Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 186-191
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112026

Hans汉斯

对称2-(15,8,4)设计的区传递自同构群

代　娟，周胜林

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: d1423103437@163.com, slzhou@scut.edu.cn

收稿日期：2020年12月30日；录用日期：2021年1月29日；发布日期：2021年2月7日

摘　要

本文研究2-(15,8,4)对称设计的区传递自同构群，证明了2-(15,8,4)对称设计的区传递自同构群有9个，旗传递自同构群有6个。同时也给出了该设计的点本原，非点本原，旗传递点本原，旗传递非点本原的自同构群。

关键词

对称设计，旗传递，区传递，自同构群

Block-Transitive Automorphism Groups of Symmetric 2-(15,8,4) Designs

Juan Dai, Shenglin Zhou

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: d1423103437@163.com, slzhou@scut.edu.cn

Received: Dec. 30th, 2020; accepted: Jan. 29th, 2021; published: Feb. 7th, 2021

Abstract

Let D be a symmetric 2-(15,8,4)design and let $G \le Aut(D)$ be block-transitive. It is proved that, there are exactly such 9 automorphism groups of block-transitive and 6 automorphism groups of flag-transitive. And it also gives the point-primitive, point-imprimitive, flag-transitive point-primitive and flag-transitive point-imprimitive automorphism groups of this design.

Keywords

Symmetric Design, Flag-Transitive, Block-Transitive, Automorphism Groups

文章引用: 代娟, 周胜林. 对称 2-(15,8,4)设计的区传递自同构群[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 186-191.
DOI: 10.12677/pm.2021.112026

1. 引言

定义 1：一个 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$ 定义为符合下列条件的一对符号 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$：

1) $\mathcal{P}$ 是有 v 个点的有限集，$\mathcal{P}$ 中的元素称为点；

2) $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一组 k 子集的集，$\mathcal{B}$ 中的元素称为区组或者区；

3) $\mathcal{P}$ 中任意给定的 2-子集都恰好包含在 $\mathcal{B}$ 中的 λ 个区组中。

这里 v，k，λ 都是正整数，且满足 $v>k>2$，即 D 是非平凡的。设 r 是过一个点的区的个数，b 是区组的总数。我们称 (v,b,r,k,λ) 为设计 D 的参数。它们满足：$bk=vr;\lambda(v-1)=r(k-1);b\geq v$

命题 1：[1] 对于一个 2-(15,8,4)设计，其中 $k<v$，下列等价：

1) $b = v$；

2) $r = k$；

3) 任意两个区组相交于 λ 个区组；

4) 任意两个区组相交于常数个点。

定义 2：满足上述等价条件的一个 2-设计称为对称设计。它的参数满足方程：$k(k-1)=\lambda(v-1)$。

有限群论与组合设计理论之间联系紧密，对设计的自同构群的研究可以帮助我们发现新的设计。反过来，设计的自同构群又可以帮助我们更清楚地了解某些群的结构。1985 年，Kantor [2]完全分类了在点集上 2-传递设计的 2-(v,k,λ) 设计；近年来，周胜林分别和董会莉[3]，田德路[4] [5]，王亚杰[6] [7]讨论了基柱是交错群 A_n，$\mathrm{PSL}(2,q)$ 及 $\mathrm{PSL}(n,q)$ 和例外 Lie 型单群的旗传递点本原的 2-(v,k,4)对称设计的分类问题，最终都得到 2-(15,8,4)对称设计。本文是在前人的研究基础上，研究具体设计参数的区传递自同构群，2-(15,8,4)对称设计一共有 5 个互不同构的设计[8]，本文中我们限定条件下所求的设计都是同构的，结果如下：

定理 1：设 $\mathcal{D}$ 为一个 2-(15,8,4)对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的自同构群，

a) 若 G 是区传递的，则群 G 有 9 个，分别为 $A_5(15)$，$F(5)[1/2]S(3)$，$\mathrm{GL}(2,4)$，S_5，A_6，$3S_5$，S_6，A_7 和 $\mathrm{PSL}(4,2)$。

b) 若 G 是旗传递的，则群 G 有 6 个，分别为 S_5，A_6，$3S_5$，S_6，A_7 和 $\mathrm{PSL}(4,2)$。

c) 若 G 是点本原的，则群 G 有 4 个，分别为 A_6，S_6，A_7 和 $\mathrm{PSL}(4,2)$。

d) 若 G 是非点本原的，则群 G 有 5 个，分别为 $A_5(15)$，$F(5)[1/2]S(3)$，$\mathrm{GL}(2,4)$，S_5，$3S_5$。

推论 1：设 $\mathcal{D}$ 为一个 2-(15, 8, 4)对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的自同构群，若 G 是旗传递且点本原的，则群 G 有 4 个，分别为 A_6，S_6，A_7 和 $\mathrm{PSL}(4,2)$。

推论 2：设 $\mathcal{D}$ 为一个 2-(15,8,4)对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的自同构群，若 G 是旗传递且非点本原的，则群 G 有 2 个，分别为 S_5 和 $3S_5$。

2. 引理

引理 1：设 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的自同构群，则群 G 在 $\mathcal{D}$ 上旗传递等价下列条件之一：

1) 群 G 在 P 上点传递，且 G_x 在 $P(x)$上传递，这里 $P(x)$是指所有的包含点 x 的区组集合；

2) 群 G 在 B 上区传递，且 G_B 在 B 上传递。

引理 2：[9]若 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个非平凡的 2-(v,k,λ) 对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的传递自同构群。那么 G

作用在点集 P 上的轨道个数等于 G 作用在区组 $\mathcal{B}$ 上的轨道个数，特别地，G 在对称设计上是区传递的当且仅当其是点传递的。

引理 3：[10]设 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个非平凡的 2-(v,k,λ) 对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的旗传递非点本原自同构群，设点集 $\mathcal{P}$ 有长为 c 的 d 个非本原区构成的非本原分划 $\mathcal{C}$ 那么存在一个常数 l，使得对每一个 $B\in\mathcal{B},\Delta\in\mathcal{C}$，$|B\cap\Delta|$ 等于 0 或者 l，且下列之一成立：

1) $k\le\lambda(\lambda-3)/2$；

2) $(v,k,\lambda)=(\lambda^2(\lambda+2),\lambda(\lambda+1),\lambda)$ 这里 $(c,d,l)=(\lambda^2,\lambda+2,\lambda)$ 或者 $(\lambda+2,\lambda^2,2)$；

3) $(v,k,\lambda,c,d,l)=\left(\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)\left(\frac{\lambda^2-2\lambda+2}{2}\right),\frac{\lambda^2}{2},\lambda,\frac{\lambda+2}{2},\frac{\lambda^2-2\lambda+2}{2},2\right)$ 此处 $\lambda\equiv0(\bmod 4)$ 或者 $\lambda=2u^2$ 这里 u 是奇数，$u\ge3$，而且 $2(u^2-1)$ 是一个完全平方数。

4) $(v,k,\lambda,c,d,l)=\left((\lambda+6)\left(\frac{\lambda^2+4\lambda-1}{4}\right),\frac{\lambda(\lambda+5)}{2},\lambda,\lambda+6,\frac{\lambda^2+4\lambda-1}{4},3\right)$ 这里 $\lambda\equiv0$ 或者 $3(\bmod 6)$。

3. 定理 1 和推论的证明

我们用 3.1 节来证明定理 1(a)，用 3.2 节来证明定理 1(b)，并且在每节用具体的群来分别说明我们的方法。接着用 3.3 节来证明定理 1(c)，(d)，最后用 3.4 节证明推论 1，2。

3.1. 定理 1(a)的证明

证明定理 1(a)时，我们要借助计算机软件 Magma [11]，设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(15, 8, 4)对称设计，且群 G 是 $\mathcal{D}$ 的区传递自同构群，则 $\mathcal{D}$ 和 G 必须满足下列四个事实：

1) G 中至少存在一个指数为 15 的子群 H；

因为群 G 在区组 $\mathcal{B}$ 上传递，于是，对任意的 $B\in\mathcal{B}$ 有 $|G:G_B|=b=15$，即 $n=|G_B|=|G|/b=|G|/15$，我们利用命令 Subgroups(G:OrderEqual:=n)，得到 G 的指数为 15 的所有子群共轭类，记为 H。

2) G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 中至少存在一个长为 $k=8$ 的不动区；

因为 B 是 G_B 的不动区，则 G_B 存在长为 8 的不动区(即 G_B 一些轨道的并)。利用命令 Orbits(H)可以得到 H 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的所有轨道，找出子群 H 的长为 8 的不动区，记为区组 B，则 $H=G_B$。

3) G_B 的所有长为 8 的不动区中至少有一个不动区 B 满足 $|B^G|=b=15$。

因为 G 是区传递的，则 $|\mathcal{B}|=|B^G|=b=15$，利用命令 $\#(B\hat{\ }G)$，得到 G 作用在 B 上的轨道长。

4) 验证 $(\mathcal{P},B^G)$ 为一个 2-设计。

利用命令 $\mathrm{Design}(2,v\,|\,B^G)$ 验证 $\mathcal{D}$ 是否为一个 2-设计。

首先，借助 Magma 软件我们知道 15 个点上的传递置换群一共有 104 个，然后，经过上述 4 个事实的筛选，剔掉不符合条件的群，最后我们得出结论，一共存在 9 个群，分别为 $A_5(15)$，$F(5)[1/2]S(3)$，$\mathrm{GL}(2,4)$，S_5，A_6，$3S_5$，S_6，A_7 和 $\mathrm{PSL}(4,2)$。再利用命令 IsIsomorphic(Di, Dj)知这 9 个设计两两同构，它们对应的参数 (v,k,λ)、群 G、基区 B、设计列表如下表 1。

下面我们用 $A_5(15)$ 为例说明我们定理 1(a)的证明方法。首先，利用命令 TransitiveGroup(15, 5)输出 15 个点上的置换群 $A_5(15)$ 记为群 G，其次，由 G 的区传递性，知道 G 有指数为 15 的子群，因为 $|G|/b=|G|/15=4$，所以利用命令 Subgroups(G:OrderEqual:=4)得到 G 的指数为 15 的子群共轭类只有一个，记为 H。利用命令 Orbits(H)，得到 H 的所有轨道分别为：

$$\{12\},\ \{13\},\ \{14\},\ \{1,2,3,15\},\ \{4,5,6,7\},\ \{8,9,10,11\}$$

Table 1. Block-transitive automorphism groups of symmetric 2-(15,8,4) designs and their base blocks
表 1. 2-(15,8,4)设计区传递自同构群及基区

情形	(v,k,λ)	G	基区 B	设计
1	(15,8,4)	$A_5(15)$	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15}	D_1
2	(15,8,4)	$F(5)[1/2]S(3)$	{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}	$\cong D_1$
3	(15,8,4)	$\mathrm{GL}(2,4)$	{1, 7, 10, 12, 3, 5, 8, 14}	$\cong D_1$
4	(15,8,4)	S_5	{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14}	$\cong D_1$
5	(15,8,4)	A_6	{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 13}	$\cong D_1$
6	(15,8,4)	$3S_5$	{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14}	$\cong D_1$
7	(15,8,4)	S_6	{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 15}	$\cong D_1$
8	(15,8,4)	A_7	{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15}	$\cong D_1$
9	(15,8,4)	$\mathrm{PSL}(4,2)$	{1, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15}	$\cong D_1$

这些轨道的长度分别为1, 1, 4, 4, 4.显然，H没有长为8的轨道，但这些轨道的并可组成长度为8的不动区，它们分别为：

$$B_1:=\{1,2,3,15,4,5,6,7\}，\quad B_2:=\{1,2,3,15,8,9,10,11\}，\quad B_3:=\{8,9,10,11,4,5,6,7\}$$

接着，通过命令计算有$\left|B_1^G\right|=\left|B_2^G\right|=\left|B_3^G\right|=15=b$，再通过命令$\mathcal{D}_1:=\mathrm{Design}\left\langle 2,15\mid B_1^G\right\rangle$，$\mathcal{D}_2:=\mathrm{Design}\left\langle 2,15\mid B_2^G\right\rangle$，$\mathcal{D}_3:=\mathrm{Design}\left\langle 2,15\mid B_3^G\right\rangle$。验证$\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3$都是2-设计。又因为通过验证发现$B_1^G=B_2^G=B_3^G$，所以$\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2=\mathcal{D}_3$。此时设计$\mathcal{D}_1$的基区$B$为：

$$B_1:=\{1,2,3,15,4,5,6,7\}，\quad B_2:=\{1,2,3,15,8,9,10,11\}，\quad B_3:=\{8,9,10,11,4,5,6,7\}，$$

$$B_4:=\{1,2,5,6,9,10,13,14\}，\quad B_5:=\{1,6,7,10,11,12,13,15\}，\quad B_6:=\{2,5,7,9,11,12,14,15\}，$$

$$B_7:=\{1,4,5,8,9,12,13,15\}，\quad B_8:=\{2,4,6,8,10,12,14,15\}，\quad B_9:=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}，$$

$$B_{10}:=\{3,5,6,8,11,13,14,15\}，\quad B_{11}:=\{1,3,5,7,8,10,12,14\}，\quad B_{12}:=\{2,3,6,7,8,9,12,13\}，$$

$$B_{13}:=\{3,4,7,9,10,13,14,15\}，\quad B_{14}:=\{2,3,4,5,10,11,12,13\}，\quad B_{15}:=\{1,3,4,6,9,11,12,14\}。$$

因此，$A_5(15)$为2-(15,8,4)对称设计的区传递自同构群。

3.2. 定理1(b)的证明

G是旗传递的，那么G一定是区传递的，所以只需对定理1(a)中的群进行验证。但由引理1(2)可知，子群G_B在区组B上传递，那么G_B作用在点集P中至少存在一个长为k=8的轨道B，我们只需要修改上述的事实(2)，同理于定理1(a)的证明，得到6个群，分别为S_5，A_6，$3S_5$，S_6，A_7和$\mathrm{PSL}(4,2)$。可知此时存在6个两两同构的设计，它们对应表1中的情形4-9。

下面我们以A_6为例说明我们定理1(b)的方法。首先，TransitiveGroup(15, 20)是群A_6作用在15个点上和在Magma的位置。再利用对应的子群需要满足至少有一个长为$k=8$轨道的条件，我们用Magma输入程序：

```
H:=Subgroups(G:OrderEqual:=24);#H ;
2
>GB1:=H[1]`subgroup;
```

```
>GB2:=H[2]`subgroup;
> Orbits(GB1);
[ GSet{ 10 },
GSet{ 1, 4, 5, 11, 14, 15 },
GSet{ 2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 13 }]
>Orbits(GB2);
[GSet{ 10, 11, 14 },
GSet{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15 }]
```

其中Orbits(GB1)：输出的是子群GB1作用在点集上的所有轨道，从得到的所有结果中我们发现，子群GB1作用在点集上一共有三个轨道，且轨道长度为1, 6, 8. 由G的旗传递性可知，G_B必须存在长为$k=8$的轨道。显然，只有第三个轨道符合记为$\mathrm{O1}=\{2,3,6,7,8,9,12,13\}$。而子群GB2作用在点集上的所有轨道长度都不符合。我们再输入程序：

```
>X1:=O1^G;#X1;
15
>Design<2,15|X1>;
2-(15, 8, 4) Design with 15 blocks
Point-set of 2-(15, 8, 4) Design with 15 blocks
Block-set of 2-(15, 8, 4) Design with 15 blocks
```

可以知道，确实是一个2-(15,8,4)设计，因此A_6为2-(15,8,4)对称设计的旗传递自同构群。

3.3. 定理 1(c), (d)的证明

在这节我们来证明定理 1(c)，(d)。在定理 1(c)中，D是一个 2-(15,8,4)对称设计，且群G是$\mathcal{D}$的点本原自同构群。由 Magma 知，15 次本原群只有 6 个，分别为A_6，S_6，A_7，$\mathrm{PSL}(4,2)$，A_{15}或S_{15}。因为G是点本原的，则G是点传递的，由引理 2，我们知道对称设计中G点传递等价于区传递，因而所求的本原群满足定理 1(a)的条件，所以群G为A_6，S_6，A_7和$\mathrm{PSL}(4,2)$。通过表 1 可知此时存在 4 个两两同构的设计，它们对应表 1 中情形 5，7~9。

在定理 1(d)中，D是一个 2-(15,8,4)对称设计，且群G是$\mathcal{D}$的非点本原自同构群，同理于定理 1(c)的证明，由定理 1(a)和 15 个点上的非本原群可知，群G为$A_5(15)$，$F(5)[1/2]S(3)$，$\mathrm{GL}(2,4)$，S_5和$3S_5$。此时存在 5 个两两同构的设计，它们对应表 1 中的情形 1-4，6。

3.4. 推论的证明

在推论 1 中，D是一个 2-(15,8,4)对称设计，G是D的旗传递且点本原自同构群，那么此时群G既需要满足定理 1(b)又需要满足定理 1(c)，因此群G为A_6，S_6，A_7和$\mathrm{PSL}(4,2)$。此时存在 4 个两两同构的设计，它们对应 5，7~9。

Table 2. Flag-transitive point-imprimitive automorphism groups ofsymmetric 2-(15,8,4)designs and their base blocks
表 2. 2-(15,8,4)设计旗传递非点本原自同构群及基区

(v,k,λ)	G	c	d	基区 B	设计
(15,8,4)	S_5	3	5	{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14}	$\cong D_1$
(15,8,4)	$3S_5$	3	5	{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14}	$\cong D_1$

在推论 2 中，群 G 是旗传递非点本原的，那么此时既需要满足定理 1(b)又需要满足定理 1(d)，因此群 G 为 S_5 和 $3S_5$。此时存在 2 个两两同构的设计。而且群 G 是非点本原的，那么点集 P 存在一个长为 c 的 d 个非本原区的非本原分划 $\mathcal{C}$，由引理 3(3)可知，$c=3$，$d=5$。它们对应的参数 (v,k,λ)，群 G、非本原分划 c、d、基区 B、设计 D 列表如上表 2。

致　谢

本论文在写作过程中和申佳昕博士进行了有益的讨论，在此表示感谢！

参考文献

[1] Ionin, Y.J. and Shrikhande, M.S. (2006) Combinatorics of Symmetric Designs. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511542992

[2] Kantor, W.M. (1985) Classification of 2-Transitive Symmetric Designs. *Graphs and Combinatorics*, **1**, 165-166. https://doi.org/10.1007/BF02582940

[3] Dong, H.L. and Zhou, S.L. (2011) Alternating Groups and Flag-Transistive 2-(v,k,4) Symmetrc Designs. *Journal of Combinatorial Designs*, **19**, 475-483. https://doi.org/10.1002/jcd.20294

[4] Tian, D.L. and Zhou, S.L. (2016) Classification of Flag-Transitive Primitive Symmetric (v, k, λ) Designs with PSL(2,q) as Socle. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **36**, 127-139.

[5] Zhou, S.L. and Tian, D.L. (2011) Flag-Transitive Point-Primitive 2-(v, k, 4) Symmetric Designs and Two Dimensional Classical Groups. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **26**, 334-341. https://doi.org/10.1007/s11766-011-2702-x

[6] Wang, Y.J. and Zhou, S.L. (2017) Flag-Transitive Point-Primitive (v,k,4) Symmetric Designs with Exceptional Socle of Lie Type. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **43**, 259-273.

[7] 王亚杰. 2-(v,k,λ)设计的旗传递自同构群[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2016.

[8] Nandi, H.K. (1946) A Further Note on Nonisomorphic Solutions of İncomplete Block Designs. *Sankhya*, **7**, 313-316.

[9] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H. (1999) Design Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781139507660

[10] Praeger, C.E. and Zhou, S.L. (2006) Imprimitive Flag-Transitive Symmetric Designs. *Journal of Combinatoriial Theory*, *Series A*, **113**, 1381-1395. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2005.12.006

[11] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125