

# 基于推广类W态的纠缠目击构造

常霞

华南理工大学数学学院, 广东 广州

Email: 664024072@qq.com

收稿日期: 2021年2月20日; 录用日期: 2021年3月22日; 发布日期: 2021年3月31日

## 摘要

在量子信息理论中, 纠缠的判断是一个重要而棘手的问题, 尤其对于高维空间中纠缠态的判断, 至今仍然没有一个可操作性强的通用方法。在众多纠缠判断的方法中, 纠缠目击因其形式简单且可操作性强而被广泛研究, 本文对一类纠缠目击进行了研究, 通过改变集合 $D_k$ 来构造出适用于不同可分类型的纠缠目击, 在一定范围下, 本文给出的纠缠目击能够判断更多的纠缠态。

## 关键词

纠缠目击, 奇异值

# A Construction of Entanglement Witnesses Based on Generalized W-Like States Class

Xia Chang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Email: 664024072@qq.com

Received: Feb. 20<sup>th</sup>, 2021; accepted: Mar. 22<sup>nd</sup>, 2021; published: Mar. 31<sup>st</sup>, 2021

## Abstract

In quantum information theory, the detection of entanglement is an important and tricky problem, especially for the detection of entangled states in high dimensional space, there is still no general method with strong operability. In many entanglement detective methods, entanglement witness because of its simple form and maneuverability has been widely studied, in this paper, a class of entanglement witness is studied, by changing the set  $D_k$  to construct entanglement witness which is suitable for different types of entanglement, to show that under a certain range, the entanglement of the witness presented in this paper can detect more entangled states.

文章引用: 常霞. 基于推广类 W 态的纠缠目击构造[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 387-394.

DOI: 10.12677/pm.2021.113051

## Keywords

### Entanglement Witness, Singular Value

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

量子纠缠是量子力学中特有的现象, 纠缠为量子信息处理提供了必要的资源, 因此, 如何检测纠缠态以及如何量化纠缠也就成为重要的问题。至今为止, 判断任意给定量子态是纠缠态或可分态, 仍然没有很好的解决办法。

这一难题推动了许多关于量子态可分准则的新发现[1]。然而, 许多可分准则[2]是在量子态层析基础上重建量子态, 这对于高维或多体量子态在物理装置上的配备是不切实际的。已知在低维两体希尔伯特空间中, 对于  $2 \times 2, 2 \times 3$  两体中的量子态, PPT 判据是可分的充要条件[3]。但对于高维多体的量子态来说, 并没有一个通用的判据可以区分纠缠和可分的量子态。

近年来, 许多学者致力于研究判断纠缠的充分条件, 其中一个简便的判断方法就是纠缠目击 (Entanglement Witness) [3]。纠缠目击是一个厄米算子, 它对于所有可分态的均值都是非负的, 且至少对于一个纠缠态它的均值是负的。对于任意一个纠缠态至少都存在一个纠缠目击可以把它与其他可分态区分开来[3]。过去几十年间有许多关于纠缠目击检测量子态的新进展, 包括纠缠目击的优化[4], 非线性的纠缠目击的提出[5], 精细纠缠目击 (ultrafine entanglement witness) [6] 及其相关的改进[7]。

在此文中, 我们通过类  $w$  态构造了一类纠缠目击。由于  $w$  态具有良好的对称性, 通过对类  $w$  态施密特分解得到任意两体间观察量在可分态集合下的上确界, 从而构造了一系列在不同划分下可分集合的纠缠目击。同时[8]中的情况是本文的特殊情况, 针对一类态本文所构建的纠缠目击有效提高了其检测范围。

## 2. 基本知识

### 2.1. 概念与符号

根据量子力学的算符假设, 量子态可由 Hilbert 空间  $H$  中的厄米算符表示。本文用  $\rho, \sigma$  表示量子态的密度算子。量子态属于 Hilbert 空间  $H$ ,  $H = C^{d_1} \otimes C^{d_2} \otimes \cdots \otimes C^{d_n}$ ,  $d_i$  表示第  $i$  个子空间的维数,  $d_i < +\infty, 1 \leq i \leq n$ 。一个  $N$  体量子态  $\sigma \in H$  是完全可分的当且仅当它可以表示成  $\sigma = \sum_i p_i \sigma_1^i \otimes \sigma_2^i \otimes \cdots \otimes \sigma_n^i$ ;

完全可分态集合记为  $S$ ,  $S = \left\{ \sigma \mid \sigma = \sum_i p_i \sigma_1^i \otimes \sigma_2^i \otimes \cdots \otimes \sigma_n^i \right\}$ ; 若量子态  $\sigma$  不能分解为上述形式, 我们就称  $\sigma$  为纠缠态。

一个  $N$  体量子态  $\rho$  是  $k$ -二体可分的, 当且仅当存在  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的一个置换, 它可以表示成  $\rho = \sum_i p_i \rho_{m_1 m_2 \dots m_k}^i \otimes \rho_{m_{k+1} m_{k+2} \dots m_n}^i$ , 其中  $\rho_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ,  $\rho_{m_{k+1} m_{k+2} \dots m_n}$  分别是子系统  $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$  和  $\{m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_n\}$  的密度矩阵, 若  $\rho$  不能分解为上述形式, 我们就称  $\rho$  存在  $k$ -二体纠缠。 $P_k = \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_k) : (m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_n) \right\}$  称为一个  $k$ -二体划分。从  $N$  体中选择  $k$  个子系统和剩余  $(N-k)$  个子

系统区分共有  $C_N^k$  种不同的选取方式。 $N$  体希尔伯特空间  $H$  共有  $\left(C_N^1 + C_N^2 + \dots + C_N^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}\right)$  种  $k$ -二体划分,

$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  表示对  $\frac{N}{2}$  向下取整。 $k$ -二体可分态集合记为  $D_k$ ,  $D_k = \left\{ \sigma \mid \sigma = \sum_i \sigma_{m_1, m_2, \dots, m_k}^i \otimes \sigma_{m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_n}^i \right\}$ 。

## 2.2. 纠缠目击

对量子态进行纠缠的判定中, 有一类基本的判别工具: 纠缠目击判据(Entanglement Witness), 简称为 EW。它的定义如下, 厄米算子  $W$  是一个 EW 当且仅当下列两个条件满足:

- (1) 对于任意的完全可分态  $\sigma \in S$ , 满足  $\text{tr}(W\sigma) \geq 0$ ;
- (2) 至少存在一个  $\rho$  是纠缠态, 满足  $\text{tr}(W\rho) < 0$ 。

几类常见的纠缠目击形式如下:

$W = gI_d - |\phi\rangle\langle\phi|$ ;  $g = \sup_{|\phi\rangle \in S} |\langle\phi|\phi\rangle|^2$ ;  $|\phi\rangle$  是一个纠缠态。

$W = |\phi\rangle\langle\phi|^{T_B}$ , 其中  $|\phi\rangle$  是  $\rho^{T_B}$  谱分解后负特征值所对应的特征向量,  $\rho$  是纠缠态,  $T_B$  表示对系统  $B$  转置。

## 3. 纠缠目击的构造

在本文第一种形式的 EW 中, 当  $|\phi\rangle = |w\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$  时, 我们把这一类纠缠目击的形式由 3 体推广到  $N$  体希尔伯特空间  $C^2 \otimes C^2 \otimes \dots \otimes C^2$  中。

考虑  $|\phi\rangle = |\psi\rangle = \lambda_1 |10\dots 0\rangle + \lambda_2 |010\dots 0\rangle + \dots + \lambda_n |00\dots 1\rangle$ , 其中  $\lambda_i \in C$ ,  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1$ 。取定二体划分  $P_k$ ,  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , 二体划分  $P_k$  与集合  $D_k$  对应, 同时也与  $g_k$  对应, 即  $g_k = \sup_{|\phi\rangle \in D_k} |\langle\phi|\psi\rangle|^2$ , 由完全可分集合  $S$  变为  $k$ -两体可分的集合  $D_k$ 。若存在  $\rho$  使得  $\text{tr}(W\rho) < 0$ , 则  $\rho \notin D_k$ , 因此可以判定  $\rho$  存在  $k$ -二体纠缠。

我们将  $|\psi\rangle = \lambda_1 |10\dots 0\rangle + \lambda_2 |010\dots 0\rangle + \dots + \lambda_n |00\dots 1\rangle$  称为推广的类 W 态, 由于它具有良好的对称性, 大大简便了  $g_k$  的计算。为了计算  $g_k$ , 我们要对  $N$  体  $K$  划分做一个更为详细的描述。

$|\psi\rangle = \lambda_1 \left| \underbrace{10\dots 0}_k \otimes 0\dots 0 \right\rangle + \lambda_2 \left| \underbrace{01\dots 0}_k \otimes 0\dots 0 \right\rangle + \dots + \lambda_k \left| \underbrace{00\dots 1}_k \otimes 0\dots 0 \right\rangle + \dots + \lambda_n \left| \underbrace{00\dots 0}_k \otimes 0\dots 1 \right\rangle$  将  $|\psi\rangle$  看做前  $k$  体与后  $(n-k)$  体的二体态,  $|\psi\rangle = \sum_{i_A, j_B} \alpha_{i_A, j_B}^k |i_A\rangle |j_B\rangle$ , 其中  $|i_A\rangle$  是前  $k$  体子系统中的一组基,  $|j_B\rangle$  是后  $(n-k)$  体子系统中的一组基,  $\alpha_{i_A, j_B}^k$  的系数矩阵有如下形式。

记  $[X]_{i_A, j_B}^k = \alpha_{i_A, j_B}^k$ , 有:

$$X_{i_A, j_B}^k = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_n & \dots & \lambda_{k+2} & \dots & \lambda_{k+1} \\ \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_2 & \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(2^{k-1}+1) \times (2^{n-k-1}+1)}$$

我们省略了 0 元素, 当  $1 \leq i \leq k$  时,  $\lambda_i$  位于矩阵中  $(2^{k-i} + 1, 1)$  的位置; 当  $k+1 \leq i \leq n$  时,  $\lambda_i$  位于矩阵

中  $(1, 2^{n-i} + 1)$  的位置。

$$X_{i_A, j_B}^k (X_{i_A, j_B}^k)^+ = \begin{bmatrix} \sum_{i=k+1}^n |\lambda_i|^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_k|^2 & \cdots & \lambda_k \lambda_2^* & \cdots & \lambda_k \lambda_1^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda_2 \lambda_k^* & \cdots & |\lambda_2|^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_1^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_1 \lambda_k^* & \cdots & \lambda_1 \lambda_2^* & \cdots & |\lambda_1|^2 \end{bmatrix}_{(2^{k-1}+1) \times (2^{k-1}+1)}$$

$X_{i_A, j_B}^k (X_{i_A, j_B}^k)^+$  是半正定算子，且其秩为 2 (其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  不全为 0，否则这样的划分没有意义)，又因为  $\text{tr} \{ X_{i_A, j_B}^k (X_{i_A, j_B}^k)^+ \} = 1$ ，因此它的特征值为  $\sum_{i=k+1}^n |\lambda_i|^2$ ， $1 - \sum_{i=k+1}^n |\lambda_i|^2$ ，其余都为 0。

**定理 1:**  $g_k = \sup_{|\phi\rangle \in D_k} |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \lambda_{\max} (X_{i_A, j_B}^k (X_{i_A, j_B}^k)^+)$ 。

参考[9]中附录，证明如下：

$|\phi\rangle$  作为  $k$ -二体可分态存在如下的分解， $|\phi\rangle = \sum_{m,n} a_m |m\rangle \otimes b_n |n\rangle \in D_k$ ， $|m\rangle, |n\rangle$  分别是  $H_k$  和  $H_{n-k}$  中的一组正交基，其中  $H_k$  与  $|\psi\rangle$  前  $k$  体划分的子系统相同， $H_{n-k}$  与  $|\psi\rangle$  后  $(n-k)$  体划分的子系统相同。

$$g_k = \sup_{|\phi\rangle \in D_k} |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \max_{|\phi\rangle \in D_k} \left| \sum_{m,n} a_m^* b_n^* \langle mn | \sum_{i,j} X_{i_A, j_B}^k |ij\rangle \right|^2 = \max_{\bar{a} \in H_k, \bar{b} \in H_{n-k}} \left( \langle \bar{a} | X_{i_A, j_B}^k | \bar{b} \rangle \right)^2$$

任意  $m \times n$  矩阵  $X$  都存在奇异值，且等于  $XX^+$  的特征值的非负平方根。

$$\text{因此有 } g_k = \max_{\bar{a} \in H_k, \bar{b} \in H_{n-k}} \left( \langle \bar{a} | X_{i_A, j_B}^k | \bar{b} \rangle \right)^2 = \lambda_{\max} (X_{i_A, j_B}^k (X_{i_A, j_B}^k)^+) = \max \left\{ \sum_{i=1}^k |\lambda_i|^2, \sum_{i=k+1}^n |\lambda_i|^2 \right\}$$

我们利用  $g_k$  值来构造检测任意  $P_k$  两体划分下的纠缠目击：

$$\begin{aligned} W_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}}^1 &= g_{k_1} I_d - |\psi\rangle \langle \psi|, g_{k_1} = \max \left\{ |\lambda_{k_1}|^2, 1 - |\lambda_{k_1}|^2 \right\}; \\ W_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}}^2 &= g_{k_2} I_d - |\psi\rangle \langle \psi|, g_{k_2} = \max \left\{ \sum_{i=1}^2 |\lambda_{k_i}|^2, \sum_{i=3}^n |\lambda_{k_i}|^2 \right\}; \\ &\vdots \\ W_{\{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n\}}^m &= g_{k_m} I_d - |\psi\rangle \langle \psi|, g_{k_m} = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_{k_i}|^2, \sum_{i=m+1}^n |\lambda_{k_i}|^2 \right\} \end{aligned}$$

其中  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  是  $\{123 \dots n\}$  的任意一个置换。

这一结果与我们选取的推广类  $W$  态较好的形式有着紧密的联系。我们可以利用这样构造的纠缠目击去判断  $N$  体量子态  $\rho$  任意两体间的纠缠情况。例如想要知道  $N$  体(qubit)系统  $\rho$  中第 8 个子系统与其他子系统间的纠缠情况 ( $N \geq 8$ )，我们只需计算参数方程  $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_8 = \langle \psi | \rho | \psi \rangle - g_{\{8, 12 \dots 79 \dots n\}} > 0$  是否有解。若有解，则  $\rho$  的第 8 个子系统与其他子系统存在纠缠。

#### 4. 一类带白噪声态的纠缠判断的优化

最简单的一种情况(均分参数)： $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$ 。

容易计算得到:

$$\begin{aligned} g_{\{1:23\dots n\}} &= g_{\{2:134\dots n\}} = \dots = g_{\{n:12\dots n-1\}} = \frac{n-1}{n} \\ g_{\{k_1 k_2 : k_3 k_4 \dots k_n\}} &= g_{\{k_1 k_3 : k_2 k_4 \dots k_n\}} = \dots = g_{\{k_{n-1} k_n : k_1 k_2 \dots k_{n-2}\}} = \frac{n-2}{n} \\ &\vdots \\ g_{\{12\dots i:i+1\dots n\}} &= g_{\{k_1 k_2 \dots k_i : k_{i+1} k_{i+2} \dots k_n\}} = \frac{n-i}{n}, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

若  $\forall i \in Z, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ,  $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_i > 0$  都有解, 则被检测态  $\rho$  是真纠缠态。若部分有解, 说明存在对应的  $k$ -二体纠缠。

针对某一类特殊形式的量子态:  $\rho = p|\psi_w\rangle\langle\psi_w| + \frac{1-p}{2^n}I_d \in C^2 \otimes C^2 \otimes \dots \otimes C^2 \otimes C^2$ , 其中  $|\psi_w\rangle = \sqrt{\frac{1}{n}}(|10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle)$ , 讨论如何选取  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  这一组参数使得所构造的纠缠目击在何时会比均分参数情况下的纠缠目击判断的纠缠范围更大, 这意味着  $p$  的取值范围更大。

在均分参数下我们所能判断的相应  $k$ -二体纠缠态需满足:

$$p > \frac{2^n \cdot g_k - 1}{2^n - 1} \quad (1)$$

其中  $g_k$  是均值参数下  $k$ -二体划分  $P_k$  下的上确界。

在参数不定的情况下我们能判断的纠缠态需满足:

$$p > \frac{2^n \cdot g'_k - 1}{2^n \cdot F - 1} \quad (2)$$

其中  $F = F(|\psi\rangle, |\psi_w\rangle) = |\langle\psi|\psi_w\rangle|^2$ , 是  $|\psi\rangle$  和  $|\psi_w\rangle$  的保真度,  $g'_k$  是参数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  确定下  $k$ -二体划分  $P_k$  的上确界。

为使  $p$  尽量小以检测到更多纠缠态, 我们希望  $F$  尽量接近于 1, 而  $g'_k$  尽量小。

$$F = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}{n}$$

$g_k = \max \left\{ \sum_{i=1}^k |\lambda_{k_i}|^2, 1 - \sum_{i=1}^k |\lambda_{k_i}|^2 \right\}$ , 令  $x = \sum_{i=1}^k |\lambda_{k_i}|^2$ , 则  $g_k = \{x, 1-x\}$ , 为使得  $F$  尽量大,  $\lambda_{k_i}$  都应为实数。

$$\begin{aligned} (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} + \dots + \lambda_{k_n})^2 &= 1 + 2 \sum_{k_i < k_j} \lambda_{k_i} \lambda_{k_j} \leq 1 + \sum_{k_i < k_j} (\lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_i \neq k_j} (\lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2) = n \end{aligned}$$

当且仅当  $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \dots = \lambda_{k_n} = \frac{\sqrt{n}}{n}$  取等号, 因此在  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_{k_i}^2$  的情况下, 当

$\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \dots = \lambda_{k_k} = \sqrt{\frac{x}{k}}, \lambda_{(k+1)_{k+1}} = \lambda_{(k+2)_{k+2}} = \dots = \lambda_{n_n} = \sqrt{\frac{1-x}{n-k}}$ , 使得  $F$  达到最大值。因此  $p$  关于  $x$  的函数:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1-x-\frac{1}{2^n}}{(2k-n)x+2\sqrt{k(n-k)x(1-x)}+n-k-\frac{1}{2^n}}, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x-\frac{1}{2^n}}{(2k-n)x+2\sqrt{k(n-k)x(1-x)}+n-k-\frac{1}{2^n}}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

经分析得该分段函数在  $x = \frac{1}{2}$  处取得最小值。

$\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \dots = \lambda_{k_k} = \sqrt{\frac{1}{2k}}, \lambda_{(k+1)_{k+1}} = \lambda_{(k+2)_{k+2}} = \dots = \lambda_{n_n} = \sqrt{\frac{1}{2(n-k)}}$ ，这样选取的纠缠目击

$$W = \frac{1}{2}I_d - |\varphi\rangle\langle\varphi|, \quad |\varphi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2k}} \left( |10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 010\dots 0\rangle \right) + \sqrt{\frac{1}{2(n-k)}} \left( |0\dots 010\dots 0\rangle + |0\dots 010\dots 0\rangle + |0\dots 010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle \right)$$

能检测到最多的形如  $\rho = p|\psi_w\rangle\langle\psi_w| + \frac{1-p}{2^n}I_d \in C^2 \otimes C^2 \otimes \dots \otimes C^2 \otimes C^2$  的量子态。其中能检测到相应二体纠缠的范围是

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2} - \frac{1}{2^n}}}, \quad (1) \text{ 所表示的 } p_2 = \frac{1 - \frac{k}{n} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}}, \text{ 下图 1 为 } p_1 - p_2 \text{ 的平面示意图:}$$

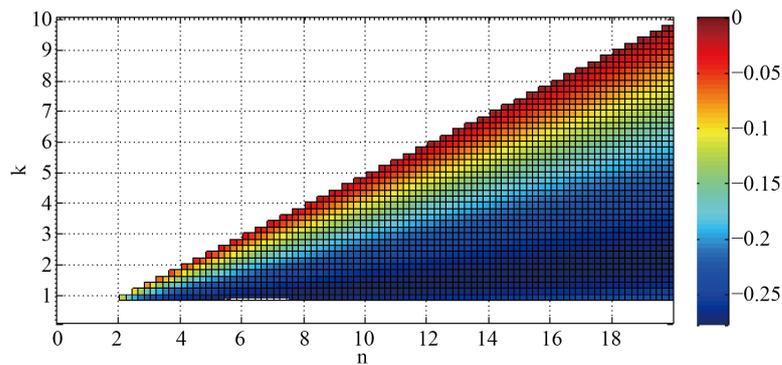


Figure 1. Majorizing region  $(n, k)$  integral point  
图 1. 优化区域  $(n, k)$  整数点

图中有颜色的区域就是所有优化区域点，颜色代表值在右侧颜色栏中已经给出，颜色代表值即为优化概率  $P$  的范围缩小值，颜色越偏蓝色说明优化效果越好。

下面给出一些含变量的多体量子态  $\rho$ ，讨论存在相应纠缠的参数范围，从而得到了这些量子态纠缠的充分条件。

**例 1:**

对于  $\rho = p|\psi_w\rangle\langle\psi_w| + (1-p)|GHZ\rangle\langle GHZ| \in C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$ ，其中  $|\psi_w\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$ ，

$|GHZ\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ , 若使用  $W_0 = \frac{2}{3}I_d - |\psi_w\rangle\langle\psi_w|$  检测, 则当  $p > \frac{2}{3}$  时, 能判定  $\rho$  存在  $\{1\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,3\}, \{3\}, \{1,2\}$  的部分纠缠且是真纠缠。而使用本文构造的  $W_1 = \frac{1}{2}I_d - |\psi\rangle_1\langle\psi|_1$ ,  $|\psi\rangle_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}|100\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle + \frac{1}{2}|001\rangle$ 。其中  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ , 则当  $p > 0.5148$  即能被检测出  $\rho$  有  $\{1\}, \{2,3\}$  之间纠缠, 同理, 构造  $W_2, W_3$  最终得到  $p > 0.5148$  时,  $\rho$  存在相应的部分纠缠, 则当  $p > 0.5148$  时能判定  $\rho$  是真纠缠, 改进了其纠缠判定范围。

**例 2:**

$\rho = P|\psi_w\rangle\langle\psi_w| + \frac{1-p}{8}I_d \in C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$ , 若使用  $W_0 = \frac{2}{3}I_d - |\psi_w\rangle\langle\psi_w|$  检测, 能判定  $p > \frac{13}{21} \approx 0.6191$  时,  $\rho$  存在  $\{1\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,3\}, \{3\}, \{1,2\}$  的部分纠缠且真纠缠。使用本文构造的  $W_1 = \frac{1}{2}I_d - |\psi\rangle_1\langle\psi|_1$ ,  $|\psi\rangle_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}|100\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle + \frac{1}{2}|001\rangle$ , 当  $p > 0.4431$  即可判定  $\rho$  存在构造  $\{1\}, \{2,3\}$  部分纠缠。同理构造  $W_2, W_3$  最终得到  $p > 0.4431$  时存在相应的部分纠缠。则  $p > 0.4431$  时能判定  $\rho$  是真纠缠, 因此本文方法改进了这一类态的纠缠判定范围。

**例 3:**

$\rho = P|\psi_w\rangle\langle\psi_w| + \frac{1-p}{16}I_d \in C^2 \otimes C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$ ,  $|\psi_w\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}(|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle)$ , 使用  $W_0 = \frac{3}{4}I_d - |\psi_w\rangle\langle\psi_w|$  检测, 能判定  $p > \frac{11}{15} \approx 0.7334$  时,  $\rho$  存在  $\{1\}, \{2,3,4\}, \{2\}, \{1,3,4\}, \{3\}, \{1,2,4\}$  的部分纠缠。使用本文构造的  $W_1 = \frac{1}{2}I_d - |\psi\rangle_1\langle\psi|_1$ ,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right\}$ , 则当  $p > 0.5026$  时存在  $\{1\}, \{2,3,4\}$  的部分纠缠。同理构造  $W_2, W_3$  最终得到  $p > 0.5026$  时存在相应的部分纠缠, 改进了其部分纠缠判定范围。

**例 4:**

$\rho = \frac{1}{2^n} \left( I_{2^n} + \sum_{i=1}^n t_i^x \sigma_x^i \otimes I_{2^{n-1}} + \sum_{i=1}^n t_i^y \sigma_y^i \otimes I_{2^{n-1}} + \sum_{i=1}^n t_i^z \sigma_z^i \otimes I_{2^{n-1}} \right)$ ,  $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i$  分别表示在  $N$  体系统中第  $i$  个位置放置  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  的 Pauli 算子, 且满足  $t_i^{\sigma_x} = \text{tr}(\rho \sigma_x^i \otimes I_{2^{n-2}})$ 。

$$\begin{aligned} \langle\psi|\rho|\psi\rangle &= \lambda_1^* \langle 10 \cdots 0 | + \lambda_2^* \langle 010 \cdots 0 | + \cdots + \lambda_n^* \langle 00 \cdots 01 | \rho | \lambda_1 | 10 \cdots 0 \rangle \\ &\quad + \lambda_2 | 010 \cdots 0 \rangle + \cdots + \lambda_n | 0 \cdots 01 \rangle \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^n (1 - 2|\lambda_i|^2) t_i^{\sigma_z} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^n (1 - 2|\lambda_i|^2) t_i^{\sigma_z} > g_{k_m}, \text{ 其中 } g_{k_m} = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_{k_i}|^2, \sum_{i=m+1}^n |\lambda_{k_i}|^2 \right\}。$$

运用我们构造的一系列纠缠目击只需验证上述不等式是否有解, 若某些不等式有解, 则即可说明给定的这个目标态是纠缠的以及存在相应的纠缠分布。

## 5. 总结

本文运用一类特殊的纯态——推广  $N$  体类  $W$  态去构造纠缠目击, 得到了对于不同划分的集合中不同

的  $g$  值。通过检测一类带白噪声的目标态，我们构造的纠缠目击的检测的纠缠态范围更多；对于其他特殊形式的目标态，我们给出了一系列不等式。违反这些不等式中的一个或多个可以说明目标态的纠缠情况。

## 致 谢

本论文在写作过程中与师姐陈月球博士，师弟黄锦威进行了细致的讨论，在此对他们的辛勤付出表示衷心的感谢！

## 参考文献

- [1] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, K. (2009) Quantum Entanglement. *Reviews of Modern Physics*, **81**, 882-889. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>
- [2] White, A.G., James, D.F.V., Eberhard, P.H. and Kwiat, P.G. (1999) Non-Maximally Entangled States: Production, Characterization and Utilization. *Physical Review Letters*, **83**, 3103. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3103>
- [3] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. (1996) Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. *Physics Letters A*, **223**, 1-8. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2)
- [4] Lewenstein, M., Kraus, B., Cirac, J.I. and Horodecki, P. (2000) Optimization of Entanglement Witnesses. *Physical Review A*, **62**, Article ID: 052310. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.052310>
- [5] Guehne, O. and Luetkenhaus, N. (2006) Nonlinear Entanglement Witnesses. *Physical Review Letters*, **96**, Article ID: 170502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.170502>
- [6] Shahandeh, F., Ringbauer, M., Lored, J.C. and Ralph, T.C. (2017) Ultrafine Entanglement Witnessing. *Physical Review Letters*, **118**, Article ID: 110502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.110502>
- [7] Shen, S.Q., Xu, T.R., Fei, S.M., Li-Jost, X. and Li, M. (2018) Optimization of Ultrafine Entanglement Witnesses. *Physical Review A*, **97**, Article ID: 032343. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.032343>
- [8] Zhao, M.J., Wang, Z.X. and Fei, S.M. (2009) Multiqubits Entanglement Based on Optimal Witness. *Reports on Mathematical Physics*, **63**, 409-416. [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(09\)90012-X](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(09)90012-X)
- [9] Bourennane, M., Eibl, M., Kurtsiefer, C., Gaertner, S., Weinfurter, H., Gühne, O., Hyllus, P., Bruß, D., Lewenstein, M. and Sanpera, A. (2004) Experimental Detection of Multipartite Entanglement Using Witness Operators. *Physical Review Letters*, **92**, Article ID: 087902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.087902>