j(z)\right| \le \frac{\alpha}{\left(1-|z|\right)^{\beta-j}}, F(z) \in H^{p}$$

其中 $\alpha > 0, \beta \ge 0$ 是两个有限的常数。且 $\frac{1}{k} \le p \le \infty$， $f(z)$ 为方程(1)的任意非平凡解，那么以下结论成立

i) 若 $0 \le \beta < k$，则 $f(z) \in H^{\infty}$；

ii) 若 $\beta = k$，则 $f(z) \in H^{\infty}_{q}$，其中 q 只与 k, α 及 β 有关；

iii) 若 $\beta > k$，则 $f(z) \in \varepsilon^{\beta-k}$。

定理 2.1.6：设 $A_j\,(j = 0,1,\cdots,k-1), F(z)$ 是 D 上的解析函数且满足

$$\left|A_j(z)\right| \le \frac{\alpha_1}{\left(1-|z|\right)^{\beta_1-j}}, \left|F(z)\right| \le \frac{\alpha_2}{\left(1-|z|\right)^{\beta_2}}$$

其中 $\alpha_i > 0\,(i = 1,2), \beta_1 \ge 0$ 以及 $\beta_2 \ge 0$ 是两个有限的常数。那么方程(1)的任意非平凡解 f(z)满足

i) 若 $0 \le \beta_1 < k$ 且 $0 \le \beta_2 < k$，则 $f(z) \in H^{\infty}$；

ii) 若 $0 \le \beta_1 < k$ 且 $0 \le \beta_2 = k$，则 $f(z) \in H^{\infty}_{q}$；

iii) 若 $0 \le \beta_1 < k$ 且 $\beta_2 > k$，则 $f(z) \in H^{\infty}_{\beta_2-k}$；

iv) 若 $\beta_1 = k$，则对任意有限的 β_2，存在一个常数 $q > 0$，使得 $f(z) \in H^{\infty}_{q}$；

v) 若 $\beta_1 = k$，则对任意有限的 β_2，有 $f(z) \in \varepsilon^{\beta_1-k}$。

3. 相关引理

为了证明本文中的结论，我们需要如下引理；

引理 1 [19] 令 u, v 为 $[0,1)$ 上的非负可积函数，且 c 为一个 0 的常数，如果对任意的 $t \in [0,1)$ 有

$$u(t) \le c + \int_0^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s$$

那么

$$u(t) \le c\exp\left(\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

引理 2 [20] 若方程(1)的系数 $A_j\,(j = 0,1,\cdots,k-1), F(z)$ 都是 D 上的解析函数， $f(z)$ 为方程(1)的解，

那么存在常数 C_1, C_2 满足 $C_1 > 0, C_1 \le C\sum_{j=0}^{k-1}\left|f^{(j)}(0)\right|, C_2 > 0$，则对于所有的 $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in D$ 有

$$\left|f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \le \left(C_1 + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^r \left|F\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-1}\,\mathrm{d}s\right)\cdot\exp\left(C_2\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{j}\int_0^r\left|A_j^n\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-i+n-1}\,\mathrm{d}s\right)$$

引理 3 [20] 若方程(1)的系数 $A_j\left(j = 0,1,\cdots,k-1\right), F(z)$ 都是 D 上的解析函数，$f(z)$ 为方程(1)的解，那么对任意的 $z, z_0 \in D$ 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{k-1} c_n\left(z-z_0\right)^n + \frac{1}{(k-1)!}\int_{z_0}^{z} F(\xi)(z-\xi)^{k-1}\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{j} d_{j,n}\int_{z_0}^{z} A_j^n(\xi) f(\xi)(z-\xi)^{k-j+n-1}\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

其中 $c_n \in D$ 是取决于初始值 $f(z), f'(z), \cdots, f^{k-1}(z)$ 的常数，常数 $d_{j,n} \in Q$，积分路径为 D 上的逐段光滑的曲线。

引理 4 [19] 若函数 $g(\xi)$ 是 D 上的解析函数，令 $h(z) = \int_{z_0}^{z}(z-\xi)^k g(\xi)\mathrm{d}\xi, k \in N^+, z, z_0 \in D$，则对任意满足 $n \le k$ 的自然数 n 有

$$h^n(z) = \frac{k!}{(k-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-\xi)^{k-n} g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

引理 5 若方程(1)的系数 $A_j\left(j = 0,1,\cdots,k-1\right), F(z)$ 都是 D 上的解析函数，$f(z)$ 为方程(1)的解，那么存在常数 C_1, C_2 满足 $C_1 > 0, C_1 \le C\sum_{j=0}^{k-1}\left|f^{(j)}(0)\right|, C_2 > 0$，则对于所有的 $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in D$ 有

$$\left|f'\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \le \left(C_1 + \frac{1}{(k-2)!}\int_0^r \left|F\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-2}\,\mathrm{d}s\right)\cdot\exp\left(C_2\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{j}\int_0^r\left|A_j^n\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-i+n-2}\,\mathrm{d}s\right)$$

证明：由引理 3 和引理 4，我们有：

$$\begin{aligned} \left|f'(z)\right| &= \sum_{n=1}^{k-1} c_n n\left(z-z_0\right)^{n-1} + \frac{1}{(k-2)!}\int_{z_0}^{z} F(\xi)(z-\xi)^{k-2}\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{j} d_{j,n}\int_{z_0}^{z} A_j^n(\xi) f(\xi)(z-\xi)^{k-j+n-2}\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

其中 $c_n \in D$ 是取决于初始值 $f(z), f'(z), \cdots, f^{k-1}(z)$ 的常数，常数 $d_{j,n} \in Q$，积分路径为 D 上的逐段光滑的曲线。我们令 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \xi = s\mathrm{e}^{i\theta}$，满足 $0 \le s \le r < 1$，我们令 $z_0 = 0$，那么上面的积分路径就变为 $[0, z]$ 这条线，这时我们可得

$$\begin{aligned} \left|f'\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| &= C_1 + \frac{1}{(k-2)!}\int_0^z \left|F\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-2}\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + C_2\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{j} d_{j,n}\int_0^z \left|A_j^n\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|\left|f\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|(1-s)^{k-j+n-2}\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

结合引理 1，结论得证。

4. 定理及证明

有了以上的结论之后，我们在此基础上考虑了方程(1)的解与 γ-Bloch-Orilicz 空间之间的关系，并得到了如下的一些结论。

定理 1. 若方程(1)的系数 $A_j\left(j=0,1,\cdots,k-1\right), F\left(z\right)$ 在 D 上的解析且满足 $A_j^{(k-1)}, F\left(z\right)\in B_\gamma^\varphi$，其中 $\gamma>0$，则方程(1)的解 $f\left(z\right)$ 满足 $\sigma_M\left(f\right)<\gamma$。

证明：根据 γ-Bloch-Orilicz 空间的定义以及定理 1 的条件可知，存在两个常数 $\gamma, C_0>0$，对于所有的 $j=0,1,\cdots,k-1$ 和 $z\in D$，我们有下列不等式成立；

$$\left|A_j^{k-1}\left(z\right)\right|\le\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right), \left|F'\left(z\right)\right|\le\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

令 $g\left(t\right)\le\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$，那么 $g\left(t\right)$ 在 $[0,1)$ 上是增函数，则对于任意的 $z\in D$ 以及所有的 $s\in\left\{s:|s|\le z\right\}$，有以下不等式成立

$$\left|A_j^{k-2}\left(z\right)\right|\le\left|A_j^{k-2}\left(0\right)\right|+\int_0^z\left|A_j^{k-1}\left(s\right)\right|\mathrm{d}s\le\left|A_j^{k-2}\left(0\right)\right|+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0|z|}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

$$\left|A_j^{k-3}\left(z\right)\right|\le\left|A_j^{k-3}\left(0\right)\right|+\left|A_j^{k-2}\left(0\right)\right|+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left|A_j'\left(z\right)\right|\le\sum_{i=1}^{k-2}\left|A_j^i\left(0\right)\right||z|^{k-2}+\left|A_j^{k-2}\left(0\right)\right|+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0|z|^{k-2}}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

$$\left|A_j\left(z\right)\right|\le\sum_{i=1}^{k-1}\left|A_j^i\left(0\right)\right||z|^{k-1}+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0|z|^{k-1}}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

通过以上结果，那么对于所有的 $j=0,1,\cdots,k-1$ 和所有的 $i=0,1,\cdots,k-1$，我们有：

$$\left|A_j^i\left(z\right)\right|\le C_{A_j^i}+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

类似地，我们可以得到

$$\left|F\left(z\right)\right|\le C_F+\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)$$

结合引理 2，以及(3) (4)两个不等式，那么存在两个正常数 C_1, C_2，我们可以得到如下结论：

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\left(C_1+\frac{1}{k!}\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)\right)\cdot\exp\left(C_2\varphi^{-1}\left(\frac{C_0}{\left(1-|z|^2\right)^\gamma}\right)\right)$$

此时我们有：

$$\sigma_M(f) \le \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ \varphi^{-1}\left(\dfrac{C_0}{\left(1-|r|^2\right)^{\gamma}}\right)}{\log \dfrac{1}{r-1}} = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+\left(\dfrac{1}{(1-r)^{\gamma}}\varphi^{-1}\left(\dfrac{C_0}{(1+r)^{\gamma}}\right)\right)}{\log \dfrac{1}{r-1}} = \gamma + \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log^+ \varphi^{-1}\left(\dfrac{C_0}{(1+r)^{\gamma}}\right)}{\log \dfrac{1}{r-1}} = \gamma$$

结论得证。

定理 2. 若方程(1)的系数 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1), F(z)$ 在 D 上的解析且满足

$$\left|A_j^{k-1}(z)\right| \le \log \frac{\alpha}{\left(1-|z|\right)^{\beta}}, \left|F(z)\right| \le \frac{\alpha}{\left(1-|z|\right)^{\beta}}$$

其中 $\alpha > 1, \beta \ge 0$ 是两个有限的常数，对于所有的 $t\in[0,\infty)$，令 $\varphi(t)\le t^m\ (m>1)$ 成立，那么方程(1)非平凡解 $f(z)$ 满足：

i) 若 $0<\beta\le k-1$，那么 $f(z)\in B^{\varphi}_{m(\beta+1)}$；

ii) 若 $\beta>k-1$，那么 $f(z)\in B^{\varphi}_{m(2\beta+2-k)}$

证明：由引理 5 及定理 2 的条件可知，存在两个正数 C_1, C_2 使得

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \le \left(C_1 + \frac{C^*}{(1-r)^{\beta+1-k}}\right)\cdot \exp\left(C_2^* \log \frac{\alpha}{(1-r)^{\beta+1}}\right)$$

成立，其中 $C^* = \dfrac{\alpha}{(\beta+1-k)(k-2)!}$，$C_2^*$ 是一个正常数，那么存在一个常数 $C_3>0$ 使得

$$\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \le C_3\left(\frac{1}{(1-r)^{2\beta+2-k}} + \frac{1}{(1-r)^{\beta+1}}\right)$$

成立。

因为 $\varphi(t)\le t^m$，那么我们有

$$\varphi\left(\lambda\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\right) \le \left(C_3\left(\frac{1}{(1-r)^{2\beta+2-k}} + \frac{1}{(1-r)^{\beta+1}}\right)\right)^m$$

若 $0<\beta\le k-1$，则有

$$\varphi\left(\lambda\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\right) \le O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{m(\beta+1)}$$

这就意味着 $f(z)\in B^{\varphi}_{m(\beta+1)}$，

若 $\beta > k-1$，我们有

$$\varphi\left(\lambda\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\right) \le O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{m(2\beta+2-k)}$$

此时我们便能得到 $f(z) \in B^{\varphi}_{m(2\beta+2-k)}$，

结论得证。

给定任意的 $t \in [0,\infty)$，令 $\varphi(t) = t$，则可以得到下列推论，

推论 3. 若方程(1)的系数 $A_j\ (j = 0,1,\cdots,k-1), F(z)$ 在 D 上的解析且满足

$$\left|A_j^{k-1}(z)\right| \le \log\frac{\alpha}{(1-|z|)^{\beta}}, \left|F(z)\right| \le \frac{\alpha}{(1-|z|)^{\beta}}$$

其中 $\alpha > 1, \beta \ge 0$ 是两个有限的常数，那么方程(1)非平凡解 $f(z)$ 满足：

i) 若 $0 < \beta \le k-1$，那么 $f(z) \in B^{\beta+1}$；

ii) 若 $\beta > k-1$，那么 $f(z) \in B^{2\beta+2-k}$。

基金项目

国家自然科学基金(11861024, 11561012)。

参考文献

[1] Pommerenke, Ch. (1982) On the Mean Growth of the Solutions Complex Linear Differential Equations in the Disk. *Complex Variables*, **1**, 23-38. https://doi.org/10.1080/17476938208814004

[2] Heittokangas, J. (2000) On Complex Differential Equations in the Unit Disc. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Dissertationes*, **122**, 1-54.

[3] Essen, M., *et al*. (2006) Several Function-Theoretic Characterizations of Mobius Invariant Q_k Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **230**, 78-115. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2005.07.004

[4] Grohn, J., Huusko, J.-M. and Rattya, J. (2018) Linear Differential Equations with Slowly Growing Solutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **370**, 7201-7227. https://doi.org/10.1090/tran/7265

[5] Grohn, J., Nicolan, A. and Rattya, J. (2018) Mean Growth and Geometric Zero Distribution of Linear Differential Equations. *Journal d'Analyse Mathematique*, **134**, 747-768. https://doi.org/10.1007/s11854-018-0024-0

[6] Heittokangas, J., Korhonen, R. and Rattya, J. (2007) Linear Differential Equations with Solutions in the Dirichlet Type Subspace of the Hardy Space. *Nagoya Mathematical Journal*, **187**, 91-113. https://doi.org/10.1017/S0027763000025861

[7] Heittokangas, J., Korhonen, R. and Rattya, J. (2008) Linear Differential Equations with Coefficients in Weighted Bergman and Hardy Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **360**, 1035-1055. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04335-8

[8] Li, M.X. and Xiao, L.P. (2014) Solutions of Linear Differential Equations in the Unit Disc. *Journal of Mathematical Research with Applications*, No. 6, 729-735.

[9] Li, H. and Wulan, H. (2011) Linear Differential Equations with Solutions in the Q_k Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 478-489. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.028

[10] Pau, J. and Pelaez, J.A. (2019) Logarithms of the Derivative of Univalent Functions in Q_k Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **350**, 184-194.

[11] Rattya, J. (2007) Linear Differential Equations in Hardy Spaces, Complex. *Variables and Elliptic Equations*, **52**, 785-795. https://doi.org/10.1080/17476930701609478

[12] Anderson, J., Claunie, J. and Pommerenke, Ch. (1974) On the Bloch Functions and Normal Functions. *Journal für die reine und Angewandte Mathematik*, **270**, 12-37. https://doi.org/10.1515/crll.1974.270.12

[13] Zhu, K. (1993) Bloch Type Spaces of Analytic Functions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **23**, 1142-1177. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072549

[14] Fernandez, J.C.R. (2010) Composition Operators on Bloch-Orlicz Type Spaces. *Applied Mathematics and Computa-

tion, **217**, 3392-3402. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.09.004

[15] Li, H. and Guo, Z. (2015) On a Product-Type Operator from Zygmund-Type Spaces to Bloch-Orlicz Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, 132. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0658-8

[16] Duren, P.L. (1970) Theory of H_p Spaces. Academic Press, New York.

[17] Chyzhyzov, I., Heitrttokangas, J. and Rattya, J. (2010) Sharp Logarithmic Derivative Estimates with Applications to Ordinary in the Unit Disc. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 145-167. https://doi.org/10.1017/S1446788710000029

[18] Chyzhyzov, I., Gundersen, G.G. and Heitrttokangas, J. (2003) Linear Differential Equations and Logarithmic Derivate of Estimates. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **86**, 735-754. https://doi.org/10.1112/S0024611502013965

[19] 曾三桂. 单位圆上复线性微分方程解的性质[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州师范大学, 2020.

[20] Heittokangas, J., Korhonen, R. and Rattya, J. (2009) Growth Estimates for Solutions of Nonhomogeneous Linear Complex Differential Equations. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **34**, 145-156.