Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 496-502
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114063

非线性薛定谔方程的差分格式

林学好

华南理工大学，广东 广州
Email: 1321300347@qq.com

收稿日期：2021年3月6日；录用日期：2021年4月8日；发布日期：2021年4月15日

摘　要

非线性薛定谔方程是目前最为活跃的研究课题之一，被广泛应用在生物医学、高能物理、量子力学以及非线性光学等很多领域，当我们想了解这些现象的原理时，就需要对非线性薛定谔方程的解进行研究。本文对一类非线性薛定谔方程的周差分格式进行了探究，对方程我们提出了一种非线性差分格式，证明了这个差分格式满足能量守恒定律和质量守恒定律，并且在这基础上验证了差分格式解的存在性问题。

关键词

非线性薛定谔方程，差分格式，守恒，存在

Difference Scheme of Nonlinear Schrödinger Equation

Xuehao Lin

South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 1321300347@qq.com

Received: Mar. 6th, 2021; accepted: Apr. 8th, 2021; published: Apr. 15th, 2021

Abstract

The nonlinear Schrödinger equation is one of the most active research topics at present, it is widely used in many fields such as biomedicine, high energy physics, quantum mechanics and nonlinear optics. When we want to understand the principles of these phenomena, it is necessary to study the solution of the nonlinear Schrödinger equation. This paper explores the week difference scheme of a class of nonlinear Schrödinger equation, we propose a nonlinear difference scheme for the equation, it is proved that this difference scheme satisfies the law of conservation of mass. And on this basis, the existence of the solution of the difference scheme is verified.

文章引用: 林学好. 非线性薛定谔方程的差分格式[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 496-502.
DOI: 10.12677/pm.2021.114063

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Difference Scheme, Conservation, Existence

1. 序言

本文结合前人的工作，对下列一类非线性导数项的薛定谔方程中的差分格式进行了探究

$$\begin{cases} i\partial_t v + \eta\partial_x^2 v + i\beta\partial_x^5 v + i\lambda\partial_x\left(\left|v^2\right|v\right) + \delta\left(\left|v^2\right|v\right) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [x_L, x_R], t \ge 0, \\ v(x,t) = v(x+L,t). \end{cases} \tag{1-1}$$

我们先提出一个差分格式，对差分格式的离散的能量和质量的守恒性进行了探究，我们再利用 Brouwer 不动点定理[1]探究了差分格式差分解的存在性问题。

2. 差分格式

2.1. 差分格式的构造

我们考虑下列这一类带非线性导数项的薛定谔方程的初边值问题进行探究

$$\begin{cases} i\partial_t v + \eta\partial_x^2 v + i\beta\partial_x^5 v + i\lambda\partial_x\left(\left|v^2\right|v\right) + \delta\left(\left|v^2\right|v\right) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [x_L, x_R], t \ge 0, \\ v(x,t) = v(x+L,t). \end{cases} \tag{2-1}$$

为了建立差分格式，首先对区域 $[x_L, x_R]\times[0,T]$ 作网格剖分，取空间步长 h，时间步长 τ，其中 $x_j = x_L + jh$，$j = 0,1,2,3,\cdots,J$，$J = x_R - x_L$，$t_n = n\tau$，$n = 0,1,2,3,\cdots,N$，$N = \frac{T}{\tau}$，本文采用以下的一些记号和约定[2]：

$$\left(v_j^n\right)_{\hat{x}} = \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}, \quad \left(v_j^n\right)_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{v_{j+2}^n - 2v_j^n + v_{j-2}^n}{4h^2}$$

$$\left(v_j^n\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = \frac{v_{j+5}^n - 5v_{j+3}^n + 5v_{j+1}^n - 5v_{j-1}^n + 5v_{j-3}^n - v_{j-5}^n}{32h^5}, \quad \left(v_j^n\right)_t = \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\tau}$$

$$\left(v_j^n\right)_{\hat{t}} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\tau}, \quad f\left(v_j^n\right) = \frac{1}{4}\left(\overline{v}_{j+1}^n v_j^n + v_{j+1}^n \overline{v}_j^n + \overline{v}_{j-1}^n v_j^n + v_{j-1}^n \overline{v}_j^n\right)$$

$$\left(v^n, w^n\right) = h\sum_{j=1}^{J} v_j^n \overline{w}_j^n$$

引理 2.1.1. [3]对于任意两个网格函数 $v, w \in Z_h^0$，我们有下列等式成立

$$\begin{cases} \left(v_{\hat{x}}, w\right) = -\left(v, w_{\hat{x}}\right), \ \left(v_{\hat{x}}, w_{\hat{x}}\right) = -\left(v, w_{\hat{x}\hat{x}}\right), \\ \left(v, w_{\hat{x}\hat{x}}\right) = -\left(v_{\hat{x}}, v_{\hat{x}}\right) = -\left\|v_{\hat{x}}\right\|^2, \\ \left(v, w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right) = -\left(v_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}, w\right), \ \left(v, v_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right) = 0. \end{cases}$$

引理 2.1.2. [4]对于任何网格函数 $V \in Z_h^0$ 有下面式子成立：

$\mathrm{Re}\left(\left(f\left(V\right)V\right)_{\hat{x}}, V\right) = 0.$

引理 2.1.3. [5] (Brouwer 不动点定理)设 H 是一个有限维的内积空间，映射 $f: H \to H$ 是连续的，那么存在 $\alpha > 0$，使得 $\left(f\left(x\right), x\right) > 0$ 对任何 $x \in H$ 都成立，并且 $\|x\| = \alpha$，那么一定存在 $x^* \in H$，使得 $f\left(x^*\right) = 0$ 并且 $\|x^*\| \le \alpha$。

对于非线性薛定谔方程(1-1)，首先可以假设 $v(x,0) \in H^1$，提出一种隐式的差分格式，具体内容如下：

首先：

$$V\left(x,0\right) = u\left(x,0\right) \tag{2-2}$$

其次：对于 $j = 0,\cdots,J$，我们可以找到 V_j^1 满足：

$$\begin{aligned} & i\left(V_j^1\right)_t + \frac{\eta}{2}\left(V_j^1 + V_j^0\right)_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{i\beta}{2}\left(V_j^1 + V_j^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} + \frac{i\lambda}{8}\left(f\left(V_j^1 + V_j^0\right)\left(V_j^1 + V_j^0\right)\right)_{\hat{x}} \\ & + \frac{\delta}{8} f\left(V_j^1 + V_j^0\right)\left(V_j^1 + V_j^0\right) = 0. \end{aligned} \tag{2-3}$$

最后：对于 $n = 1,\cdots,N-1$， $j = 0,\cdots,J$，我们可寻找到合适的 V_j^{n+1} 使其满足式子：

$$\begin{aligned} & i\left(V_j^n\right)_t + \frac{\eta}{2}\left(V_j^{n-1} + V_j^{n+1}\right)_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{i\beta}{2}\left(V_j^{n-1} + V_j^{n+1}\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} \\ & + \frac{i\lambda}{8}\left(f\left(V_j^{n+1} + V_j^{n-1}\right)\left(V_j^{n-1} + V_j^{n+1}\right)\right)_{\hat{x}} \\ & + \frac{\delta}{8} f\left(V_j^{n+1} + V_j^{n-1}\right)\left(V_j^{n-1} + V_j^{n+1}\right) = 0, \\ & V_{j+J}^n + V_j^n. \end{aligned} \tag{2-4}$$

2.2. 差分格式的守恒性质

定理 2.2.1. 差分格式(2-2)~(2-4)保持离散的能量守恒和质量守恒，即有：

$$\begin{aligned} & \left\|V_{\hat{x}}^1\right\|^2 - \frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J} hf\left(V_J^1 + V_J^0\right)\left|V_J^1\right|^2 + \left(\frac{\eta}{\beta} - \frac{\delta}{\lambda}\right)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} hV_J^1\left(\bar{V}_j^1\right)_{\hat{x}} \\ & = \left\|V_{\hat{x}}^0\right\|^2 - \frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J} hf\left(V_J^1 + V_J^0\right)\left|V_J^0\right|^2 + \left(\frac{\eta}{\beta} - \frac{\delta}{\lambda}\right)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J} hV_J^0\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}, \end{aligned} \tag{2-5}$$

对于 $n = 1,\cdots,N$：有：

$$\begin{aligned} & \left\|V_{\hat{x}}^{n+1}\right\|^2 - \frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J} hf\left(V_J^{n-1} + V_J^{n+1}\right)\left|V_J^{n+1}\right|^2 + \mathrm{Im}\left(\frac{\eta}{\beta} - \frac{\delta}{\lambda}\right)\sum_{j=1}^{J} hV_J^{n+1}\left(\bar{V}_j^{n+1}\right)_{\hat{x}} \\ & = \left\|V_{\hat{x}}^{n-1}\right\|^2 - \frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J} hf\left(V_J^{n-1} + V_J^{n+1}\right)\left|V_J^{n-1}\right|^2 + \mathrm{Im}\left(\frac{\eta}{\beta} - \frac{\delta}{\lambda}\right)\sum_{j=1}^{J} hV_J^{n-1}\left(\bar{V}_j^{n-1}\right)_{\hat{x}}. \end{aligned} \tag{2-6}$$

$$\left\|V^n\right\|^2 = \left\|V^{n-1}\right\|^2, \quad 0 \le n \le N. \tag{2-7}$$

其中 V 是差分格式(2-2)~(2-4)的差分解，$\|\cdot\|$ 是离散空间的 L^2 范数。

证明：首先我们先证差分格式离散的能量守恒，即证(2-5)式子和(2-6)式子，我们分为 $n = 0$ 和 $n = 1,2,\cdots,N-1$ 这两种情况来分别证明，再结合两个结果来得到离散的能量守恒律[6]，首先证 $n = 0$ 的情况，我们会运用到三个等式，我们先将差分方程(2-3)式代入到下面式子，我们由引理 2.1.1 和引理 2.1.2 有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{J} h\left(V_j^1\left(\bar{V}_j^1\right)_{\hat{x}}-V_j^0\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=\frac{1}{\tau}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{J} h\left(V_j^1\left(\bar{V}_j^1\right)_{\hat{x}}-V_j^1\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}+V_j^1\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}-V_j^0\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=\frac{1}{\tau}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{J} h\left(V_j^1\left(\bar{V}_j^1-\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}+\left(V_j^1-V_j^0\right)\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=-\frac{1}{\tau}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{J} h\left(\left(V_j^1\right)_{\hat{x}}\left(\bar{V}_j^1-\bar{V}_j^0\right)+\left(V_j^1-V_j^0\right)\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=-\operatorname{Im}\Bigg(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\frac{i\eta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}}-\frac{\beta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\\
&\qquad-\frac{\lambda}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}+\frac{i\delta}{8}f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\Bigg)\\
&=-\operatorname{Im}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}}-\frac{\lambda}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=\frac{\lambda}{8}\operatorname{Im}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}\right).
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

同理，我们将差分方程(2-3)代入到以下式子，同样由引理 2.1.1 和引理 2.1.2 有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left(\left\|V_{\hat{x}}^1\right\|^2-\left\|V_{\hat{x}}^0\right\|^2\right)\\
&=\frac{1}{\tau}\operatorname{Re}\left(V_{\hat{x}}^1+V_{\hat{x}}^0,V_{\hat{x}}^1-V_{\hat{x}}^0\right)\\
&=\operatorname{Re}\Bigg(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\frac{i\eta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}-\frac{\beta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\\
&\qquad-\frac{\lambda}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{i\delta}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}\Bigg)\\
&=\operatorname{Re}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},-\frac{\lambda}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}\hat{x}}+\frac{i\delta}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}\right)\\
&=\frac{\delta}{8}\operatorname{Im}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}\right)-\frac{\lambda}{8}\operatorname{Re}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}\hat{x}}\right)
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

接下来我们通过简单的类似代换，由引理 2.1.1 和引理 2.1.2 有下面等式成立：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{J} hf\left(V_j^1+V_j^0\right)\left(\left|V_j^1\right|^2-\left|V_j^0\right|^2\right)\\
&=\frac{1}{\tau}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{J} h\left(V_j^1+V_j^0\right)\left(\bar{V}_j^1-\bar{V}_j^0\right)\left(V_j^1+V_j^0\right)\\
&=\frac{1}{\tau}\operatorname{Re}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),V^1-V^0\right)\\
&=\operatorname{Re}\Bigg(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),\frac{i\eta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}}-\frac{\beta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\\
&\qquad-\frac{\lambda}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}}+\frac{i\delta}{8}f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\Bigg)\\
&=\operatorname{Re}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),\frac{i\eta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}}-\frac{\beta}{2}\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)\\
&=\frac{\eta}{2}\operatorname{Im}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}}\right)-\frac{\beta}{2}\operatorname{Re}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)\\
&=\frac{\eta}{2}\operatorname{Im}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}}\right)-\frac{\beta}{2}\operatorname{Re}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}},\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}}\right).
\end{aligned}
\tag{2-10}
$$

因此，结合式子(2-8)~(2-10)，经过简单的计算可以得到：

$$\begin{aligned}&\left\|V_{\hat{x}}^1\right\|^2-\frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hf\left(V_J^1+V_J^0\right)\left|V_J^1\right|^2+\left(\frac{\eta}{\beta}-\frac{\delta}{\lambda}\right)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hV_J^1\left(\bar{V}_j^1\right)_{\hat{x}}\\&=\left\|V_{\hat{x}}^0\right\|^2-\frac{\lambda}{4\beta}\sum_{j=1}^{J}hf\left(V_J^1+V_J^0\right)\left|V_J^0\right|^2+\left(\frac{\eta}{\beta}-\frac{\delta}{\lambda}\right)\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{J}hV_J^0\left(\bar{V}_j^0\right)_{\hat{x}},\end{aligned}\tag{2-11}$$

那么我们就证明了当 $n=0$ 时的有限差分格式差分解离散的能量守恒定律，同理我们通过类似的方法可以证明得到当 $n=1,2,\cdots,N-1$ 时有限差分格式差分解离散的能量守恒定律，即证到式(2-6)成立，这样我们就证明了有限差分格式差分解的能量守恒定律[7]。

现在我们再证差分格式差分解的离散的质量守恒定律，即证式(2-7)，

首先 $V(x,0)=v(x,0)$，即：$\left\|V_j^0\right\|=\left\|v\left(x_j,0\right)\right\|$。

其次，证 $\left\|V^1\right\|^2=\left\|V^0\right\|^2$，最后我们证明对于任何 $n=1,2,\cdots,N$ 有 $\left\|V^n\right\|^2=\left\|V^{n-1}\right\|^2$，那么我们就可以得到离散的质量守恒定律。因此我们先证明 $\left\|V^1\right\|^2=\left\|V^0\right\|^2$，先将差分格式(2-6)和 $h\left(\bar{V}_j^1+\bar{V}_j^0\right)$ 相乘且将式子关于 j 从 1 到 J 累加，可以得到：

$$\begin{aligned}&i\left(V_t^1,V^1+V^0\right)+\frac{\eta}{2}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}},V^1+V^0\right)\\&+\frac{i\beta}{2}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}},V^1+V^0\right)\\&+\frac{\delta}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),V^1+V^0\right)\\&+\frac{i\lambda}{8}\left(\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}},V_j^1+V_j^0\right)=0.\end{aligned}\tag{2-12}$$

现在对式(2-12)左右两边同时取虚部，那么：

$$\mathrm{Im}\,i\left(V_t^1,V^1+V^0\right)=\mathrm{Re}\left(V_t^1,V^1+V^0\right)=\frac{1}{\tau}\left(\left\|V^1\right\|^2-\left\|V^0\right\|^2\right).\tag{2-13}$$

$$\mathrm{Im}\frac{\eta}{2}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}},V^1+V^0\right)=-\frac{\eta}{2}\mathrm{Im}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}},\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}}\right)=0\tag{2-14}$$

由引理 2.1.1 和引理 2.1.2 我们可得：

$$\mathrm{Im}\frac{i\beta}{2}\left(\left(V^1+V^0\right)_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}},V^1+V^0\right)=0.\tag{2-15}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\frac{i\lambda}{8}\left(\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}},V_j^1+V_j^0\right)\\&=\frac{\lambda}{8}\mathrm{Re}\left(\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right)\right)_{\hat{x}},V_j^1+V_j^0\right)\\&=0.\end{aligned}\tag{2-16}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\frac{\delta}{8}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),V^1+V^0\right)\\&=\frac{\delta}{8}\mathrm{Im}\left(f\left(V^1+V^0\right)\left(V^1+V^0\right),V^1+V^0\right)\\&=0.\end{aligned}\tag{2-17}$$

因而综合式(2-13)~(2-17)，即可得到：$\left\|V^1\right\|^2=\left\|V^0\right\|^2$。接下来我们证明对于任何 $n=1,2,\cdots,N$ 有

$\|V^n\|^2=\|V^{n-1}\|^2$，我们将差分格式(2-7)和 $h\left(\bar{V}_j^{n+1}+\bar{V}_j^{n-1}\right)$ 相乘且将式子关于 j 从 1 到 J 累加，与证明 $\|V^1\|^2=\|V^0\|^2$ 一样，同理可以得到：

$$\|V^n\|^2=\|V^{n-1}\|^2, n=1,2,\cdots,N \tag{2-18}$$

由：$\|V^1\|^2=\|V^0\|^2$ 和 $\|V^n\|^2=\|V^{n-1}\|^2, n=1,2,\cdots,N$ 我们可以得到：

$$\|V^n\|^2=\|V^{n-1}\|^2, n=1,2,\cdots,N \tag{2-19}$$

那么我们得到了差分格式差分解的离散的质量守恒定律。因而我们得到了差分格式差分解的离散的质量守恒定律和能量守恒定律[8]。

2.3. 差分格式解的存在性

定理 2.3.1. 一定存在离散函数 $V^n\in Z_h^0$ 满足有限的差分格式(2-5)~(2-7)。

证明：证明了定理 2.3.1，即可得到差分格式的差分解是存在的，首先我们可以先证明存在离散函数 $V^1\in Z_h^0$ 是满足差分格式(2-5)，我们先定义 Z_h^0 上的算子 f:

$$f(w)=2\left(w-V^0\right)-i\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}}+\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\tau\lambda\left(|w'|^2 w\right)_{\hat{x}}-i\tau\delta|w'|^2 w \tag{2-20}$$

显而易见 $f(w)$ 是连续的，此时我们将式(2-20)和 w 做内积并且取实部，可以得到：

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f(w),w)=&\operatorname{Re}\left(2\left(w-V^0\right),w\right)-\operatorname{Re}\left(\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}},w\right)+\operatorname{Re}\left(\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)\\&+\operatorname{Re}\left(\tau\lambda\left(|w'|^2 w\right)_{\hat{x}},w\right)-\operatorname{Re}\left(i\tau\delta|w'|^2 w\right),\end{aligned} \tag{2-21}$$

此时同样由引理 2.1.1 和引理 2.1.2，可以得到：

$$-\operatorname{Re}\left(\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}},w\right)+\operatorname{Re}\left(\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)+\operatorname{Re}\left(\tau\lambda\left(|w'|^2 w\right)_{\hat{x}},w\right)-\operatorname{Re}\left(i\tau\delta|w'|^2 w\right)=0. \tag{2-22}$$

那么可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f(w),w)&=\operatorname{Re}\left(2\left(w-V^0\right),w\right)\\&=2\|w\|^2-2\operatorname{Re}\left(V^0,w\right)\\&\geq 2\|w\|^2-\left(\|w\|^2+\|V^0\|^2\right)\end{aligned} \tag{2-23}$$

所以对于任意大于 0 的常数 ε，当 $\|w\|^2-\|V^0\|^2=\varepsilon$ 时，对于任意 w 都有 $\operatorname{Re}(f(w),w)>0$ 成立。我们由引理 2.1.3 可知一定存在 w^*，使 $f(w^*)=0$ 成立。此时取 $V^1=2w^*-V^0$，由 $f(w^*)=0$ 容易得到存在 $V^1\in Z_h^0$ 满足式(2-5)。我们运用数学归纳法来证明定理 2.3.1，因而此时我们假设 $V^1,V^2,V^3,\cdots,V^n\in Z_h^0$ 满足差分格式(2-6)，现在需要证明 $V^{n+1}\in Z_h^0$ 满足式(2-6)，同样我们先定义 Z_h^0 上的一个算子：

$$f(w)=\left(w-V^{n-1}\right)-i\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}}+\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}+\left(\tau\lambda\left(|w'|^2 w\right)_{\hat{x}}\right)-i\tau\delta|w'|^2 w \tag{2-24}$$

此时将式(2-24)和 w 做内积并且取实部得到：

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f(w),w)=&\operatorname{Re}\left(\left(w-V^{n-1}\right),w\right)-\operatorname{Re}\left(\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}},w\right)+\operatorname{Re}\left(\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)\\&+\operatorname{Re}\left(\tau\lambda\left(|w'|^2 w\right)_{\hat{x}},w\right)-\operatorname{Re}\left(i\tau\delta|w'|^2 w\right)\end{aligned} \tag{2-25}$$

显而易见 $f(w)$ 是连续的，由引理 2.1.1 和引理 2.1.2，可以得到：

$$-\mathrm{Re}\left(\tau\eta w_{\hat{x}\hat{x}}, w\right)+\mathrm{Re}\left(\tau\beta w_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}\right)+\mathrm{Re}\left(\tau\lambda\left(\left|w'\right|^2 w\right)_{\hat{x}}, w\right)-\mathrm{Re}\left(i\tau\delta\left|w'\right|^2 w\right)=0. \tag{2-26}$$

那么可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(f(w), w\right) &= \mathrm{Re}\left(\left(w-V^{n-1}\right), w\right) \\ &= \|w\|^2-\mathrm{Re}\left(V^{n-1}, w\right) \\ &\geq \|w\|^2-\frac{1}{2}\left(\|w\|^2+\left\|V^{n-1}\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{2-27}$$

所以对于任意大于 0 的常数 ε，$\|w\|^2-\left\|V^{n-1}\right\|^2=\varepsilon$ 时，对于任意 w 都有 $\mathrm{Re}\left(f(w), w\right)>0$ 成立。我们由引理 2.1.3 可知一定存在 w^*，使 $f\left(w^*\right)=0$ 成立。此时取 $V^{n+1}=2w^*-V^{n-1}$，由 $f\left(w^*\right)=0$ 容易得到存在 $V^{n+1}\in Z_h^0$ 满足式(2-6)，因而终上所述可得一定存在离散函数 $V^n\in Z_h^0$ 满足差分格式(2-5)~(2-7)。

参考文献

[1] 郭柏灵, 谭绍滨. Hirota 型非线性发展方程的整体光滑解[J]. 中国科学: A 辑, 1992(8): 804-811.

[2] Zhou, Y.L. (1990) Applications of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Method. International Academic Publishers, Beijing and Oxford and New York.

[3] Hasegwa, A. and Tappert, F. (1973) Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. *Applied Physics Letters*, **23**, 142-144. https://doi.org/10.1063/1.1654836

[4] Tourigny, Y. (1994) Some Pointwise Estimates for the Finite Element Solution of a Radial Nonlinear Schrödinger Equation on a Class of Nonuniform Grids. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **10**, 757-769. https://doi.org/10.1002/num.1690100609

[5] Browder, F.E. (1965) Existence and Uniqueness Theorems for Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **17**, 24-49. https://doi.org/10.1090/psapm/017/0197933

[6] Corinne, L. (1997) The Cauchy Problem for a Third Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Nonlinear Analysis*, **29**, 121-158. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00081-8

[7] 霍朝辉. 某些色散波方程的适定性问题[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国工程物理研究院, 2004.

[8] Xie, S.S., Li, G.X. and Yi, S. (2009) Compact Finite Difference Schemes with High Accuracy for One-Dimensional Onlinear Schrödinger Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**, 1052-1060. https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.011