**Pure Mathematics** 理论数学, 2021, 11(3), 357-361
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113047

Hans汉斯

# 矩阵多项式的Bezout等式

**朱晓妍，田运波*，李　锋**

临沂大学，数学与统计学院，山东 临沂
Email: 1284964737@qq.com, *tianyunbobo@163.com

收稿日期：2021年2月17日；录用日期：2021年3月18日；发布日期：2021年3月26日

## 摘　要

本文研究经典的多项式理论中的Bezout等式在矩阵多项式理论中的情形。使用矩阵多项式的Smith标准型证明了一个关于Bezout等式的推广定理。

## 关键词

**Bezout等式，矩阵多项式，Smith标准型**

# Bezout Equation in Matrix Polynomials

**Xiaoyan Zhu, Yunbo Tian*, Feng Li**

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: 1284964737@qq.com, *tianyunbobo@163.com

Received: Feb. 17th, 2021; accepted: Mar. 18th, 2021; published: Mar. 26th, 2021

## Abstract

**This work studies the Bezout equation in matrix polynomials. A theorem generalized the Bezout theorem is proved by the Smith normal form of a matrix polynomial.**

## Keywords

**Bezout Equation, Matrix Polynomials, Smith Normal Form**

*通讯作者。

文章引用: 朱晓妍, 田运波, 李锋. 矩阵多项式的 Bezout 等式[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 357-361.
DOI: 10.12677/pm.2021.113047

## 1. 引言

矩阵多项式理论在线性代数中有着非常重要的地位，在高阶微分方程理论的求解中有着重要应用。经典的多项理论中有如下结论[1]：设 $F[\lambda]$ 是域 $F$ 上的一元多项式环，则对于 $f(\lambda),g(\lambda)\in F[\lambda]$，存在 $u(\lambda),v(\lambda)\in F[\lambda]$ 使得

$$u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=\gcd(f(\lambda),g(\lambda)) \quad \text{(Bezout 等式)}$$

其中 $\gcd(f(\lambda),g(\lambda))$ 表示 $f(\lambda),g(\lambda)$ 的首项系数为 1 的最大公因式[2]。本文主要讨论在矩阵多项式理论中该结论的形式。

矩阵多项式 $F^{n\times n}[\lambda]$ 不是一个交换环，因此考虑 $F^{n\times n}[\lambda]$ 上的 Bezout 等式会有不同的形态出现，例如

$$E(\lambda)A(\lambda)+F(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$$

$$A(\lambda)S(\lambda)+T(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$$

分别表示 Bezout 等式的不同形式推广。Barnett 在[3]中研究了首一的矩阵多项式(矩阵多项式最高次项的系数矩阵是单位矩阵)的异侧的推广形式。

## 2. Bezout 等式在矩阵多项式中的推广

将不同形式推广的一些结论写成下面定理：

**定理 1** 设矩阵多项式 $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}A_i\lambda^i$， $B(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}B_i\lambda^i$，则

(1) $(\det A(\lambda),\det B(\lambda))=1$ 当且仅当对于任意矩阵多项式 $M(\lambda)$，都存在矩阵多项式 $C(\lambda),D(\lambda)$，使得

$$C(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)D(\lambda)=M(\lambda)$$

同理，$(\det A(\lambda),\det B(\lambda))=1$ 当且仅当对于任意矩阵多项式 $M(\lambda)$，都存在 $S(\lambda),T(\lambda)$，使得

$$A(\lambda)S(\lambda)+T(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$$

(2) 存在 $E_1(\lambda),F_1(\lambda)$ 使得

$$E_1(\lambda)A(\lambda)+F_1(\lambda)B(\lambda)=I$$

当且仅当对任意的矩阵多项式 $M(\lambda)$ 都存在 $E(\lambda),F(\lambda)$ 使得

$$E(\lambda)A(\lambda)+F(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$$

同理，存在 $G_1(\lambda),H_1(\lambda)$ 使得

$$A(\lambda)G_1(\lambda)+B(\lambda)H_1(\lambda)=I$$

当且仅当对任意的矩阵多项式 $M(\lambda)$ 都存在 $G(\lambda),H(\lambda)$ 使得

$$A(\lambda)G(\lambda)+B(\lambda)H(\lambda)=M(\lambda)。$$

**证** (1) 由文献[4]中关于 Smith 标准型的相关理论(定理 S1.1)可知，存在可逆的多项式矩阵 $X(\lambda)$，$Y(\lambda)$，$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$，通过左右乘矩阵得到

$$X(\lambda)A(\lambda)Y(\lambda)=\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & a_h(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$P(\lambda)B(\lambda)Q(\lambda)=\begin{bmatrix} b_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & b_h(\lambda) \end{bmatrix},$$

因为 $(\det A(\lambda),\det B(\lambda))=1$，$\det A(\lambda)=a_1(\lambda)\cdots a_h(\lambda)$，$\det B(\lambda)=b_1(\lambda)\cdots b_h(\lambda)$。

所以 $(a_i(\lambda),b_j(\lambda))=1$，所以存在 $u_{ij}(\lambda)$，$v_{ji}(\lambda)$，使得

$$u_{ij}(\lambda)a_i(\lambda)+d_j(\lambda)v_{ji}(\lambda)=1$$

因此，存在矩阵 $U(\lambda),V(\lambda)$ 使得

$$U(\lambda)\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & a_h(\lambda) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & b_h(\lambda) \end{bmatrix}V(\lambda)=P(\lambda)M(\lambda)Y(\lambda)$$

所以

$$U(\lambda)X(\lambda)A(\lambda)Y(\lambda)+P(\lambda)B(\lambda)Q(\lambda)V(\lambda)=P(\lambda)M(\lambda)Y(\lambda)$$

左乘 $P^{-1}(\lambda)$，右乘 $Y^{-1}(\lambda)$ 可得

$$P^{-1}(\lambda)U(\lambda)X(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)Q(\lambda)V(\lambda)Y^{-1}(\lambda)=M(\lambda)$$

即

$$C(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)D(\lambda)=M(\lambda),$$

其中

$$C(\lambda)=P^{-1}(\lambda)U(\lambda)X(\lambda),$$

$$D(\lambda)=Q(\lambda)V(\lambda)Y^{-1}(\lambda)。$$

同理可得，存在 $S(\lambda),T(\lambda)$，使得

$$A(\lambda)S(\lambda)+T(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$$

(2) 若存在 $E_1(\lambda),F_1(\lambda)$ 使得

$$E_1(\lambda)A(\lambda)+F_1(\lambda)B(\lambda)=I$$

则等式左端同乘 $M(\lambda)$，有 $E(\lambda)A(\lambda)+F(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)$，其中 $E(\lambda)=M(\lambda)E_1(\lambda)$，$F(\lambda)=M(\lambda)F_1(\lambda)$。

反之，由于 $M(\lambda)$ 的任意性，显然成立。

下面给出关于不同推广形式的两个例子，上述证明过程中使用了辗转相除法，这为求解问题提供了一种方法。

**例 1** 设

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+2\lambda & 1\\ \lambda+2 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\lambda^3+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

则

$$\det A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^2+2\lambda & 1\\ \lambda+2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2),$$

$$\det B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\end{vmatrix}=-\lambda\left(2\lambda^3+7\lambda^2+3\right),$$

因此$\left(\det A(\lambda),\det B(\lambda)\right)=1$。

设

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda^4+3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^4+2\lambda^2+2\lambda\\ 3\lambda^3+19\lambda^2+11\lambda-3 & \lambda^3+7\lambda^2+5\end{bmatrix}$$

则存在矩阵多项式

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda+1\\ 2 & 2\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & 2\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},$$

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda & \lambda\\ \lambda-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\lambda & \lambda\\ \lambda & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

使得

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\lambda & \lambda+1\\ 2 & 2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^2+2\lambda & 1\\ \lambda+2 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\lambda & \lambda\\ \lambda-1 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3\lambda^4+3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^4+2\lambda^2+2\lambda\\ 3\lambda^3+19\lambda^2+11\lambda-3 & \lambda^3+7\lambda^2+5\end{bmatrix}\end{aligned},$$

即

$$C(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)D(\lambda)=M(\lambda)。$$

**例 2.** 设

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

则

$$\det A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+1),$$

$$\det B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3,$$

因此 $(\det A(\lambda),\det B(\lambda))=1$。

设

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda & \lambda^3+2\lambda-6 & -\lambda^3-\lambda-3\\ 2\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda & 2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-12 & -2\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-6\\ \lambda^2+\lambda & \lambda^3+8\lambda^2-12\lambda & -8\lambda\end{bmatrix}$$

则存在矩阵多项式

$$E(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda+2 & 2\lambda\\ \lambda & 2\lambda & 0\end{bmatrix},\quad F(\lambda)=\begin{bmatrix}2\lambda & 3 & 0\\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0\\ 0 & 6\lambda & \lambda\end{bmatrix}$$

使得

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda+2 & 2\lambda\\ \lambda & 2\lambda & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\lambda & 3 & 0\\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0\\ 0 & 6\lambda & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda & \lambda^3+2\lambda-6 & -\lambda^3-\lambda-3\\ 2\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda & 2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-12 & -2\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-6\\ \lambda^2+\lambda & \lambda^3+8\lambda^2-12\lambda & -8\lambda\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即

$$E(\lambda)A(\lambda)+F(\lambda)B(\lambda)=M(\lambda)。$$

## 基金项目

山东省自然科学基金(项目编号：ZR2018PA002)资助。

## 参考文献

[1] 张贤科, 许甫华. 高等代数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998: 12-13.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] Barnett, S. (1969) Regular Polynomial Matrices Having Relatively Prime Determinants. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **65**, 585-590. https://doi.org/10.1017/S0305004100003364

[4] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L. (2009) Matrix Polynomials. In: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898719024