Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 164-172
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112023

Hans汉斯

无穷Laplace方程的超定边值问题

李艳辉，黄小涛

南京航空航天大学理学院，江苏 南京
Email: liyanhui@nuaa.edu.cn

收稿日期：2020年12月28日；录用日期：2021年1月28日；发布日期：2021年2月4日

摘 要

在有界环形区域上，研究一类无穷Laplace方程的超定边值问题，证明方程解的对称性及环形区域的对称性。首先构造与点到边界距离有关的web函数作为方程特解，此特解的存在性等价于Ω为Stadium-like区域，通过对Stadium-like区域的性质分析，证明Ω为一个同心球环。该结论可以推广到Laplace方程与p-Laplace方程。

关键词

无穷Laplace方程，超定边值问题，Stadium-Like区域，Web函数，对称性

Overdetermined Boundary Value Problems for the Infinity Laplace Equation

Yanhui Li, Xiaotao Huang

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: liyanhui@nuaa.edu.cn

Received: Dec. 28th, 2020; accepted: Jan. 28th, 2021; published: Feb. 4th, 2021

Abstract

The aim of this paper is to study a class of overdetermined boundary value problems of ∞-Laplace equations in bounded annular domains, and prove the symmetry of both the solutions and the annular domains. Firstly, we construct a web function which is related with the distance to the boundary as a special solution of ∞-Laplace equations. Then by analyzing the properties of stadium-like domains, we prove that Ω is a spherical ring with same center via the fact that the existence of special solutions is equivalent to that Ω is a stadium-like domain. Finally, we show that the conclusion can be extended to Laplace equations and p-Laplace equations.

文章引用: 李艳辉, 黄小涛. 无穷 Laplace 方程的超定边值问题[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 164-172.
DOI: 10.12677/pm.2021.112023

Keywords

Infinity Laplace Equations, Overdetermined Boundary Value Problems, Stadium-Like Domains, Web Function, Symmetry

1. 引言

超定边值问题是偏微分方程研究的重要内容之一。从上世纪 70 年代开始，众多学者对微分方程的超定边值问题进行研究。1971 年，Serrin [1]利用移动平面法，研究方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial v} = c & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

在有界区域上解的对称性，得到方程解的特定形式，并证明了 Ω 是一个球。1987 年，Garofalo 和 Lewis [2]研究了 p-Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial v} = c & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的超定边值问题，得到了解和区域的对称性。2014 年，Fall 和 Jarohs [3]研究了分数阶 Laplace 方程

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 1 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in R^n \setminus \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial v} = c & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

得到方程解的形式并证明了 Ω 是一个球。

关于超定边值问题，不仅各类方程被充分研究，比如 Laplace 方程、高阶 Laplace 方程、k-Hessian 方程、分数阶 Laplace 方程等，方程所在的各种区域也被充分研究，比如有界区域、外部区域、环形区域等。研究方法主要包括移动平面法、移动球面法[4]、不动点定理、重排、变分法[5]等。

二阶非退化椭圆方程的超定边值问题已经取得了一系列丰富的成果，但关于退化椭圆方程超定边值问题的研究相对较少。本文拟研究一类退化椭圆方程即无穷 Laplace 方程在环形区域上的超定边值问题。关于无穷 Laplace 方程的研究最早起源于上世纪六十年代。Arosson [6]在研究 L^∞ 泛函的绝对极小时，证明了绝对极小的 Euler 方程必是无穷 Laplace 方程的解。无穷 Laplace 方程不仅可以完善泛函分析的理论，而且在实际中有着更广泛的应用，其在 tug-of-war 博弈、最优传输问题、图像处理及弹性力学等方面有着广泛的应用。

无穷 Laplace 方程的一般形式为

$$\Delta_\infty u = \left\langle D^2uDu, Du \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} D_iuD_juD_{ij}u = f,$$

其中 Du 表示 u 的梯度， D^2u 表示 u 的 Hessian 矩阵。

关于∞-Laplace 方程解的存在唯一性，1993 年 Jensen [7]首次用连续梯度约束的粘性解理论给出了无穷调和函数即 $-\Delta_\infty u = 0$ 方程解的唯一性。2008 年，陆国振和王培勇在文献[8]中利用偏微分方程的方法讨论了解的存在性和唯一性。另一方面，2009 年，Peres、Schramm、Sheffield 和 Wilson 在文献[9]中利用概率论的方法证明了当 f 连续且 u 在边界上也连续时，tug-of-war 博弈问题的连续解就是 $-\Delta_\infty u = f$ 的解。

关于∞-Laplace 方程解的正则性，2008 年 Evans 与 Savin 在文献[10]中证明了二维无穷调和函数是 $C^{1,\alpha}$ 的，但是 Hölder 指数 α 的取值并未确定。2011 年 Evans 和 Smart 在文献[11] [12]中用正则逼近的方法证明了 n 维欧式空间中无穷调和函数是处处可微的。由反例可猜想无穷调和函数最好的正则性是 $C^{1,\frac{1}{3}}$，但是目前还没有文献证明得到这一正则性指标。

关于无穷 Laplace 方程解的对称性，Buttzaao 和 Kawohl [13]研究了无穷 Laplace 方程在边值条件

$$u = 0 \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = a, x \in \partial\Omega \quad (a > 0 \text{ 为常数})$$

下的超定边值问题，利用边界距离函数的性质得到了方程的一个对称粘性解。Crasta 和 Fragala [14]证明了方程 web 粘性解在有界凸区域上的存在唯一性及 Ω 的对称性。

本文尝试研究下列环形区域上的超定边值问题：假设 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset R^n$ 为边界 C^2 光滑的有界区域，$\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$， $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ 为方程

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u = 1 & x \in \Omega, & (1.1) \\ u = c, -\dfrac{\partial u}{\partial \eta_1} = a_1 & x \in \partial\Omega_1, & (1.2) \\ u = 0, -\dfrac{\partial u}{\partial \eta_2} = a_2 & x \in \partial\Omega_2, & (1.3) \end{cases}$$

的粘性解，其中 c, a_1, a_2 为某些固定的常数。

由于无穷 Laplace 算子的高度退化性，方程的研究存在一定的困难。且由于方程不存在极值原理，所以无法用移动平面法来证明解和区域的对称性。本文综合[13] [14]的思想，引入距离函数研究无穷 Laplace 方程在环形区域上的超定边值问题。

本文将证明下述结论：

定理 1：假设 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset R^n$ 为边界为 C^2 的有界区域，$\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$，$B_{R_2}$ 为 Ω_2 的半径为 R_2 的外接球，$d(x) = d(x, \partial\Omega_2)$。则函数

$$u(x) = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left(R_2^{\frac{4}{3}} - \left(R_2 - d(x)\right)^{\frac{4}{3}}\right)$$

是(1.1)~(1.3)的唯一 web 粘性对称解当且仅当 $M(\Omega) = R(\Omega)$，并且 Ω 为一同心球环。

上述证明方法可应用到 p-Laplace 方程，得到下面推论：

推论 2：假设 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset R^n$ 为边界为 C^2 的有界区域，$\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$，$B_{R_2}$ 为 Ω_2 的外接球，半径为 R_2。则

$$u = \frac{p-1}{p} n^{\frac{-p}{p-1}} \left(R_2^{\frac{p}{p-1}} - \left(R_2 - d(x)\right)^{\frac{p}{p-1}}\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$$

为下面超定边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1 & x \in \Omega, & (1.4) \\ u = c, -\dfrac{\partial u}{\partial \eta_1} = a_1 & x \in \partial\Omega_1, & (1.5) \\ u = 0, -\dfrac{\partial u}{\partial \eta_2} = a_2 & x \in \partial\Omega_2, & (1.6) \end{cases}$$

的唯一粘性对称解，其中 c, a_1, a_2 为某些固定的常数， $d(x) = d(x, \partial\Omega_2)$，当且仅当 $M(\Omega) = R(\Omega)$，并且 Ω 为一同心球环。

本文第二部分主要介绍所需要的一些预备知识，第三部分将给出定理以及推论的证明。

2. 预备知识

首先给出无穷 Laplace 方程和 p-Laplace 方程的一些基础知识和结论。

正如绪论说明，目前无穷 Laplace 方程和 p-Laplace 方程解的正则性最高只到 $C^{1,\alpha}$，无法给出古典解的定义，所以在此给出方程粘性解的定义。

定义 1 [15]：设 $u \in C^1(\bar{\Omega})$，如果对任意的 $x_0 \in \Omega$ 和任意的检验函数 $\varphi \in C^2(\Omega)$，若 $u - \varphi$ 在 x_0 取得局部极大值，都有

$$F(D\varphi, D^2\varphi)(x_0) = -\langle D^2\varphi D\varphi, D\varphi \rangle (x_0) - 1 = -\Delta_\infty \varphi(x_0) - 1 \le 0$$

成立，则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_\infty u = 1$ 的粘性下解。

类似地，如果对任意的 $x_0 \in \Omega$ 和任意的检验函数 $\varphi \in C^2(\Omega)$，若 $u - \varphi$ 在 x_0 取得局部极小值，都有

$$F(D\varphi, D^2\varphi)(x_0) = -\langle D^2\varphi D\varphi, D\varphi \rangle (x_0) - 1 = -\Delta_\infty \varphi(x_0) - 1 \ge 0$$

成立，则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_\infty u = 1$ 的粘性上解。若 u 在 Ω 中既是方程 $-\Delta_\infty u = 1$ 的粘性下解又是粘性上解，则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_\infty u = 1$ 的粘性解。

同样地 p-Laplace 方程粘性解定义如下。

定义 2：设 $u \in C^1(\bar{\Omega})$，如果对任意的 $x_0 \in \Omega$ 和任意的检验函数 $\varphi \in C^2(\Omega)$，若 $u - \varphi$ 在 x_0 取得局部极大(小)值，都有

$$\begin{aligned} & F(D\varphi, D^2\varphi)(x_0) = -\Delta_P \varphi(x_0) - 1 \\ & = \left(-|D\varphi|^{P-2} trace(D^2\varphi) - (p-2)|D\varphi|^{P-4} \langle D^2\varphi D\varphi, D\varphi \rangle\right)(x_0) - 1 \le (\ge) 0 \end{aligned}$$

成立，则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_p u = 1$ 的粘性下(上)解。

若 u 在 Ω 中既是方程 $-\Delta_p u = 1$ 的粘性下解又是粘性上解，则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_p u = 1$ 的粘性解。

接下来给出两个方程解的唯一性结论。

引理 1 [6]：假设 $\Omega \subset R^n$ 为一有界开区域， $u, v \in C(\bar{\Omega})$ 是无穷 Laplace 方程

$$-\Delta_\infty w = f(x)$$

的解， $f \in C(\Omega)$ 且满足 $\inf_\Omega(f) > 0$ 或 $\sup_\Omega(f) < 0$。如果

$$u = v, x \in \partial\Omega,$$

那么 $u = v, x \in \partial\Omega$。

引理 2 [2]：假设 $\Omega \subset R^n$ 为一有界开区域， $u, v \in C(\bar{\Omega})$ 是 p-Laplace 方程

$$-\Delta_p \omega = f(x)$$

的解，$f > 0$ 为 Ω 上二阶连续可微的凸函数。如果

$$u = v, x \in \partial\Omega,$$

那么 $u = v, x \in \partial\Omega$。

下面给出距离函数的相关概念。

定义 3：u 为 web 函数当且仅当 u 只依赖于点 x 到 $\partial\Omega$ 的距离

$$M(\Omega) := \left\{ y \in \Omega \mid d(y, \partial\Omega) := \max_{x \in \Omega} d(x, \partial\Omega) \right\}$$

也就是 $u(x) = w(d(x))$。

定义 4 [16]：

$$G(\Omega) = \left\{ x \in \Omega \mid 若 y, z \in \partial\Omega 满足 d(x, \partial\Omega) = d(x, y) = d(x, z), 则 y = z \right\},$$

令 $R(\Omega) := \Omega \setminus G(\Omega)$。

当 Ω 为一个矩形时，$R(\Omega)$ 和 $M(\Omega)$ 如下图 1 所示。

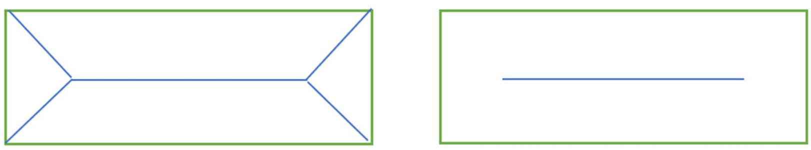

Figure 1. $R(\Omega)$ (left picture) and $M(\Omega)$ (right picture)
图 1. $R(\Omega)$ (左图)和 $M(\Omega)$ (右图)

定义 5 [16]：如果 $M(\Omega) = R(\Omega)$，那么称 $\Omega \subset R^n$ 为 stadium-like 区域。

例：图 2 为两类常见的 stadium-like 区域

Figure 2. Stadium-like domains
图 2. Stadium-like 区域

后文将用到关于距离函数的如下结论。

引理 3 [17]：Ω 为一有界 C^2 开集，则 $d(x, \partial\Omega) \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \bar{R}(\Omega))$。

引理 4 [16]：令 $\Omega \subset R^n$ 是一个有界非空 stadium-like 区域，即 $M(\Omega) = R(\Omega)$。则

(1) Ω 为一球、同心球环或者一维 $C^{1,1}$ 流形的平行邻域；

(2) 如果 Ω 为一凸区域，则 Ω 必为球。

3. 定理的证明

在证明定理 1 之前，先陈述一个事实。

对于[1]中的超定边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = c & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Serrin 证明了 Ω 为一半径为 R 的球，方程解为

$$u(|x|) = \frac{1}{2n}\left(R^2 - r^2\right),$$

r 为点到球心的距离，此时 $c = -\frac{1}{n}R$。由此可知球半径 R 与法方向 c 可相互确定。

本文我们将证明 $\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$ 为边界为 C^2 的同心球环，其中 $\Omega_1 := B_{R_1}(O)$，$\Omega_2 := B_{R_2}(O)$。超定边值问题(1.1)~(1.3)的解为

$$u(x) = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - r^{\frac{4}{3}}\right),$$

r 为点到球心的距离。相应的超定边值条件(1.2)，(1.3)将分别为

$$u = c = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - (R_1)^{\frac{4}{3}}\right), \quad -\frac{\partial u}{\partial \eta_1} = a_1 = 3^{\frac{1}{3}}(R_1)^{\frac{1}{3}},$$

$$u = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial \eta_2} = a_2 = 3^{\frac{1}{3}}(R_2)^{\frac{1}{3}},$$

由此可知，c, a_1, a_2 可由半径 R_2, R_1 确定。事实上，只要知道这五个参数中的任意两个，其他三个则可由此确定。

下面从充分性和必要性两方面来证明定理。为了更好理解证明，对无穷 Laplace 方程作一变形。已知函数 u 在方向 ν 的二阶导为 $\langle D^2 u\nu, \nu\rangle$，如果 ν 表示 u 的最速下降方向 $-Du/|Du|$，那么方程 $-\Delta_\infty u = 1$ 可以转化为

$$-u_{\nu\nu}|u_\nu|^2 = 1$$

1) 充分性：构造函数

$$u(x) = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - (R_2 - d(x))^{\frac{4}{3}}\right),$$

其在 Ω 内几乎处处可微。由引理 3，$u(x) \in C^2\left(\Omega \setminus \overline{R(\Omega)}\right)$。如果 $M(\Omega) = R(\Omega)$，那么由引理 4 可知Ω为一同心球环，Ω_2 为半径为 R_2 的球，Ω_1 的半径为 R_1。可以验证在 $\Omega \setminus \overline{R(\Omega)}$ 区域内，函数

$$u(x) = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - (R_2 - d(x))^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - |x|^{\frac{4}{3}}\right)$$

为超定边值问题(1.1)~(1.3)的古典解；在 $M(\Omega) = R(\Omega)$ 区域内，函数 $u(x)$ 为超定边值问题(1.1)-(1.3)的粘性解。计算可知，此时

$$c = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}\left((R_2)^{\frac{4}{3}} - (R_1)^{\frac{4}{3}}\right), a_1 = 3^{\frac{1}{3}}(R_1)^{\frac{1}{3}}, a_2 = 3^{\frac{1}{3}}(R_2)^{\frac{1}{3}}.$$

最后粘性解的唯一性由引理 1 可以得到。充分性得证。

2) 必要性：由定义可知 $M(\Omega)\subseteq R(\Omega)$。假设 $M(\Omega)\subsetneq R(\Omega)$，则存在点 $z\in R(\Omega)\setminus M(\Omega)$，下面证明在 z 点函数 u 不满足粘性解的定义，即可以找到一个检验函数 $\varphi\in C^2(\Omega)$ 不满足粘性解定义。

假设 $M(\Omega)\subsetneq R(\Omega)$，$z$ 位于 $R(\Omega)\setminus M(\Omega)$ 的一直线上，$d(x,\partial\Omega_2)$ 在点 z 垂直于 $R(\Omega)$ 的 η 方向上的方向导数与在 $-\eta$ 上的方向导数相反。我们可以构造函数

$$\varphi=-\left(|x|-u(z)\right)^K+\varepsilon\left(|x|-u(z)\right)\in C^2(\Omega),$$

在点 z 从上方接近 u 使得 $\nabla_\eta\varphi(z)\neq 0$ 且 $\varphi_{\eta\eta}(z)<-K$，K 为一个任意大的数。因此 $-\Delta_\infty\varphi(z)>1$，这与粘性下解定义相矛盾，类似可证粘性上解的情况。因此证得 $M(\Omega)=R(\Omega)$。由引理 3 知，Ω 为一个同心球环。必要性得证。

下面类似证明推论 2。

1) 充分性：如果 $M(\Omega)=R(\Omega)$，那么 Ω 为一同心球环，Ω_2 为半径为 R_2 的球，Ω_1 的半径为 R_1。构造函数

$$u(x)=n^{-\frac{p}{p-1}}\frac{p-1}{p}\left((R_2)^{\frac{p}{p-1}}-\left(R_2-d(x)\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)\in C^2(\bar{\Omega}),$$

该函数在 Ω 内几乎处处可微。由引理 3，$u(x)\in C^2\left(\bar{\Omega}\setminus\overline{R(\Omega)}\right)$ 并且在此区域内为超定边值问题(2.1) ~ (2.3)的古典解。在 $M(\Omega)=R(\Omega)$ 内，$u(x)$ 为超定边值问题(1.4)~(1.6)的粘性解。此时可得到

$$c=u=n^{-\frac{p}{p-1}}\frac{p-1}{p}\left((R_2)^{\frac{p}{p-1}}-(R_1)^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$a_1=n^{-\frac{p}{p-1}}\left((R_2)^{\frac{1}{p-1}}-(R_1)^{\frac{p}{p-1}}\right),\ a_1=n^{-\frac{p}{p-1}}\left((R_2)^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

由引理 4，粘性解唯一。充分性得证。

2) 必要性：$M(\Omega)\subseteq R(\Omega)$ 可由定义得到。假设 $M(\Omega)\subsetneq R(\Omega)$，存在点 $z\in R(\Omega)\setminus M(\Omega)$，下面证明在这一点 u 不满足粘性解的定义，即可以找到一个检验函数 $\varphi\in C^2(\Omega)$ 不满足粘性解定义。

假设 $M(\Omega)\subsetneq R(\Omega)$，$z$ 位于 $R(\Omega)\setminus M(\Omega)$ 的一直线上，$d(x,\partial\Omega)$ 在点 z 垂直于 $R(\Omega)$ 的 η 方向的方向导数与 $-\eta$ 上相反，我们可以找到一个函数

$$\varphi=-\left(|x|-u(z)\right)^K+\varepsilon\left(|x|-u(z)\right)\in C^2(\Omega)$$

在点 z 从上接近 u 使得 $\nabla_\eta\varphi(z)\neq 0$ 且 $\varphi_{\eta\eta}(z)<-K$，K 为一个任意大的数。因此

$$\begin{aligned}&F\left(D\varphi,D^2\varphi\right)(z)\\&=\left(-|D\varphi|^{P-2}trace\left(D^2\varphi\right)-(p-2)|D\varphi|^{P-4}\left\langle D^2\varphi D\varphi,D\varphi\right\rangle\right)(x_0)-1\\&=\left(-|D\varphi|^{P-2}trace\left(D^2\varphi\right)-(p-2)|D\varphi|^{P-4}\varphi_{\eta\eta}\left|\varphi_\eta\right|^2\right)(x_0)-1>0,\end{aligned}$$

这与粘性下解相矛盾，类似可证粘性上解，从而 $M(\Omega)=R(\Omega)$。由引理 4 知，Ω 为一个同心球环。必要性得证。

当 $p=2$ 且 Ω_1 为一个点时即为著名的 Laplace 方程在有界区域上的超定边值问题，可验证 Serrin 的结论：假设 Ω 是一个边界为 C^2 的有界凸区域。那么

$$u=\left(R^2-\left(R-d(x)\right)^2\right)\Big/2n\in C^2(\bar{\Omega})$$

满足下面超定边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial v} = c & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $c = -\dfrac{R}{n}$，R 为点到边界的最大距离，那么 Ω 为一半径为 R 的球，此时

$$u = \left(R^2 - \left(R - d\left(x\right)\right)^2\right) \Big/ 2n = \left(R^2 - |x|^2\right) \Big/ 2n.$$

4. 结语

文献[13]研究了了无穷 Laplace 方程在有界区域上的超定边值问题，本文则进一步研究了环形区域，得到了特殊形式的解和区域的对称性。本文的难点在于此退化椭圆方程无极值原理，所以无法利用移动平面来解决这一问题。因而利用构造与距离函数有关的特解证明区域的对称性，这是一种切实可行的方法。而且此方法可运用到解决 Laplace 方程、p-Laplace 方程以及其他特殊方程的超定边值问题。

基金项目

南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2019044)。

参考文献

[1] Serrin, J. (1971) A Symmetry Problem in Potential Theory. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **43**, 304-318. https://doi.org/10.1007/BF00250468

[2] Garofalo, N. and Lewis, J.L. (1989) A Symmetry Result Related to Some Overdetermined Boundary Value Problems. *American Journal of Mathematics*, **111**, 9-33. https://doi.org/10.2307/2374477

[3] Fall, M. and Jarohs, S. (2015) Overdetermined Problems with Fractional Laplacian. *ESAIM*: *Control, Optimization and Calculus of Variations*, **21**, 924-938. https://doi.org/10.1051/cocv/2014048

[4] 王为民，洪莉. 半空间上一类半线性椭圆方程的正解[J]. 工程数学学报, 2004, 21(6): 984-1002.

[5] 晁定波，边少峰. 超定边值问题的差分法[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1991, 11(1): 4-12.

[6] Aronsson, G. (1967) Extension of Functions Satisfying Lipschitz Conditions. *Arkiv Fr Matematik*, **6**, 551-561. https://doi.org/10.1007/BF02591928

[7] Jensen, R. (1993) Uniqueness of Lipschitz Extensions: Minimizing the Sup Norm of the Gradient. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **123**, 51-74. https://doi.org/10.1007/BF00386368

[8] Lu, G.Z. and Wang, P.Y. (2008) Inhomogeneous Infinity Laplace Equation. *Advances in Mathematics*, **217**, 1838-1868. https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.11.020

[9] Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S. and Wilson, D. (2009) Tug-of-War and the Infinity Laplacian. *Journal of the American Mathematical Society*, **22**, 167-210. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-08-00606-1

[10] Evans, L.C. and Savin, O. (2008) $C^{1,\alpha}$ Regularity for Infinity Harmonic Functions in Two Dimensions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **32**, 325-347. https://doi.org/10.1007/s00526-007-0143-4

[11] Evans, L.C. and Smart, C.K. (2011) Adjoint Methods for the Infinity Laplacian PDE. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **201**, 87-113. https://doi.org/10.1007/s00205-011-0399-x

[12] Evans, L.C. and Smart, C.K. (2011) Everywhere Differentiability of Infinity Harmonic Functions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **42**, 289-299. https://doi.org/10.1007/s00526-010-0388-1

[13] Buttazzo, G. and Kawohl, B. (2011) Overdetermined Boundary Value Problems for the ∞-Laplacian. *International Mathematics Research Notices*, **76**, 237-247. https://doi.org/10.1093/imrn/rnq071

[14] Crasta, G. and Fragala, I. (2015) A Symmetry Problem for the Infinity Laplacian. *International Mathematics Research Notices*, **2015**, 8411-8436. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu204

[15] Crandall, M.G., Ishii, H. and Lions, P.L. (1992) User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **27**, 1-67. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00266-5

[16] Crasta, G. and Fragalà, I. (2016) On the Characterization of Some Classes of Proximally Smooth Sets. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation and Calculus of Variations*, **22**, 710-727. https://doi.org/10.1051/cocv/2015022

[17] Crasta, G. and Malusa, A. (2007) The Distance Function from the Boundary in a Minkowski Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 5725-5759. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04260-2