Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 477-484
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114061

关于某些连续函数的分数阶微积分的分形维数估计

王含西

纽约大学文理学院，美国 纽约
Email: hw1687@nyu.edu

收稿日期：2021 年 3 月 6 日；录用日期：2021 年 4 月 8 日；发布日期：2021 年 4 月 15 日

摘 要

在本文中，我们对分形函数的定义进行了初步的研究，接着讨论了分形函数分数阶微积分的分形维数估计。我们使用新方法进行的估计表明分形函数的分形维数和分数阶微积分的阶之间存在一定关系。如果分形函数满足 **Hölder** 条件，则这种分形函数的 **Riemann-Liouville** 分数阶积分的上 **Box** 维数小于这些分形函数的上 **Box** 维数。这就意味着一个重要的结论：分形函数的 **Riemann-Liouville** 分数阶微积分的上 **Box** 维数不会增加。

关键词

分形函数，**Riemann-Liouville** 分数阶微积分，分形维数

A Remark on Fractal Dimension Estimation of Fractional Calculus of Certain Continuous Functions

Hanxi Wang

College of Arts and Science, New York University, New York USA
Email: hw1687@nyu.edu

Received: Mar. 6^{th}, 2021; accepted: Apr. 8^{th}, 2021; published: Apr. 15^{th}, 2021

文章引用: 王含西. 关于某些连续函数的分数阶微积分的分形维数估计 [J]. 理论数学, 2021, 11(4): 477-484.
DOI: 10.12677/pm.2021.114061

Abstract

In the present paper, we make research on the definition of fractal functions elementary. Then we discuss the fractal dimensions of fractional calculus of fractal functions. The estimation using a new method shows certain relationship between the fractal dimensions of fractal functions and orders of fractional calculus. If the fractal function satisfies the Hölder condition, the upper Box dimension of the Riemann-Liouville fractional integral of such fractal functions has been proved to be less than the upper Box dimension of those fractal functions. This means an important conclusion that the upper Box dimension of the Riemann-Liouville fractional integral of such fractal functions will not increase.

Keywords

The Fractal Function, The Riemann-Liouville Fractional Calculus, The Fractal Dimension

1. 引言

对于经典微积分来说，连续函数的 Riemann 积分一般比函数本身更光滑。所以我们感兴趣的是，同样的结果是否对于分数阶微积分也成立。

许多学者们已经注意到分形函数的分数阶微积分的分形维数估计。这些研究具有十分重要的意义，其中最早的研究可能属于 Tatom 的论文 [1]。他讨论了 Koch 曲线的 Box 维数与 Grünwald 极限的阶之间的关系。虽然 Tatom 没有给出这种关系的证明，但是他展示了相关的图表和数值结果。Tatom 在他的论文中猜想分形曲线的分形维数与 Grünwald 极限的阶之间可能存在线性关系。Zähle 讨论了 Weierstrass 函数和它们的 Weyl-Marchaud 分数阶导数 [2, 3]。他认为如果 Weierstrass 函数的 Weyl-Marchaud 分数阶导数存在，在一定条件下对应关系应该是线性的。其它结果可参见 [4–6]。

姚奎讨论了 Weierstrass 函数的 Box 维数与 Riemann-Liouville 分数阶微积分阶之间的联

系 [7–9]。他证明了相应线性关系的结论是正确的。阮火军证明了线性分形插值函数的 Box 维数与 Riemann-Liouville 分数阶积分的阶之间的线性关系 [10]。周颂平讨论了 Besicovitch 函数的分形维数与 Riemann-Liouville 分数阶微积分的阶之间的关系 [11]。

梁永顺研究了分形函数 (Weierstrass 函数和 Besicovitch 函数) 的 Weyl-Marchaud 分数阶导数 [12–14]。他还证明了闭区间上有界变差连续函数的 Riemann-Liouville 分数阶积分仍然是有界变差的 [15]。其它相关工作，可以参见 [16–18]。分形曲线的相应结论 (Koch 曲线) 可以参见 [19]。

本文主要目的是探索分形函数的分形维数与分数阶微积分阶之间的关系。我们的目标是证明：满足一定条件分形函数的 Riemann-Liouville 分数阶积分的分形维数不会增加。

在本文中, 令 I 为单位区间 $[0,1]$。$\Gamma(f,I)$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 I 上的图像，这也可以表示为

$$\Gamma(f,I)=\{(t,f(t)):t\in I\}.$$

令 C 表示一个正常数，并且在同一行中，在不同的位置也可能具有不同的值。本文讨论的函数都是连续的，并在 I 上有定义。我们将它们写为 C_I。

2. 分形函数

本文主要使用的分形维数是上、下 Box 维数。其定义如下

定义 2.1 [20]. *令 F 为 $\mathbb{R}^2$ 的任何非空有界子集，而 $N_\delta(F)$ 为覆盖 F 的最小直径为 δ 的最大个数。上、下 Box 维数分别定义为*

$$\underline{\dim}_B(F)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.1}$$

和

$$\overline{\dim}_B(F)=\overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}. \tag{2.2}$$

如果 (2.1) 和 (2.2) 相等, 我们将这个值称为 F 的 Box 维数

$$\dim_B(F)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}. \tag{2.3}$$

Riemann-Liouville 分数阶微积分定义如下

定义 2.2 [6,21]. *令 $f(t)\in C_I$, $v>0$，令 $D^{-v}f(0)=0$, 并且对于 $t\in(0,1]$, 我们称*

$$D^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(x)dx \tag{2.4}$$

为 $f(t)$ 的 v 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分。对于 $u>0$, 令 $D^u f(0)=0$。对于 $t\in(0,1]$, 我们

称

$$D^u f(t) = D(D^{u-1} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-u)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-x)^{-u} f(x) dx \tag{2.5}$$

为 $f(t)$ 的 u 阶 *Riemann-Liouville* 分数阶微分。

然后我们给出奇异分形函数的定义

定义 2.3. 令 $f(t) \in C_I$, 如果 $\Gamma(f, I)$ 的变差是无限的，我们将 $f(t)$ 称为 I 上的奇异函数。

定义 2.4. 设 $f(t)$ 为区间 I 上的连续函数。若对于 I 的任何子区间 $J = [a, b]$（$a < b$), $\Gamma(f, J)$ 的长度为无穷，我们将 $f(t)$ 称为 I 上的分形函数。如果存在 I 上的子区间 $J = [a, b]$（$a < b$）使得 $\Gamma(f, J)$ 的长度是有限的，我们将 $f(t)$ 称为 I 上的局部分形函数。

我们现在给出正则和非正则分形函数的定义。

定义 2.5. 令 $f(t)$ 为 I 上的分形函数。

(1) 如果 $f(t)$ 的 *Box* 维数不存在，$f(t)$ 为奇异分形函数。

(2) 令

$$\dim_B \Gamma(f, I) = s, \quad (1 \le s \le 2)$$

与 $J = [a, b](a < b)$ 为 I 上的任意子区间，如果

$$\dim_B \Gamma(f, J) = s,$$

我们称 $f(x)$ 为正则分形函数。

(3) 令

$$\dim_B \Gamma(f, I) = s, \quad (1 \le s \le 2).$$

如果 I 上存在一子区间 $J = [a, b](a < b)$，并且 $\Gamma(f, J)$ 的 *Box* 维数不存在或者

$$\dim_B \Gamma(f, J) < s,$$

我们称 $f(x)$ 为非正则分形函数。

在下一节中，我们将讨论满足如下 Hölder 条件的某些分形函数。

引理 2.6 [20]. 令 $f(t) \in C_I$ 与 $0 < \alpha < 1$. 如果

$$|f(t) - f(u)| \le C|t - u|^\alpha, \quad \forall t, u \in I,$$

那么

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f, I) \le 2 - \alpha.$$

3. 分形函数的 Riemann-Liouville 分数阶积分

在本节中，我们将给出分形函数的 Riemann-Liouville 分数阶积分的上 Box 维数估计。如果分形函数满足 Hölder 条件，则这些函数的 Riemann-Liouville 积分的分形维数不会随分形函数本身的分形维数而增加。

我们先给出如下的定理

定理 3.1. 如果 $f(t) \in C_I$, 如下所定义的 $D^{-v}f(t)$

$$D^{-v}f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-x)^{v-1}f(x)dx \tag{3.1}$$

的上 Box 维数不大于 $2-v$.

证明. 如果 $t, t+h \in I$,

$$|D^{-v}f(t+h) - D^{-v}f(t)| = \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t+h}(t+h-x)^{v-1}f(x)dx - \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-x)^{v-1}f(x)dx\right| := I_1.$$

$$\begin{aligned}
I_1 =& \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t+h}[(t+h-x)^{v-1}-(t-x)^{v-1}]f(x)dx\right| + \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_t^{t+h}(t+h-x)^{v-1}f(x)dx\right| \\
\le& C\left|\int_0^{t+h}[(t+h-x)^{v-1}-(t-x)^{v-1}]dx\right| + C\left|\int_t^{t+h}(t+h-x)^{v-1}dx\right| \\
\le& Ch^v.
\end{aligned}$$

根据引理 2.6, 我们能够得出

$$\overline{\dim}_B\Gamma(D^{-v}f, I) \le 2-v.$$

□

如果分形函数满足 Hölder 条件，我们能够得到以下定理

定理 3.2. 令 $f(t) \in \mathrm{C}_I$, $0 < \alpha \le 1/2$, 并且

$$|f(t)-f(u)| \le C|t-u|^\alpha, \quad \forall t, u \in I.$$

$D^{-v}f(t)$ 的上 Box 维数不超过 $2-\alpha$.

证明. 根据引理 2.6, 可以得到

$$\overline{\dim}_B\Gamma(f, I) \le 2-\alpha, \quad 0 < v < 1.$$

令 $t, t+h \in \mathrm{I}$. 可得

$$|D^{-v}f(t+h) - D^{-v}f(t)| = \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t+h}(t+h-x)^{v-1}f(x)dx - \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t}(t-x)^{v-1}f(x)dx\right| := I_2.$$

运用变量替换，

$$\begin{aligned}
I_2 =& \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t+h}(t+h-x)^{v-1}\left[f(x) - \left(\frac{t}{t+h}\right)^v f\left(\frac{t}{t+h}x\right)\right]dx\right| \\
=& \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^{t+h}(t+h-x)^{v-1}\left(\frac{t}{t+h}\right)^v\left[\left(\frac{t+h}{t}\right)^v f(x) - f\left(\frac{t}{t+h}x\right)\right]dx\right| \\
=& \left|\frac{1}{\Gamma(v)}\left(\int_h^{t+h} + \int_0^h\right)(t+h-x)^{v-1}\left(\frac{t}{t+h}\right)^v\left[\left(\frac{t+h}{t}\right)^v f(x) - f\left(\frac{t}{t+h}x\right)\right]dx\right| \\
\leq& Ch^\alpha + C\left|\int_h^{t+h}(t+h-x)^{v-1}\left(\frac{t}{t+h}\right)^v\left[\left(\frac{t+h}{t}\right)^v f(x) f\left(\frac{t}{t+h}x\right)\right]dx\right|.
\end{aligned}$$

令

$$g(h) = \left(\frac{t+h}{t}\right)^v.$$

存在 $\xi \in \mathrm{I}$ 满足

$$g(h) = 1 + vh + v(v-1)h^2/2 + \frac{v(v-1)(v-2)(1+\xi/t)^{v-3}h^3}{6}.$$

因为 $0 < \alpha \leq 1/2$,

$$I_2 \leq Ch^\alpha + C\left|\int_0^{t+h}(t+h-x)^{v-1}\left(\frac{t}{t+h}\right)^v\left(\frac{hx}{t+h}\right)^\alpha dx\right|.$$

令 $y = \frac{x}{t+h}$. 所以 I_2 不超过

$$Ch^\alpha + Ch^\alpha\int_0^1(1-y)^{v-1}y\,dy.$$

这说明

$$I_2 \leq Ch^\alpha.$$

根据引理 2.6，

$$\overline{\dim}_B\Gamma(D^{-v}f, I) \leq 2-\alpha.$$

□

注记 3.3. 定理 3.2 表明 $D^{-v}f(t)$ 的上 Box 维数不再存在比 $2-\alpha$ 更大的。这说明 Riemann-Liouville 分数阶积分不会增加分形函数的分形维数。

4. 结论

本文中，我们给出了关于分形函数的基本定义。我们还得出结论，分形函数的分形维数与分数阶微积分之间存在一定关系。具体而言，此类分形函数的 Riemann-Liouville 分数阶积分的上 Box 维数不会增加。

基金项目

感谢国家自然科学基金 (资助号 12071218) 的支持。

参考文献

[1] Tatom, F.B. (1995) The Relationship between Fractional Calculus and Fractals. *Fractals*, **3**, 217-229. https://doi.org/10.1142/S0218348X95000175

[2] Zähle, M. and Ziezold, H. (1996) Fractional Derivatives of Weierstrass-Type Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **76**, 265-275. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(96)00110-0

[3] Zähle, M. (1997) Fractional Differentiation in the Self-Affine Case. V—The Local Degree of Differentiability. *Mathematische Nachrichten*, **185**, 297-306. https://doi.org/10.1002/mana.3211850117

[4] Kolwankar, K.M. and Gangal, A.D. (1996) Fractional Differentiability of Nowhere Differentiable Functions and Dimensions. *Chaos*, **6**, 505-513. https://doi.org/10.1063/1.166197

[5] Kolwankar, K.M. and Gangal, A.D. (1998) Local Fractional Derivatives and Fractal Functions of Several Variables. *Physics*.

[6] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley Sons Inc., New York.

[7] 姚奎, 苏维宜, 周颂平. 关于一类 Weierstrass 函数的分数阶微积分函数 [J]. 数学年刊, 2004, 25(6): 711-716.

[8] Yao, K., Su, W.Y. and Zhou, S.P. (2005) On the Connection between the Order of the Fractional Calculus and the Dimension of a Fractal Function. *Chaos, Solitons and Fractals*, **23**, 621-629. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.05.037

[9] Yao, K., Su, W.Y. and Zhou, S.P. (2006) On the Fractional Derivatives of a Fractal Function. *Acta Mathematica Sinica*, **22**, 719-722. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0644-z

[10] Ruan, H.J., Su, W.Y. and Yao, K. (2009) Box Dimension and Fractional Integral of linear Fractal Interpolation Functions. *Journal of Approximation Theory*, **161**, 187-197. https://doi.org/10.1016/j.jat.2008.08.012

[11] Zhou, S.P., He, G.L. and Xie, T.F. (2004) On a Class of Fractals: The Constructive Structure. *Chaos, Solitons and Fractals*, **19**, 1099-1104. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00282-0

[12] Liang, Y.S. and Su, W.Y. (2007) The Relationship between the Fractal Dimensions of a Type of Fractal Functions and the Order of Their Fractional Calculus. *Chaos, Solitons and Fractals*, **34**, 682-692. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.01.124

[13] Liang, Y.S. (2007) Connection between the Order of Fractional Calculus and Fractal Dimensions of a Type of Fractal Functions. *Analysis Theory and Its Application*, **23**, 354-363. https://doi.org/10.1007/s10496-007-0354-8

[14] Liang, Y.S. (2008) The Relationship between the Box Dimension of the Besicovitch Functions and the Orders of Their Fractional Calculus. *Applied Mathematics and Computation*, **200**, 297-307. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.014

[15] Liang, Y.S. (2010) Box Dimensions of Riemann-Liouville Fractional Integrals of Continuous Functions of Bounded Variation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **72**, 4304-4306. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.007

[16] Liang, Y.S., Yao, K. and Xiao, W. (2008) The Fractal Dimensions of Graphs of the Weierstrass Function with the Weyl-Marchaud Fractional Derivative. *Journal of Physics: Conference Series*, **96**, Article ID: 012111. https://doi.org/10.1088/1742-6596/96/1/012111

[17] Yao, K., Liang, Y.S. and Fang, J.X. (2008) The Fractal Dimensions of Graphs of the Weyl-Marchaud Fractional Derivative of the Weierstrass-Type Function. *Chaos, Solitons and Fractals*, **35**, 106-115. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.04.017

[18] Yao, K., Liang, Y.S. and Zhang, F. (2009) On the Connection between the Order of the Fractional Derivative and the Hausdorff Dimension of a Fractal Function. *Chaos, Solitons and Fractals*, **41**, 2538-2545. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.053

[19] 梁永顺, 苏维宜. Koch 曲线及其分数阶微积分 [J]. 数学学报, 2011, 54(2): 227-240.

[20] Falconer, K.J. (1990) Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley Sons Inc., New York.

[21] Oldham, K.B. and Spanier, J. (1974) The Fractional Calculus. Academic Press, New York.