Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 208-218
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112029

双极不可压缩纳维–斯托克–傅里叶–泊松方程的整体解和衰减

胡 倩

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 1249417720@qq.com

收稿日期：2021年1月2日；录用日期：2021年2月2日；发布日期：2021年2月9日

摘 要

本文采用高阶能量方法和连续性方法，证明双极不可压缩纳维–斯托克–傅里叶–泊松方程整体解的存在性和指数衰减性。

关键词

纳维–斯托克–傅里叶–泊松方程，整体解，指数衰减

Global Solution and Decay of the Two-Fluid Incompressible Navier-Stokes-Fourier-Poisson System

Qian Hu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 1249417720@qq.com

Received: Jan. 2nd, 2021; accepted: Feb. 2nd, 2021; published: Feb. 9th, 2021

Abstract

In this paper, by using the higher order energy method and the continuity method, we prove the global existence and the exponential decay of solutions to the two-fluid incompressible Navier-Stokes-Fourier-Poisson system.

文章引用: 胡倩. 双极不可压缩纳维–斯托克–傅里叶–泊松方程的整体解和衰减[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 208-218.
DOI: 10.12677/pm.2021.112029

Keywords

Navier-Stokes-Fourier-Poisson System, Global Solutions, Exponential Decay

1. 引言

本文考虑如下双极不可压缩纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组

$$\partial_t u + u\cdot\nabla_x u - \mu\Delta_x u = -\nabla_x p + \frac{1}{2}n\nabla_x\phi, \nabla\cdot u = 0\text{，} \tag{1}$$

$$\partial_t \theta + u\cdot\nabla_x\theta - \kappa\Delta_x\theta = 0\text{，} \tag{2}$$

$$\partial_t n + u\cdot\nabla_x n - \frac{\sigma}{2}\Delta_x n + \sigma n = 0\text{，} \tag{3}$$

$$\Delta_x\phi = n\text{，} \tag{4}$$

以及初值条件：

$$u|_{t=0} = u^{in}, \theta|_{t=0} = \theta^{in}, n|_{t=0} = n^{in}\text{。} \tag{5}$$

其中未知函数$u(x,t)$代表流体速度，$n(x,t)$代表电荷，$\theta(x,t)$代表温度，p 代表压力，正常数μ,σ,κ分别代表流体粘度系数、电阻率和热传导系数。其中方程(1)是速度方程以及不可压缩条件，方程(2)是温度方程，方程(3)是电荷守恒方程，方程(4)是电场泊松方程。

对单流体的纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程的研究有很多，其中 Ju，Li 和 Wang 在[1]中研究了单极纳维－斯托克－泊松方程在全空间和环面上的拟中性极限，证明了纳维－斯托克－泊松方程的全局弱解强收敛于不可压缩纳维－斯托克方程的强解。Ju 和 Li 在[2]中证明纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组的弱解收敛于不可压缩的纳维－斯托克方程组的强解。Donatelli 和 Pierangelo 在[3]中尝试考虑热效应的纳维－斯托克－泊松系统的准中性极限，而 Li，Ju 和 Xu 在[4]中证明了纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程的拟中性极限。此外，Bernard 和 Matteo 在[5]证明了三维域的弱解在时间区间上收敛于二维的纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程的强解。但对于双流体的纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程，目前的研究还很少。Jiang 和 Luo 在[6]中从微观方程导出宏观方程，证明了弗拉索夫－麦克斯韦－波尔兹曼方程的经典解收敛于双流体不可压缩纳维－斯托克－麦克斯韦方程的经典解。而本文拟采用高阶能量方法和连续性方法，证明双流体不可压缩纳维－斯托克－麦克斯韦方程组(1)~(5)的整体适定性和指数衰减性。

定义能量

$$E(t) \triangleq 2\|u\|_{H^s}^2 + 2\|\theta\|_{H^s}^2 + \frac{5}{2}\|n\|_{H^s}^2 + 3\|\nabla\phi\|_{H^s}^2\text{，}$$

本文的主要结果如下：

定理 1. 设$(u^{in}, n^{in}, \theta^{in}) \in H^s\times H^{s+1}\times H^{s+1} (s\ge 2)$，且存在小常数$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(s,\mu,\sigma,\kappa)$使得$E^{in}\le\varepsilon_0$，则双极不可压缩纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组(1)~(5)存在唯一的全局解(u,n,θ)满足

$$u,n,\theta \in L^\infty\left(R^+; H^s\left(T^3\right)\right)\cap L^2\left(R^+; H^{s+1}\left(T^3\right)\right)\text{，}$$

并满足能量不等式

$$\sup_{t\geq 0}\left(\|u\|_{H^s(T^3)}^2+\|\theta\|_{H^s(T^3)}^2+\|n\|_{H^s(T^3)}^2+\|\nabla_x\phi\|_{H^s(T^3)}^2\right)+\int_0^\infty\left(\mu\|\nabla_x u\|_{H^s(T^3)}^2+\kappa\|\nabla_x\theta\|_{H^s(T^3)}^2\right)\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\infty\left(\frac{3\sigma}{8}\|\nabla_x n\|_{H^s(T^3)}^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla_x\phi\|_{H^s(T^3)}^2+\sigma\|n\|_{H^s(T^3)}^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{k=0}^{s}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2(T^3)}^2\right)\mathrm{d}t\leq CE^{in}$$

和指数衰减

$$E(t)\leq \mathrm{e}^{-C_1 t}E(0),$$

其中 $C=C(\mu,\sigma,\kappa)>0$ 和 $C_1>0$ 均为正常数。

2. 先验估计

首先引进一些基本记号：

对每个 $i=1,2,\cdots,n$，把偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 简记为 ∂_i，即 $\partial_i u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n$。记 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$\partial^\alpha u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$\nabla_x u=\nabla u=\partial u=(\partial_1 u,\partial_2 u,\cdots,\partial_n u),\nabla_x^k u=\nabla^k u=\partial^k u.$$

我们定义下列范数及内积

$$\|u\|_p\triangleq\|u\|_{L^p(R^+\times T^3)}=\left(\int_{R^+\times T^3}|u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\forall u\in L^p(R^+\times T^3),$$

$$\|u\|_\infty\triangleq\|u\|_{L^\infty(R^+\times T^3)}=\operatorname*{ess.sup}_{R^+\times T^3}|u|=\inf_{\substack{E\subseteq R^+\times T^3\\ measE=0}}\ \sup_{x\in R^+\times T^3\setminus E}|u(x)|,\forall u\in L^\infty(R^+\times T^3),$$

$$\|u\|_{H^s}\triangleq\|u\|_{W^{s,2}(R^+\times T^3)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq s}\|\partial^\alpha u\|_{L^s(R^+\times T^3)}^2\right)^{\frac{1}{2}},\forall u\in H^s(R^+\times T^3),$$

$$\|\nabla_x u\|_{L^p(R^+\times T^3)}=\left\|\nabla_x u\right\|_{L^p(R^+\times T^3)},$$

$$(u,v)\triangleq\int_{R^+\times T^3}u(x,t)v(x,t)\mathrm{d}x,$$

$$H^s\triangleq H^s(T^3)。$$

定义下列能量函数

$$D(t)\triangleq\mu\|\nabla u\|_{H^s}^2+\kappa\|\nabla\theta\|_{H^s}^2+\frac{3\sigma}{8}\|\nabla n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_{H^s}^2+\sigma\|n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{k=0}^{s}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2}^2,$$

引理 2.1. **(先验估计)** 假设 (u,n,θ) 是双极不可压缩纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组(1)~(5)的一个光滑解，那么下列能量不等式成立

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+D(t)\leq CD(t)E^{\frac{1}{2}}(t),$$

其中常数 $C=C(s,\mu,\kappa,\sigma)>0$。

证明：接下来将采用高阶能量方法进行先验估计，Jiang 在[7]中也进行了类似的能量估计。首先将方程(1)的每一项与 u 做 L^2 内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+\mu\|\nabla u\|_2^2-\frac{1}{2}(n\nabla\phi,u)=0. \tag{3.1}$$

同理将方程(2)和(3)的每一项分别与 θ,n 做 L^2 内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta\|_2^2+\kappa\|\nabla\theta\|_2^2=0. \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_2^2+\frac{\sigma}{8}(\nabla n,\nabla n)+\frac{\sigma}{4}(n,n)=0, \tag{3.3}$$

结合方程(4)，等式(3.3)可化简为

$$\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_2^2-\frac{\sigma}{4}\left(\nabla n,\nabla\phi-\frac{1}{2}\nabla n\right)=0. \tag{3.4}$$

由方程(4)可知

$$\left(\partial_t n-\Delta(\partial_t\phi),\phi\right)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi\|_2^2+\frac{1}{2}(\partial_t n,\phi)=0. \tag{3.5}$$

又因为

$$\frac{1}{2}(\partial_t n,\phi)-\frac{1}{2}(n\nabla\phi,u)=\frac{1}{2}\left(-u\cdot\nabla n+\frac{\sigma}{2}\Delta n-\sigma n,\phi\right)-\frac{1}{2}(n\nabla\phi,u)=\frac{\sigma}{2}\left(\nabla\phi,\nabla\phi-\frac{1}{2}\nabla n\right) \tag{3.6}$$

将(3.1)、(3.2)、(3.4)和(3.5)相加，结合(3.6)可得到

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\|u\|_2^2+2\|\theta\|_2^2+\frac{1}{2}\|n\|_2^2+\|\nabla\phi\|_2^2\right)+\mu\|\nabla u\|_2^2+\kappa\|\nabla\theta\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla\phi-\frac{1}{2}\nabla n\right\|_2^2=0. \tag{3.7}$$

接下来，我们将做高阶能量估计。对于 $1\le k\le s$，我们对方程(1)做高阶求导 ∇^k 后，与 $\nabla^k u$ 做 L^2 内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^k u\|_2^2+\mu\|\nabla^{k+1}u\|_2^2=\frac{1}{2}\left(\nabla^k(n\nabla\phi),\nabla^k u\right)-\left(\nabla^k(u\nabla u),\nabla^k u\right). \tag{3.8}$$

同理，对方程(2)和(3)做高阶求导 ∇^k 后，分别与 $\nabla^k\theta,\nabla^k n$ 做 L^2 内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^k\theta\|_2^2+\kappa\|\nabla^{k+1}\theta\|_2^2=-\left(\nabla^k(u\nabla\theta),\nabla^k\theta\right). \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^k n\|_2^2-\frac{\sigma}{4}\left(\nabla^{k+1}n,\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right)=-\frac{1}{4}\left(\nabla^k(u\nabla n),\nabla^k n\right). \tag{3.10}$$

由方程(4)可以得到

$$\frac{1}{2}\left(\nabla^k(\partial_t n)-\nabla^k\left(\Delta(\partial_t\phi)\right),\nabla^k\phi\right)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{k+1}\phi\|+\frac{1}{2}\left(\nabla^k(\partial_t n),\nabla^k\phi\right)=0,$$

利用方程(3)有

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{k+1}\phi\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left(\nabla^{k+1}\phi,\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla^k(u\cdot\nabla n),\nabla^k\phi\right). \tag{3.11}$$

将(3.8)、(3.9)、(3.10)和(3.11)式相加得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\left\|\nabla^k u\right\|_2^2+2\left\|\nabla^k\theta\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^k n\right\|_2^2+\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2\right)+\mu\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_2^2+\kappa\left\|\nabla^{k+1}\theta\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_2^2\\&=\frac{1}{2}\left(\nabla^k\left(n\nabla\phi\right),\nabla^k u\right)-\left(\nabla^k\left(u\nabla\theta\right),\nabla^k\theta\right)-\left(\nabla^k\left(u\nabla u\right),\nabla^k u\right)\\&\quad-\frac{1}{4}\left(\nabla^k\left(u\nabla n\right),\nabla^k n\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla^k\left(u\cdot\nabla n\right),\nabla^k\phi\right)\\&\triangleq A_1+A_2+A_3+A_4+A_5\end{aligned}. \tag{3.12}$$

现在依次估计每一项 $A_i\left(1\le i\le 5\right)$，对于 A_1 有

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{2}\left(\nabla^k\left(n\nabla_x\phi\right),\nabla^k u\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a+b=k\\a\ge1,b\ge1}}\left(\nabla^a n\nabla^{b+1}\phi,\nabla^k u\right)+\frac{1}{2}\left(n\nabla^k\left(\nabla\phi\right),\nabla^k u\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla^k n\nabla\phi,\nabla^k u\right),\\&\triangleq A_{11}+A_{12}+A_{13}\end{aligned}$$

利用 Holder 不等式、Sobolev 嵌入定理 $H^1\left(T^3\right)\to L^4\left(T^3\right)$ 及 Sobolev 不等式有

$$A_{11}\le C\sum\left\|\nabla^a n\right\|_{L^4}\left\|\nabla^{b+1}\phi\right\|_{L^4}\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}\le C\sum\left\|\nabla^a n\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{b+1}\phi\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^k}\le C\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s}\left\|u\right\|_{H^s}$$

$$A_{12}\le C\left\|n\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^k\left(\nabla\phi\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}\le C\left\|n\right\|_{H^2}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^k}\left\|u\right\|_{H^k}\le C\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s}\left\|u\right\|_{H^s}$$

$$A_{13}\le C\left\|\nabla^k n\right\|_{L^2}\left\|\nabla\phi\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}\le C\left\|n\right\|_{H^k}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^2}\left\|u\right\|_{H^k}\le C\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s}\left\|u\right\|_{H^s}$$

故

$$A_1\le C\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s}\left\|u\right\|_{H^s}. \tag{3.13}$$

接下来，对 A_2 进行能量估计

$$\begin{aligned}A_2&=-\sum_{\substack{a+b=k\\a\ge1}}\left(\nabla^a u\nabla^{b+1}u,\nabla^k u\right)-\left(u\nabla^{k+1}u,\nabla^k u\right)\le C\sum\left\|\nabla^a u\right\|_{L^4}\left\|\nabla^{b+1}u\right\|_{L^4}\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}\\&\le C\sum\left\|\nabla^a u\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{b+1}u\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^k}\le C\left\|\nabla u\right\|_{H^s}\left\|\nabla u\right\|_{H^s}\left\|u\right\|_{H^s}\end{aligned}, \tag{3.14}$$

同理，我们可以得到

$$A_3\le C\left\|\nabla u\right\|_{H^s}\left\|\nabla\theta\right\|_{H^s}\left\|\theta\right\|_{H^s}, \tag{3.15}$$

$$A_4\le C\left\|\nabla u\right\|_{H^s}\left\|\nabla n\right\|_{H^s}\left\|n\right\|_{H^s}. \tag{3.16}$$

对于 A_5 有

$$A_5=-\frac{1}{2}\left(\nabla^{k-1}\left(u\cdot\nabla n\right),\nabla^{k+1}\phi\right)=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{a+b=k-1\\a\ge1}}\left(\nabla^a u\nabla^{b+1}n,\nabla^{k+1}\phi\right)-\frac{1}{2}\left(u\nabla^k n,\nabla^{k+1}\phi\right)\triangleq A_{51}+A_{52},$$

$$A_{51}\le C\sum\left\|\nabla^a u\right\|_{L^4}\left\|\nabla^{b+1}n\right\|_{L^4}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_{L^2}\le C\sum\left\|\nabla^a u\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{b+1}n\right\|_{H^1}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^k}\le C\left\|u\right\|_{H^s}\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s},$$

$$A_{52}\le C\left\|u\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^k n\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_{L^2}\le C\left\|u\right\|_{H^2}\left\|n\right\|_{H^k}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^k}\le C\left\|u\right\|_{H^s}\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s},$$

故

$$A_5\le C\left\|u\right\|_{H^s}\left\|n\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi\right\|_{H^s}. \tag{3.17}$$

最后，将不等式(3.13)、(3.14)、(3.15)、(3.16)和(3.17)合并到(3.12)等式得到

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\left\|\nabla^k u\right\|_2^2+2\left\|\nabla^k\theta\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^k n\right\|_2^2+\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2\right)+\mu\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_2^2+\kappa\left\|\nabla^{k+1}\theta\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_2^2.$$
$$\leq C\left(\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}\|\nabla u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla\theta\|_{H^s}\|\theta\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla n\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\right)$$

对于上述$1\leq k\leq s$的所有不等式相加，并结合(3.7)式有

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\|u\|_{H^s}^2+2\|\theta\|_{H^s}^2+\frac{1}{2}\|n\|_{H^s}^2+\|\nabla\phi\|_{H^s}^2\right)+\mu\|\nabla u\|_{H^s}^2+\kappa\|\nabla\theta\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{k=0}^{s}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.18}$$
$$\leq C\left(\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla\theta\|_{H^s}\|\theta\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla n\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\right)$$

将方程(3)与n做L^2内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla n\|_2^2+\sigma\|n\|_2^2=0. \tag{3.19}$$

对于$1\leq k\leq s$，我们对方程(3)高阶求导∇^k后，与$\nabla^k n$做L^2内积且利用(3.16)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^k n\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{k+1}n\right\|_2^2+\sigma\left\|\nabla^k n\right\|_2^2=-\left(\nabla^k\left(u\cdot\nabla n\right),\nabla^k n\right)\leq C\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla n\|_{H^s}\|n\|_{H^s}. \tag{3.20}$$

对于$1\leq k\leq s$的所有不等式(3.20)相加，并结合(3.19)式可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla n\|_{H^s}^2+\sigma\|n\|_{H^s}^2\leq C\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla n\|_{H^s}\|n\|_{H^s}. \tag{3.21}$$

由方程(3)和(4)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi\|_2^2-\frac{\sigma}{2}(\nabla n,\nabla\phi)+\sigma\|\nabla\phi\|_2^2=-(u\cdot\nabla\phi,n),$$

利用 Sobolev 嵌入定理$H^1\left(T^3\right)\to L^p\left(T^3\right)(p=3,6)$以及 Holder 不等式有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi\|_2^2-\frac{\sigma}{2}(\nabla n,\nabla\phi)+\sigma\|\nabla\phi\|_2^2\leq C\|\nabla u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}, \tag{3.22}$$

利用 Young 不等式有

$$\frac{\sigma}{2}(\nabla n,\nabla\phi)\leq\frac{\sigma}{8}\|\nabla n\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_2^2,$$

将上述 Young 不等式代入不等式(3.22)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi\|_2^2-\frac{\sigma}{8}\|\nabla n\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_2^2\leq C\|\nabla u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}. \tag{3.23}$$

对于$1\leq k\leq s$，对于方程(4)，求∂_t后做高阶求导∇^k，再与$\nabla^k\phi$做L^2内积，利用方程(3)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2-\frac{\sigma}{2}\left(\nabla^{k+1}n,\nabla^{k+1}\phi\right)+\sigma\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2=\left(\nabla^k\left(u\cdot\nabla n\right),\nabla^k\phi\right), \tag{3.24}$$

利用 Young 不等式有

$$\frac{\sigma}{2}\left(\nabla^{k+1}n,\nabla^{k+1}\phi\right)\leq\frac{\sigma}{8}\left\|\nabla^{k+1}n\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2,$$

结合A_5有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2-\frac{\sigma}{8}\left\|\nabla^{k+1}n\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{k+1}\phi\right\|_2^2=\left(\nabla^k\left(u\cdot\nabla n\right),\nabla^k\phi\right)\leq C\|u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}. \tag{3.25}$$

对于$1 \le k \le s$的所有不等式(3.25)相加，并结合(3.23)式得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi\|_{H^s}^2-\frac{\sigma}{8}\|\nabla n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_{H^s}^2 \le C\left(\|\nabla u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}+\|u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}\right). \tag{3.26}$$

最后，将(3.18)、(3.21)和(3.26)三个不等式相加得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\|u\|_{H^s}^2+2\|\theta\|_{H^s}^2+\frac{5}{2}\|n\|_{H^s}^2+3\|\nabla\phi\|_{H^s}^2\right)+\mu\|\nabla u\|_{H^s}^2+\kappa\|\nabla\theta\|_{H^s}^2\\&+\frac{3\sigma}{8}\|\nabla n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_{H^s}^2+\sigma\|n\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{k=0}^{s}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_2^2\\&\le C\left(\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla\theta\|_{H^s}\|\theta\|_{H^s}\right.\\&\left.+\|\nabla u\|_{H^s}\|\nabla n\|_{H^s}\|n\|_{H^s}+\|\nabla u\|_{H^s}\|n\|_{H^s}\|\nabla\phi\|_{H^s}\right)\end{aligned}. \tag{3.27}$$

根据能量函数$E(t),G(t)$的定义，以及 Young 不等式有

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+D(t)\le CD(t)E^{\frac{1}{2}}(t), \tag{3.28}$$

引理 3.3 得证。

3. 全局存在性及衰减

本节我们给出局部存在性和整体存在性的证明。

定理 3.1. (局部存在性) 设$u^{in},n^{in},\theta^{in}\in H^s\left(T^3\right)$，那么存在常数$\tau>0$，使得双极不可压缩纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组(1)~(5)在$[0,\tau]$上存在唯一解(u,n,θ)满足

$$u,n,\theta\in L^\infty\left(0,T;H^s\left(T^3\right)\right).$$

证明：考虑下面的迭代方程组

$$\begin{cases}\partial_t u^{k+1}+u^k\cdot\nabla u^{k+1}-\mu\Delta u^{k+1}=-\nabla p^{k+1}+\frac{1}{2}n^k\nabla\phi^k,\nabla\cdot u^{k+1}=0\\ \partial_t\theta^{k+1}+u^k\cdot\nabla\theta^{k+1}-\kappa\Delta\theta^{k+1}=0\\ \partial_t n^{k+1}+u^k\cdot\nabla n^{k+1}-\frac{\sigma}{2}\Delta n^{k+1}+\sigma n^{k+1}=0\\ \Delta\phi^{k+1}=n^{k+1}\end{cases} \tag{*}$$

其中

$$u^0(t,x)\equiv u^{in}(x),\theta^0(t,x)\equiv\theta^{in}(x),n^0(t,x)\equiv n^{in}(x).$$

对于任意固定的$\tau>0$，由线性椭圆方程和抛物方程的解的存在性理论可知，当$k=0$时，迭代方程组存在一个唯一解$u,\theta,n\in C\left([0,\tau];H^s\left(T^3\right)\right)$。

定义

$$E^k(t)\triangleq\left\|u^k\right\|_{H^s}^2+\left\|\theta^k\right\|_{H^s}^2+\left\|n^k\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^k\right\|_{H^s}^2,$$

对于足够小的$M>0$，假设

$$E^0(t)=\left\|u^{in}\right\|_{H^s}^2+\left\|\theta^{in}\right\|_{H^s}^2+\left\|n^{in}\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^{in}\right\|_{H^s}^2\le\frac{M}{2}。$$

我们断言对于足够小的 $M>0$，存在 $T(M)>0$ 使得

若

$$\sup_{0\le t\le\tau} E^k(t)\le M\text{，}$$

则

$$\sup_{0\le t\le\tau} E^{k+1}(t)\le M\text{。}$$

事实上，我们对迭代方程组(*)做高阶求导 ∇^m 后，分别与 $\nabla^m u,\nabla^m\theta,\nabla^m n$ 做 L^2 内积有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^m u^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^m\theta^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^m n^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^{m+1}\phi^{k+1}\right\|_2^2\right)+\mu\left\|\nabla^{m+1}u^{k+1}\right\|_2^2\\&+\kappa\left\|\nabla^{m+1}\theta^{k+1}\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{m+1}n^{k+1}\right\|_2^2+\frac{3\sigma}{2}\left\|\nabla^m n^{k+1}\right\|_2^2+\sigma\left\|\nabla^{m+1}\phi^{k+1}\right\|_2^2\\&\le\left\|n^k\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi^k\right\|_{H^s}\left\|u^{k+1}\right\|_{H^s}+\left\|u^k\right\|_{H^s}\left\|u^{k+1}\right\|_{H^s}\left\|\nabla u^{k+1}\right\|_{H^s}\\&\quad+\left\|u^k\right\|_{H^s}\left\|n^{k+1}\right\|_{H^s}\left\|\nabla n^{k+1}\right\|_{H^s}+\left\|u^k\right\|_{H^s}\left\|n^{k+1}\right\|_{H^s}\left\|\nabla\phi^{k+1}\right\|_{H^s}\end{aligned}\text{，}$$

利用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^m u^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^m\theta^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^m n^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla^{m+1}\phi^{k+1}\right\|_2^2\right)+\mu\left\|\nabla^{m+1}u^{k+1}\right\|_2^2\\&+\kappa\left\|\nabla^{m+1}\theta^{k+1}\right\|_2^2+\frac{\sigma}{2}\left\|\nabla^{m+1}n^{k+1}\right\|_2^2+\frac{3\sigma}{2}\left\|\nabla^m n^{k+1}\right\|_2^2+\sigma\left\|\nabla^{m+1}\phi^{k+1}\right\|_2^2\\&\le C\left\|u^k\right\|_{H^s}\left(\left\|u^{k+1}\right\|_{H^s}^2+\left\|\theta^{k+1}\right\|_{H^s}^2+\left\|n^{k+1}\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^{k+1}\right\|_{H^s}^2\right)+\left\|u^{k+1}\right\|_{H^s}\left(\left\|n^k\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^k\right\|_{H^s}^2\right)\end{aligned}\text{，}$$

对上式从 $[0,t]$ 上积分，并对 $|m|\le s$ 求和，我们得到

$$\begin{aligned}E^{k+1}(t)&\le E^{k+1}(0)+Ct\sup_{0\le\tau'\le t}\sqrt{E^k(\tau')}\sup_{0\le\tau'\le t}E^{k+1}(\tau')+Ct\sup_{0\le\tau'\le t}E^k(\tau')\sup_{0\le\tau'\le t}\sqrt{E^{k+1}(\tau')}\\&\le E^{k+1}(0)+Ct\sup_{0\le\tau'\le t}\sqrt{E^k(\tau')}\sup_{0\le\tau'\le t}E^{k+1}(\tau')+Ct\sup_{0\le\tau'\le t}\left[E^k(\tau')\right]^2+Ct\sup_{0\le\tau'\le t}E^{k+1}(\tau')\end{aligned}$$

又因为 $\sup_{0\le\tau'\le t}E^k(\tau')\le M$，故有

$$\left(1-CT\sqrt{M}-CT\right)\sup_{0\le\tau'\le t}E^{k+1}(\tau')\le\frac{M}{2}+CTM^2\text{。}$$

因此，如果 M 与 τ 足够小，我们便能得到：若 $\sup_{0\le t\le\tau}E^k(t)\le M$，则 $\sup_{0\le t\le\tau}E^{k+1}(t)\le M$，断言成立。同样的利用能量估计，可以证明

$$\begin{aligned}&\left\|u^{k+1}-u^k\right\|_{H^s}^2+\left\|\theta^{k+1}-\theta^k\right\|_{H^s}^2+\left\|n^{k+1}-n^k\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^{k+1}-\nabla\phi^k\right\|_{H^s}^2\\&\le\frac{1}{2}\left(\left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{H^s}^2+\left\|\theta^k-\theta^{k-1}\right\|_{H^s}^2+\left\|n^k-n^{k-1}\right\|_{H^s}^2+\left\|\nabla\phi^k-\nabla\phi^{k-1}\right\|_{H^s}^2\right)\end{aligned}\text{.}$$

令 $k\to\infty$，有

$$\left(u^k,\theta^k,n^k\right)\to(u,\theta,n)\text{，}$$

可以证明 (u,θ,n) 即为方程组(1)~(5)的局部解，得到局部解的存在性，定理 3.1 得证。

下面用连续性方法证明双极不可压缩纳维－斯托克－傅里叶－泊松方程组解的整体存在性与指数衰减性质，即证明定理 1。

定理 1 的证明：一方面，我们由 $E(t)$ 的定义有

$$E(0)=2\left\|u^{in}\right\|_{H^s}^2+2\|\theta\|_{H^s}^2+\frac{5}{2}\left\|n^{in}\right\|_{H^s}^2+3\left\|(\nabla\phi)^{in}\right\|_{H^s}^2\le 3E^{in},$$

定义 $P(E(t))\triangleq CE^{\frac{1}{2}}(t)$，故不等式(3.41)可以写成

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+D(t)\le D(t)P(E(t)),$$

此处 $P(0)=0$ 且 $P(\cdot)$ 是严格递增的。那么存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(u,\sigma,s)>0$，使得若 $E^{in}<\varepsilon_0$，则

$$P(E(0))\le P\left(3E^{in}\right)\le\frac{1}{4}。$$

现在定义：

$$R\triangleq\sup\left\{\tau\ge 0;\sup_{t\in[0,\tau]}P(E(t))\le\frac{3}{4}\right\}\ge 0。$$

由 $E(t)$ 的连续性可以得到 $R>0$。我们其实可以得到 $R=+\infty$，下面用反证法证明。假设 $R<+\infty$，那么对于所有的 $t\in[0,R]$ 有

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+D(t)\le D(t)P(E(t))\le\frac{3}{4}D(t),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+D(t)\le 0,$$

对上式从 $[0,R]$ 积分有

$$\sup_{t\in[0,R]}E(t)\le E(0),$$

从而有

$$\sup_{t\in[0,R]}P(E(t))\le P(E(0))\le\frac{1}{4}。$$

由 $E(t)$ 的连续性可以知道，存在 $t^*>0$，使得对所有 $t\in\left[0,R+t^*\right]$，$P(E(t))\le\frac{3}{4}$，这与 R 的定义矛盾，故 $R<+\infty$ 的假设不成立，我们得到 $R=+\infty$。

最后，根据能量函数 $E(t)$ 和 $D(t)$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_{t\ge 0}\left(\|u\|_{H^s(T^3)}^2+\|\theta\|_{H^s(T^3)}^2+\|n\|_{H^s(T^3)}^2+\|\nabla\phi\|_{H^s(T^3)}^2\right)+\int_0^\infty\Bigg(\mu\|\nabla u\|_{H^s(T^3)}^2+\kappa\|\nabla\theta\|_{H^s(T^3)}^2+\frac{3\sigma}{8}\|\nabla n\|_{H^s(T^3)}^2\\&+\frac{\sigma}{2}\|\nabla\phi\|_{H^s(T^3)}^2+\sigma\|n\|_{H^s(T^3)}^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{k=0}^{s}\left\|\nabla^{k+1}\phi-\frac{1}{2}\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2(T^3)}^2\Bigg)\mathrm{d}t\le C(\mu,\sigma,\kappa)E^{in}\end{aligned},$$

并且上式对于时间 t 是一致有界的。因此，我们可以将定理 3.2 所构造的方程的解推广到时间区域 $[0,+\infty)$ 内，我们也就完成了整体存在性的证明。

接下来，我们证明能量 $E(t)$ 的指数衰减。

对方程(1)在周期区域 T^3 上积分有

$$\int_{T^3}\left(\partial_t u+u\cdot\nabla u-\mu\Delta u+\nabla p-\frac{1}{2}n\nabla\phi\right)\mathrm{d}x=0\text{,}$$

$$\int_{T^3}\partial_t u\mathrm{d}x+\int_{T^3}u\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_{T^3}\mu\Delta u\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla p\mathrm{d}x-\int_{T^3}\frac{1}{2}n\nabla\phi\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\text{。}$$

现在我们依次估计每一项 $I_i\left(1\le i\le 5\right)$，

$$I_1=\int_{T^3}\partial_t u\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{T^3}u\mathrm{d}x\right)\text{,}$$

因为 $divu=0$，我们可以得到

$$\left(I_2\right)_k=\int_{T^3}\sum_{i=1}^{3}u_i\partial u_k\mathrm{d}x=\int_{T^3}\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_i\left(u_iu_k\right)-\partial_iu_iu_k\right]\mathrm{d}x=\int_{T^3}\left[div\left(u_ku\right)-u_kdivu\right]\mathrm{d}x=0\text{,}$$

$$\left(I_3\right)_k=-\int_{T^3}\mu\Delta u_kdx=-\mu\int_{T^3}div\left(\nabla u_k\right)=0\text{,}$$

$$\left(I_4\right)_k=\int_{T^3}\partial_k p\mathrm{d}x=0\text{,}$$

$$\left(I_5\right)_k=-\frac{1}{2}\int_{T^3}\nabla\phi\partial_k\phi\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{T^3}\left[div\left(\partial_k\phi\nabla\phi\right)-\nabla\phi\cdot\nabla\left(\partial_k\phi\right)\right]\mathrm{d}x=0\text{,}$$

综上所述，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{T^3}u\mathrm{d}x\right)=0\text{。}$$

由于初值满足零平均定理，对 x 积分有

$$\int_{T^3}u\left(t,x\right)\mathrm{d}x=\int_{T^3}u\left(0,x\right)\mathrm{d}x=\int_{T^3}u_0\left(x\right)\mathrm{d}x=0,\forall t>0\text{,}$$

利用 Poincare 不等式有

$$\left\|u\right\|_2=\left\|u-\frac{1}{\left|T^3\right|}\int_{T^3}u\mathrm{d}x\right\|_2\le C\left\|\nabla u\right\|_2\text{,}$$

故

$$\left\|u\right\|_{H^s}^2=\left\|u\right\|_2+\left\|\nabla u\right\|_2+\cdots+\left\|\nabla^s u\right\|_2\le C\left\|\nabla u\right\|_2+\left\|\nabla u\right\|_2+\cdots+\left\|\nabla^s u\right\|_2\le C_2D\left(t\right)\text{。}$$

同理，我们可以得到

$$\left\|\theta\right\|_{H^s}^2=\left\|\theta\right\|_2+\left\|\nabla\theta\right\|_2+\cdots+\left\|\nabla^s\theta\right\|_2\le C\left\|\nabla\theta\right\|_2+\left\|\nabla\theta\right\|_2+\cdots+\left\|\nabla^s\theta\right\|_2\le C_3D\left(t\right)\text{。}$$

故存在 $C_1>0$，使得

$$D\left(t\right)\ge C_1E\left(t\right),\forall t>0\text{。}\tag{3.29}$$

结合(3.28)和(3.29)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\left(t\right)+C_1E\left(t\right)\le 0\text{,}$$

上式对 t 积分得到能量 $E\left(t\right)$ 的指数衰减，即

$$E\left(t\right)\le \mathrm{e}^{-C_1t}E\left(0\right)\text{。}$$

参考文献

[1] Ju, Q., Li, F. and Wang, S. (2008) Convergence of the Navier-Stokes-Poisson System to the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **49**, Article No. 073515. https://doi.org/10.1063/1.2956495

[2] Ju, Q. and Li, Y. (2013) Asymptotic Limits of the Full Navier-Stokes-Fourier-Poisson System. *Journal of Differential Equations*, **254**, 2587-2602. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.12.016

[3] Donatelli, D. and Pierangelo, M. (2014) The Quasi-Neutral Limit for the Navier-Stokes-Fourier-Poisson System. Hyperbolic Conserveation Laws and Related Analysis with Applications. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **49**, 193-206. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39007-4_9

[4] Li, Y., Ju, Q. and Xu, W. (2015) Quasi-Neutral Limit of the Full Navier-Stokes-Fourier-Poisson System. *Journal of Differential Equations*, **258**, 3661-3687. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.01.015

[5] Bernard, D. and Matteo, C. (2018) The Rotating Navier-Stokes-Fourier-Poisson System on Thin Domains. *Asymptotic Analysis*, **109**, 111-141. https://doi.org/10.3233/ASY-181472

[6] Jiang, N. and Luo, Y. (2019) From Vlasov-Maxwell-Boltzmann System to Two-Fluid Incompressible Navier-Stokes-Fourier-Maxwell System with Ohm's Law: Convergence for Classical Solutions. arXiv:1905.04739.

[7] Jiang, J. (2009) Vlasov-Maxwell-Boltzmann Diffusive Limit. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **194**, 531-584. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0169-6