

# t-分布下含有背景风险的情绪优化投资组合

任倩梅, 党亚峥\*, 何泽秀

上海理工大学管理学院, 上海  
Email: 2451014100@qq.com, \*jgdyz@163.com

收稿日期: 2020年12月28日; 录用日期: 2021年1月28日; 发布日期: 2021年2月4日

## 摘要

投资者在做证券投资决策时都会面临背景风险, 这种风险在短时间内不能进行对冲。另外, 投资者在投资时还会因自身情绪变化从而对未来预期产生系统性偏差。但大多数投资组合模型并没有考虑这两个因素, 所以不能准确度量收益与风险。本文是在传统的均值-CVaR模型下, 还考虑了背景风险和投资者情绪, 在情绪函数作用下重新去度量投资组合的收益与风险, 并且在收益率序列服从t-分布的假设下简化了CVaR使求解更简单, 最后通过PHR乘子法得到投资组合的最优解析解。

## 关键词

CVaR, 背景风险, 情绪, 投资组合

# Emotional Optimization Portfolio with Background Risk under t-Distribution

Qianmei Ren, Yazheng Dang\*, Zexiu He

School of Management, Shanghai Polytechnic University, Shanghai  
Email: 2451014100@qq.com, \*jgdyz@163.com

Received: Dec. 28<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jan. 28<sup>th</sup>, 2021; published: Feb. 4<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

Investors face background risks when making securities investment decisions, which cannot be hedged in a short period of time. In addition, when investors invest, they will have systematic deviation to the future expectation due to their own mood changes. But most portfolio models do not take these two factors into account, so they cannot accurately measure return and risk. This

\*通讯作者。

article is under the traditional average-CVaR model, considered the background risk and investor sentiment, under the effect of emotional function again to measure the returns and risk of portfolio, and based on the distribution of the yield sequence to obey t-to simplify the solution CVaR made under the assumption of more simple, the final portfolio is obtained by PHR multiplier method, the optimal analytical solution.

## Keywords

CVaR, Background Risk, Emotion, Portfolio

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

证券投资基金成立的意义之一便是使投资者将自己的资金分散投资到不同的有价证券上, 以达到分散风险的目的。那么, 如何有效地构建投资组合来分散风险并使风险和收益处于平衡状态便成了金融学家和经济学家十分关注的问题。

马科维茨[1]构建的均值-方差模型, 用收益率的方差来度量投资组合的风险, 该模型的问世标志着现代投资资产组合定量管理理论的一大进步。之后, 学者们对传统 M-V 模型进行了不断地改进研究。Konno 和 Yamazaki [2]二人研究发现绝对离差比方差更能准确地度量风险, 构建了均值-绝对离差模型。Ouderri B.N.和 Sullivan W.G. [3]又建立了均值-半方差模型, 该模型解决了绝对离差风险测度模型不能反映资产间相关性的问题[4]。在上世纪 90 年代 JP Morgan 公司提出了在险价值(VaR) [5], VaR 不仅能比较全面地度量金融风险, 并且便于金融机构和相关部门进行有效的风险管理, 所以其应用十分广泛。但 VaR 不能满足一致性风险度量的公理化要求[6], 这样可能导致系统风险。2000 年 Rockfellar 和 Uryasev [7]两人提出了条件在险价值(CVaR), CVaR 即能满足一致性风险度量的公理化要求。然而, 前面提到的几种风险度量都只能度量金融上的风险, 但投资者在进行投资时还存在着背景风险, 随后 Huang 和 Wang [8]研究了含有背景风险的投资组合。李莹莹和刘勇军[9]还研究了加性和乘性两类背景风险对投资组合的影响。另外投资者情绪的变动对投资决策也会产生很大的影响, 姜继娇和杨乃定[10]根据投资者的不同心理状态重新度量了资产的收益与风险。本文便是在传统的均值-CVaR 模型的基础上引入了背景风险和投资者情绪, 在行为金融学的框架下构建了 t-分布下包含背景风险和投资者情绪的均值-CVaR 模型, 并选取了国内股票市场中的 6 支股票的历史数据, 通过 Matlab 对这 6 支股票进行实证分析, 实现在收益确定的约束下满足 CVaR 最小的目的, 最终确定投资比例。

## 2. 模型的构建

马科维茨在构建模型前假设投资者的资产收益率服从正态分布[11], 但金融资产或资产组合的收益率序列表现的是尖峰厚尾的特点, 所以用正态分布来描述收益率序列是不准确的。由 JP Morgan 公司提出的在险价值(VaR) [5]即对于任何分布都是有效的, 但 VaR 对厚尾的考虑不够充分, 并且不能满足一致性风险度量的公理化要求[6], 于是风险度量理论界针对 VaR 的不足提出了条件在险价值(CVaR)。

条件在险价值(CVaR) [12]是指在给定的置信水平  $\beta$  下, 投资组合的损失超过 VaR 的条件平均值。设  $f(X, r)$  为投资组合的损失函数, 其中  $X$  是投资权重向量,  $r$  是收益率随机变量, 当投资组合当收益是负

值时, 则此时投资组合亏损, 损失函数  $f(X, r) = -X^T r$ 。对任意固定  $X$ ,  $f(X, r)$  是关于  $r$  的函数。现在设  $r$  是连续型随机变量,  $r$  的密度函数是  $P(r)$ , 则对任意  $\delta \in R$ , 预期损失的分布函数为

$$\int f(X, r) \delta \leq P(r) dr$$

$$\int_{f(X, r) \leq \delta} P(r) dr \quad (1)$$

式(1)表示预期损失  $f(X, r)$  不超过  $\delta$  的概率, 它是关于  $\delta$  的非增、右连续函数。那么在给定置信水平  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1$ ) 下,  $\text{VaR}_\beta$  表示为:

$$\text{VaR}_\beta = \min \{ \delta \in R : \psi(X, \delta) \geq \beta \} \quad (2)$$

同时由 CVaR 的定义可得出  $\text{CVaR}_\beta$  可表示为:

$$\text{CVaR}_\beta = E(f(X, r) | f(X, r) \geq \text{VaR}_\beta) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(X, r) \geq \text{VaR}_\beta} f(X, r) P(r) dr \quad (3)$$

现假设各资产的收益率服从联合正态分布, 即  $r \sim N(\mu, \Lambda)$ , 其中  $\mu = E(r)$ ,  $\Lambda$  是  $n$  种风险资产收益率向量  $r$  的方差-协方差矩阵, 则  $f(X, r) \sim (-X^T \mu, X^T \Lambda X)$ , 即  $f(X, r) \sim (-r_p, \sigma_p^2)$ 。则此时[13]

$$\text{CVaR} = E(f(X, r) | f(X, r) \geq \text{VaR}_\beta) = t(\alpha) \sigma_p - r_p \quad (4)$$

其中

$$t(\alpha) = \frac{\phi[\Phi^{-1}(\alpha)]}{1 - \alpha} \quad (5)$$

由前面可知, 使用正态分布来描述收益率是不准确的, 而  $t$ -分布相比正态分布便更能显出尖峰厚尾的特点, 更适合求解波动性[14]。由文献[15]可知在  $t$ -分布的假设下(5)式可改写为

$$t(\alpha) = \frac{f[t_v^{-1}(\alpha)]}{1 - \alpha} \quad (6)$$

其中  $t_v(\alpha)$  表示标准  $t$ -分布的累积分布函数, 可通过计算机求解  $t_v(\alpha)$  的逆  $t_v^{-1}(\alpha)$ 。  $f$  是  $t$ -分布的密度函数。

然而, CVaR 只能度量金融上的风险, 李婷[16]等学者发现投资者在做投资决策时还会受投资者身体健康状况、劳动收入、房地产投资等一系列背景因素影响, 这些背景因素是客观存在的, 所以做投资组合时仅考虑风险资产的风险是不够的, 还要考虑由背景因素引发的背景风险。

现假设投资者投资到传统的风险资产上的资金比例是  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ), 则其余  $(1 - \omega)$  占比的资金将被投资到背景风险资产上, 其中  $\omega$  称作背景风险偏好度。另设背景风险资产的收益率是  $r_b$ , 则投资组合的期望收益率是[6]

$$E(R) = \omega X^T E(r) + (1 - \omega) E(r_b) \quad (7)$$

其中  $E(r)$  表示该投资组合的风险资产的期望收益率向量。

在上述传统的金融投资组合理论中, 都假设投资者是理性的, 然而近年来学者发现投资者对信息的“非理性”反应引起了股票市场的“异象”, 于是行为金融学掀起了一股热潮。根据价值投资理念[17], 许多投资者没有做好预判工作, 容易产生心理误区。因为情绪的影响, 投资者在对投资组合的收益与风险进行判断时出现了偏差。

现假设投资者对资产  $i$  的情绪为  $s_i$ ,  $\mu_i$  是资产  $i$  的期望收益,  $\sigma_i^2$  是资产  $i$  的方差。此时设情绪认知收益是  $\mu_{is}$ 、情绪认知风险是  $\sigma_{is}$ , 有[18]:

$$\sigma_{is}^2 = f(s_i) \cdot \sigma_i^2 \quad (8)$$

$$\mu_{is} = g^{-1}(s_i) \cdot \mu_i \quad (9)$$

其中,  $f(s_i) > 0$  和  $g^{-1}(s_i) > 0$  为情绪影响函数。当投资者的情绪乐观( $s_i > 0$ )时, 投资者将高估收益而低估风险, 当投资者的情绪悲观( $s_i < 0$ )时, 投资者将低估收益而高估风险, 当投资者理性( $s_i = 0$ )时, 此时对收益和风险的判断没有偏差。

现假设  $g(s) = e^{-0.2s}$ ,  $f(s) = e^{-0.4s}$ 。另设背景风险的期望收益率  $E(r_b) = 0.008$ , 投资组合的最低期望收益率  $M = 0.04$ , 投资到传统风险资产的比例  $w = 0.8$ , 则投资到背景风险资产的比例为 0.2。则基于式(1)~(9)所构建的新模型为:

$$\begin{aligned} & \min e^{-0.4s} \cdot (t(\alpha)\sigma_p - r_p) \\ & \text{s.t. } e^{0.2s} \cdot (wX^T E(r) + (1-w)E(r_b)) \geq M \\ & \quad X^T I = 1 \\ & \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $I = (1, 1, \dots, 1)^T$  表示一个  $n$  维列向量,  $x_i \geq 0$  说明资产不允许卖空。

### 3. 模型的求解

由于该模型为带有等式约束和不等式约束的连续型问题, 现采用 PHR 算法进行求解, 其基本思想是: 把解等式约束优化问题的乘子法推广到不等式约束优化问题, 即先引进辅助变量把不等式约束化为等式约束, 然后再利用最优性条件消去辅助变量。其计算步骤如下:

步 0 选取初始值。给定  $x_0 \in R^n$ ,  $\mu_1 \in R^l$ ,  $\lambda_1 \in R^m$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $0 \leq \xi \ll 1$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\eta > 1$ 。令  $k := 1$ 。

步 1 求解子问题。以  $x_{k-1}$  为初始点, 求解无约束子问题  $\min \psi(x, \mu_k, \lambda_k, \sigma_k)$  的极小点  $x_k$ , 其中

$$\psi(x, \mu, \lambda, \sigma) = f(x) - \sum_{i=1}^l \mu_i h_i(x) + \frac{2}{\sigma} \sum_{i=1}^l h_i^2(x) + \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^m \left( \left[ \min \{0, \sigma, g_i(x) - \lambda_i\} \right]^2 - \lambda_i^2 \right)$$

步 2 检验终止条件。若  $\beta_k \leq \xi$ , 则停止迭代, 输出  $x_k$  作为原问题的近似极小点; 否则, 转步 3, 其中

$$\beta_k = \left( \sum_{i=1}^l h_i^2(x_k) + \sum_{i=1}^m \left[ \min \left\{ g_i(x_k), \frac{(\lambda_k)_i}{\sigma} \right\} \right]^2 \right)^{1/2}$$

步 3 更新罚参数。若  $\beta_k \geq \theta \beta_{k-1}$ , 令  $\sigma_{k+1} := \eta \sigma_k$ 。

步 4 更新乘子向量。计算

$$\begin{aligned} (\mu_{k+1})_i &= (\mu_k)_i - \sigma h_i(x_k), \quad i = 1, \dots, l, \\ (\lambda_{k+1})_i &= \max \{0, (\lambda_k)_i - \sigma g_i(x_k)\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

步 5 令  $k := k + 1$ , 转步 1。

### 4. 实证分析

为了证明该理论模型的合理性, 从证券市场选取了 6 支热门股票, 分别是中信证券、君正集团、华天科技、省广集团、领益智造和格力电器。采取 EXCEL 软件处理数据, 分别计算从 2018 年 8 月 1 日到 2020 年 8 月 1 日共 24 个月的月收益率, 收益率计算结果如下表 1。

**Table 1.** The codes, names and monthly average returns of the six stocks**表 1.** 六支股票的代码、名称及月均收益率

证券代码	证券名称	月均收益率(%)
600030	中信证券	2.9300
601216	君正集团	7.7154
002185	华天科技	5.9179
002400	省广集团	6.4396
002600	领益智造	6.7375
000651	格力电器	1.3346

此外,我们设定该投资理论新模型中的置信度  $\beta = 95\%$ , 预期收益率是 0.04, 分别研究投资者情绪乐观(设  $s = 0.1$ )、情绪悲观(设  $s = -0.1$ )以及情绪理智( $s = 0$ )时的投资决策,按照 PHR 算法步骤使用 MATLAB 求解该模型,综合分析得到最优解,对各支股票的投资分配权重如下表 2。

**Table 2.** Investment ratio of 6 stocks under different sentiments**表 2.** 不同情绪下 6 支股票的投资比例

$s$	中信证券 600030	君正集团 601216	华天科技 002185	省广集团 002400	领益智造 002600	格力电器 000651
-0.1	0.3381	0.0047	0.3384	0.1736	0.1036	0.0416
0	0.3368	0.0035	0.3322	0.1681	0.0972	0.0623
0.1	0.3354	0.0023	0.3260	0.1628	0.0909	0.0825

由以上数值实验结果分析可知,无论投资者的情绪处于什么状态,君正集团的投资比例都是最低的。因为优化模型是在满足最低期望收益的约束下使风险最小,在这六支股票中君正集团的收益率是最高的,所以其风险也是最高的,那么为了规避风险其投资比例是最低的。而收益率居中的中信证券和华天科技其投资比例是最高的,因为其风险也居中,投资比例高利于规避风险。省广集团的收益率较高,但风险比君正集团低,所以省广集团占有较高的投资比例也是合理的。由此说明该模型合理可行。另外可以明显看出,不同情绪下其投资比例相差较大,所以投资者情绪对投资决策有很大的影响,在优化模型中考虑投资者情绪是很重要的。

## 5. 结论与展望

本文在现有相关研究成果的基础上,在假设投资者是风险厌恶者并且投资市场没有摩擦的条件下,建立了包含背景风险和投资者情绪的均值-CVaR 投资组合模型,该模型能够更全面地度量风险并且量化了投资者因情绪波动而引发的偏差,并且由数值实验可知该模型合理可行。另外该模型采用 t-分布,既简化了模型使计算方便又符合收益率序列尖峰厚尾的特征。

长期以来[19],资产配置是否有效一直被视为投资是否成功的关键判断,对于投资组合来说,分散投资即资产配置。虽然目前我国的资产配置还在起步阶段,但国家正在努力推动金融市场对外开放,如果将资产配置推向国际市场,充分发挥市场资源配置力量,则可以更好地分散风险以获得更高的收益,也更利于我国投资者进行资产配置。

## 参考文献

- [1] Mao, J.C.T. (1970) Model of Capital Budgeting E-V vs E-S. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4, 657-675. <https://doi.org/10.2307/2330119>

- 
- [2] Konno, H. and Yamazaki, H. (1991) Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, **37**, 519-531. <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>
- [3] Oudjerri, B.N. and Sullivan, W.G. (1991) A Semi-Variance Model for Incorporating Risk into Capital Investment Analysis. *The Engineering Economist*, **36**, 83-106. <https://doi.org/10.1080/00137919108903035>
- [4] 姜晓兵, 温小霓. 现代投资组合理论中风险测度方法的比较分析[J]. 价值工程, 2006, 25(5): 122-123.
- [5] Morgan, J.P. (1997) CreditMetrics—Technical Document. *Jp Morgan*, **5**, 48-51.
- [6] 李佳, 徐维军, 张卫国. 含有背景风险的双目标投资组合模型研究[J]. 运筹与管理, 2017, 26(4): 118-123.
- [7] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, **2**, 21-42. <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>
- [8] Huang, H. and Wang, C. (2013) Portfolio Selection and Portfolio Frontier with Background Risk. *North American Journal of Economics and Finance*, **26**, 177-196. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2013.09.001>
- [9] 李莹莹, 刘勇军. 考虑背景风险的多期破产控制投资组合模型[J]. 河南科学, 2020, 38(2): 292-301.
- [10] 姜继娇, 杨乃定. 基于认知风险价值的行为证券组合模型[J]. 系统工程, 2007, 24(1): 71-75.
- [11] 刘红. 投资学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [12] Uryasev, S. (2000) Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. *Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering*, New York, 26-28 March 2000, 49-57.
- [13] 黄秀路. 基于 CVaR 风险度量角度的投资组合优化模型的理论及实证研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南财经大学, 2013.
- [14] 邵欣炜. 基于 VaR 的金融风险度量与管理[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2004.
- [15] 房成德. 金融市场风险管理及其优化算法研究[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2016.
- [16] 李婷, 张卫国, 徐维军. 考虑背景风险因素的模糊投资组合选择模型[J]. 系统工程, 2012, 30(12): 33-38.
- [17] 兰洁, 项锐, 熊亚洲. 浅析价值投资理念下投资心理误区[J]. 科技创业月刊, 2019, 32(10): 44-45.
- [18] Arkes, H., Herren, L. and Isen, A. (1988) The Role of Potential Loss in the Influence of Affect on Risk Taking Behavior. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, **35**, 124-140.
- [19] 张学勇, 张琳. 大类资产配置理论研究评述[J]. 经济学动态, 2017(2): 137-147.