Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 313-318
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113041

Hans汉斯

特殊图类的符号罗马控制数

马艺晓*，红　霞#

洛阳师范学院数学科学学院，河南 洛阳
Email: 951775794@qq.com, #05shumenghongxia@163.com

收稿日期：2021年2月11日；录用日期：2021年3月11日；发布日期：2021年3月18日

摘　要

设图$G=(V,E)$为一个简单无向图，若$S\subseteq V$，则记$f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。若实值函数$f:V\mapsto\{-1,1,2\}$满足以下两个条件：(i) 对于任意的顶点$v\in V$，均有$f[v]\geq 1$成立；(ii) 如果对任意的顶点$v\in V$，若$f(v)=-1$，则存在一个与v相邻的顶点$u\in V$满足$f(u)=2$，则称该函数为图G的符号罗马控制函数。图G的符号罗马控制数定义为$\gamma_{sR}(G)=\min\{f(V)|f\text{为图}G\text{的一个符号罗马控制函数}\}$。本文利用构造法及穷标法主要得到了特殊图类$2\cdot C_n$的符号罗马控制数的精确值。

关键词

符号罗马控制函数，符号罗马控制数，图$2\cdot C_n$

The Signed Roman Domination Number of a Special Graph

Yixiao Ma*, Xia Hong#

School of Mathematical Sciences, Luoyang Normal University, Luoyang Henan
Email: 951775794@qq.com, #05shumenghongxia@163.com

Received: Feb. 11th, 2021; accepted: Mar. 11th, 2021; published: Mar. 18th, 2021

Abstract

Let $G=(V,E)$ be a simple undirected graph and denotes $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$ for $S\subseteq V$. A signed

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 马艺晓, 红霞. 特殊图类的符号罗马控制数[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 313-318.
DOI: 10.12677/pm.2021.113041

Roman domination function $f: V \mapsto \{-1,1,2\}$ satisfying the conditions that (i) $f[v] \geq 1$ for any $v \in V$, and (ii) every vertex *v* for which $f(v) = -1$ is adjacent to a vertex *u* for which is $f(u) = 2$. The signed Roman domination number of *G* is $\gamma_{sR}(G) = \min\{f(V) \mid f \text{ is a signed Roman function domination } f \text{ of } G\}$. In this paper, we determine exact values of the signed Roman domination number of a special graph $2 \cdot C_n$ by constructive method and exhaustive method.

Keywords

Signed Roman Domination Function, Signed Roman Domination Number, Graph $2 \cdot C_n$

1. 引言

本文所涉及到的图均为无向简单图，且文中没有说明的术语和符号见[1]。

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图，用 $V=V(G)$ 和 $E=E(G)$ 表示顶点集和边集。对 $u \in V(G)$，记 $N_G(u)$ 和 $N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的邻域和闭邻域，用 $d_G(u)=|N_G(u)|$ 表示 u 点在 G 中的度，而用 $\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别表示图 G 的最小度和最大度。把 $N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$，$N_G[u]$，$\Delta(G)$，$\delta(G)$ 分别简单记为 $N(u)$，$N[u]$，Δ，δ。用 C_n 表示 n 阶圈图。

近几十年来，国内外很多学者越来越投入研究图的控制理论中的问题，如今其研究内容越来越丰富。第一次提出的符号控制数概念是在 1995 年[2]，通过几十年的发展，到目前为止已经繁衍出了各种形式的符号控制[3]-[8]。符号罗马控制数的研究主要集中在研究其上下界[9]以及对特殊图的研究。Zhao [10]等人得到了特殊图完全二部图、轮图的符号(全)罗马控制数。尹凯[11]等人把完全二部图的符号罗马控制数的结果推广到了完全多部图上。本文中主要计算出了图 $2\cdot C_n$ 的符号罗马控制数的精确值。

对于图 $G=(V,E)$，定义一个函数 $f:V\mapsto R$ 和 G 的一个子集 $S\subseteq V$，记 $f(S)=\sum_{v\in\in S} f(v)$。下文中，为简单起见，记 V_i 表示所有标号为 i 的顶点集合，其中 $i=-1,+1,+2$。对于 $x\in V$，把 $f(N[x])$ 简单记为 $f[x]$。

2. 基本概念

定义 1 [9] 设图 $G=(V,E)$ 为一个图，若 $S\subseteq V$，则记 $f(S)=\sum_{v\in\in S} f(v)$。若 $f:V\mapsto\{-1,1,2\}$ 满足：(i) 对于任意的顶点 $v\in V$，均有 $f[v]\geq 1$ 成立；(ii) 如果对任意的顶点 $v\in V$，若 $f(v)=-1$，则存在一个与 v 相邻的顶点 $u\in V$ 满足 $f(u)=2$，则称该函数为图 G 的符号罗马控制函数。图 G 的符号罗马控制数定义为 $\gamma_{sR}(G)=\min\{f(V) \mid f\text{为图}G\text{的一个符号罗马控制函数}\}$。若符号罗马控制函数 f 满足 $\gamma_{sR}(G)=\sum_{v\in V} f(v)$，则称函数 f 为图 G 的 $\gamma_{sR}(G)$-函数。

定义 2 图 $G=2\cdot C_n$ $(n\geq 3)$ 表示恰有一个公共点的两个圈的拷贝。

引理 1 [9]对 $n\geq 3$ 时，有 $\gamma_{sR}(C_n)=\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$。

从**引理 1** 容易看出下面的注释。

注释：对于圈 $C_n\left(n=3k+i,i=0,1,2,k\ge 1\right)$，$\gamma_{sR}\left(C_n\right)$ 达到最小仅当 C_n 上某连续 $3k$ 个顶点中每 3 个点标号之和至少为 2 (事实上，恰好为 2)且剩下点标号至少为 1 (如果有的话)。

3. 主要结果

定理 设 $G=2\cdot C_n\ \left(n\ge 3\right)$，则

$$\gamma_{sR}\left(G\right)=\begin{cases}2\left\lceil\dfrac{2n}{3}\right\rceil-3, & 当 n\equiv 0,1\left(\bmod 3\right) 且 n\ne 3,4 时\\ 2\left\lceil\dfrac{2n}{3}\right\rceil-4, & 当 n\equiv 2\left(\bmod 3\right) 且 n\ne 5 时\\ 2, & 当 n=3 时\\ n, & 当 n=4,5 时\end{cases}$$

证明：设 $G=\left(V,E\right)$，$G=C_n^{(1)}\cup C_n^{(2)}$，其中

$$C_n^{(j)}=v_0v_1^{(j)}v_2^{(j)}\cdots v_{n-1}^{(j)},j=1,2。$$

$$V\left(G\right)=\left\{v_0,v_i^{(j)}\,\middle|\,i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2\right\}。$$

$$E\left(G\right)=\left\{v_0v_1^{j},v_i^{(j)}v_{(i+1)(\bmod n)}^{(j)}\,\middle|\,i=1,\cdots,n-1,j=1,2\right\}。$$

设 f 是图 G 的一个最小符号罗马控制函数，则 $\gamma_{sR}\left(G\right)=f\left(V\right)$。不难看出，当 $n=3$ 时，$\gamma_{sR}\left(G\right)=2$；当 $n=4,5$ 时，$\gamma_{sR}\left(G\right)=n$。下面只考虑 $n\ge 6$ 时的情况。

情况 1 当 $n=3k$ 且 $n\ne 3$ 时，由注释以及定义 1，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}\left(G\right)=f\left(V\right)&=\sum_{i=1}^{k-1}f\left[v_{3i-1}^{(1)}\right]+f\left(v_{3k-2}^{(1)}\right)+f\left(v_{3k-1}^{(1)}\right)+\sum_{i=0}^{k-2}f\left[v_{3i+1}^{(2)}\right]+f\left[v_{3k-2}^{(2)}\right]\\&\ge 2\left(k-1\right)+0+2\left(k-1\right)+1=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\end{aligned}$$

另一方面，通过给出一个符号罗马控制函数 g_1 来证明上界。令

$$g_1\left(v_0\right)=+2，\quad g_1\left(v_i^{(1)}\right)=\begin{cases}-1,当 i\equiv 2\left(\bmod 3\right),1\le i\le n-1\\ +2,当 i\equiv 0\left(\bmod 3\right),3<i\le n-1 或 i=1\\ +1,其他\end{cases}$$

$$g_1\left(v_i^{(2)}\right)=\begin{cases}-1,当 i\equiv 1\left(\bmod 3\right),1\le i<n-2 或 i=n-1\\ +2,当 i\equiv 2\left(\bmod 3\right),3<i<n-1\\ +1,其他\end{cases}$$

容易验证，对于任意顶点 $v\in V$，有 $g_1\left[v\right]\ge 1$。从而图 G 中有

$$\left|V_2\right|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2，\quad \left|V_1\right|=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-\left(2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)，\quad \left|V_{-1}\right|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil，$$

故，有

$$\gamma_{sR}\left(G\right)\le g_1\left(V\right)=2\left|V_2\right|+\left|V_1\right|-\left|V_{-1}\right|=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3。$$

综上所述，有

$$\gamma_{sR}(G)=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\text{。}$$

情况 2 当 $n=3k+1$ 且 $n\neq 4$ 时

情况 2.1 当 $f(v_0)=-1$ 时，$f\left(v_1^{(1)}\right),f\left(v_1^{(2)}\right),f\left(v_{n-1}^{(1)}\right),f\left(v_{n-1}^{(2)}\right)$ 中至少有一个标号为+2，剩余的只能标+1 (若有一个标−1，不妨设 $f\left(v_1^{(1)}\right)=-1$，则 $f\left[v_1^{(1)}\right]\le 0$，与定义 1 矛盾)，并且有 $f\left(v_2^{(2)}\right),f\left(v_{n-2}^{(1)}\right),f\left(v_{n-2}^{(2)}\right)\neq -1$。故，有 $f[v_0]\ge 4$。由注释以及定义 1，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)=f(V)&=\sum_{i=1}^{k-1}f\left[v_{3i}^{(1)}\right]+f\left(v_{3k-1}^{(1)}\right)+f[v_0]+\sum_{i=1}^{k-1}f\left[v_{3i+1}^{(2)}\right]+f\left(v_2^{(2)}\right)\\&\ge 2(k-1)+1+4+2(k-1)+1=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil\end{aligned}$$

情况 2.2 当 $f(v_0)=+1$ 时，由注释以及定义 1，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)=f(V)&=\sum_{i=1}^{k}f\left[v_{3i-1}^{(1)}\right]+f(v_0)+\sum_{i=1}^{k}f\left[v_{3i-1}^{(2)}\right]\\&\ge 2k+1+2k=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-1\end{aligned}$$

情况 2.3 当 $f(v_0)=+2$ 时，由注释以及定义 1，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)=f(V)&=\sum_{i=1}^{k-1}f\left[v_{3i-1}^{(1)}\right]+f\left[v_{3k-1}^{(1)}\right]+f(v_0)+\sum_{i=2}^{k-1}f\left[v_{3i-1}^{(2)}\right]+f\left[v_2^{(2)}\right]+f\left[v_{3k-1}^{(2)}\right]\\&\ge 2(k-1)+1+2+2(k-2)+1+1=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\end{aligned}$$

综上所述，有

$$\gamma_{SR}(G)\ge 2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\text{。}$$

另一方面，通过给出一个符号罗马控制函数 g_2 来证明上界。令

$$g_2(v_0)=+2\text{，}\quad g_2\left(v_i^{(1)}\right)=\begin{cases}-1,\text{当}i\equiv 2(\operatorname{mod}3),1\le i<n-2\text{或}i=n-1\\+2,\text{当}i\equiv 0(\operatorname{mod}3),3<i<n-1\text{或}i=1\\+1,\text{其他}\end{cases}$$

$$g_2\left(v_i^{(2)}\right)=\begin{cases}-1,\text{当}i\equiv 1(\operatorname{mod}3),1\le i<n-3\text{或}i=n-1\\+2,\text{当}i\equiv 2(\operatorname{mod}3),3<i<n-3\\+1,\text{其他}\end{cases}$$

容易验证，对于任意顶点 $v\in V$，有 $g_2[v]\ge 1$。从而图 G 中有

$$|V_2|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-4\text{，}\quad |V_1|=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+3\text{，}\quad |V_{-1}|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\text{，}$$

故，有

$$\gamma_{sR}(G)\le g_2(V)=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\text{。}$$

综上所述，有

$$\gamma_{sR}(G)=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-3\text{。}$$

情况 3 当 $n=3k+2$ 且 $n\neq 5$ 时，由注释，定义 1 以及引理 1，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)=f(V)&=\gamma_{SR}\left(C_n^{(1)}\right)+\sum_{i=1}^{k-1}f\left[v_{3i+2}^{(2)}\right]+f\left[v_2^{(2)}\right]+f\left(v_{3k+1}^{(2)}\right)\\&\geq\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil+2(k-1)+1-1=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-4\end{aligned}$$

另一方面，通过给出一个符号罗马控制函数 g_3 来证明上界。令

$$g_3(v_0)=+2\text{，}\quad g_3\left(v_i^{(1)}\right)=\begin{cases}-1,\text{当}i\equiv 2(\bmod 3),1\leq i<n-3\text{或}i=n-1\\+2,\text{当}i\equiv 0(\bmod 3),3<i<n-2\text{或}i=1\\+1,\text{其他}\end{cases}$$

$$g_3\left(v_i^{(2)}\right)=\begin{cases}-1,\text{当}i\equiv 1(\bmod 3),1\leq i<n\\+2,\text{当}i\equiv 2(\bmod 3),3<i<n-1\\+1,\text{其他}\end{cases}$$

容易验证，对于任意顶点 $v\in V$，有 $g_3[v]\geq 1$。从而图 G 中有

$$|V_2|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\text{，}\quad |V_1|=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1\text{，}\quad |V_{-1}|=2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\text{，}$$

故，有

$$\gamma_{sR}(G)\leq g_3(V)=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-4\text{。}$$

综上所述，有

$$\gamma_{sR}(G)=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-4\text{。}$$

定理证毕。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11701257)；校级教改项目(No. 2020xjgj016，No. 2019xjjj002)；河南省高校青年骨干教师培训计划(No. 2020GGJS194，No. 2019GGJS202)；洛阳师范学院青年骨干教师培训计划(2019XJGGJS-10) (2020-JSJYYB-053)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1977) Graph Theory with Applications. Macmillan, London.

[2] Dunbar, J.E., Hedetniemi, S.T., Henning, M.A. and Slater, P.J. (1995) Signed Domination in Graphs. *Combinatorics, Graph Theory, Applications*, 311-322.

[3] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] Henning, M.A. (2004) Signed Total Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 109-125. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.002

[5] Xu, B.G. (2009) On Signed Cycle Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 1007-1012.

https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.007

[6] Volkmann, L. (2016) On the Signed Total Roman Domination and Domatic Numbers of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **214**, 179-186. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.06.006

[7] Abdollahzadeh Ahangar, H., Amjadi, J., Sheikholeslami, S.M., Volkmann, L. and Zhao, Y. (2016) Signed Roman Edge Domination Numbers in Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **31**, 333-346. https://doi.org/10.1007/s10878-014-9747-8

[8] Asgharsharghi, L. and Sheikholeslami, S.M. (2017) Signed Total Roman Edge Domination in Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **37**, 1039-1053. https://doi.org/10.7151/dmgt.1984

[9] Abdollahzadeh Ahangar, H., Henning, M.A., Löwenstein, C., Zhao, Y.C. and Samodivkin, V. (2014) Signed Roman Domination in Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **27**, 241-255. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9500-0

[10] Zhao, Y.C. and Miao, L.Y. (2017) Signed Roman (Total) Domination Numbers of Complete Bipartite Graphs and Wheels. *Communications in Mathematical Research*, **33**, 318-326.

[11] 尹凯, 陈学刚. 完全多部图的符号罗马控制数[J]. 汕头大学学报, 2017, 31(4): 25-34.