Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 663-668
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114080

泰勒公式的结构分析与应用

崔国忠，王耀革，郭从洲

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: cuigzh1966@163.com

收稿日期：2021年3月20日；录用日期：2021年4月22日；发布日期：2021年4月30日

摘 要

泰勒中值定理是用微分理论研究函数性质的一个重要工具，也是一个教学难点。通过对泰勒中值定理结构的分析，揭示掌握泰勒公式的核心思想是对特殊点的信息挖掘，为学生掌握泰勒公式及其应用提供帮助。

关键词

泰勒公式，结构分析，特殊点，信息挖掘，应用

Structure Analysis and Application of Taylor Expansion Theorem

Guozhong Cui, Yaoge Wang, Congzhou Guo

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: cuigzh1966@163.com

Received: Mar. 20th, 2021; accepted: Apr. 22nd, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

Taylor expansion theorem is an important tool to study the properties of functions with differential theory, and it is also a teaching difficulty. Through the analysis of the structure of Taylor expansion theorem, it is revealed that the core idea of mastering Taylor expansion formula is information mining of special points, which provides help for students to master Taylor expansion formula and its application.

Keywords

Taylor Expansion Theorem, Structural Analysis, Special Points, Information Mining, Application

文章引用: 崔国忠, 王耀革, 郭从洲. 泰勒公式的结构分析与应用[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 663-668.
DOI: 10.12677/pm.2021.114080

1. 引言

泰勒(Taylor)中值定理建立了自变量增量、函数值增量与函数高阶导数之间的关系，是微分理论研究函数的复杂分析性质的一个重要工具，在微分学中占有十分重要的地位。通过对泰勒中值定理进行结构分析和解读，开拓学生思路，为掌握泰勒公式及其应用提供帮助。

2. 泰勒中值定理及其结构分析

定理 1 [1]如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{*}$$

其中 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$。

(*)式中 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，

称为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒多项式；$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒展开式的 Peano 型余项。故(*)式也称为 $f(x)$ 在 x_0 点的带 Peano 型余项的泰勒公式。

结构分析 1) 从定理的条件和结论看，(*)式中余项 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ 为无穷小量结构，即用泰勒多项式近似表达函数时，误差是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小，因此 x 距离 x_0 越近，精度越高，因此，(*)式一般是在 $x\to x_0$ 条件下才使用，也称(*)式为局部展开式；2) 正是由于在 $x\to x_0$ 条件下才使用，(*)式主要用于极限计算；3) (*)式表明，任何满足条件的函数都可以展开成以泰勒多项式为主体结构的形式，而多项式结构是最简单的函数结构，因此，函数的泰勒展开不仅实现了化繁为简，而且，还可以借助多项式实现不同函数的形式统一，建立各种不同函数的联系，体现了定理的形式统一的应用思想；4) (*)式的结构还有一个特点，含有同一个点处的各阶导数的信息，这为定理的使用提供了线索，即题目条件中如果给出了同一个点处的信息，应该考虑使用泰勒公式。

定理 2 [1]如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶的导数，那么对任一 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{**}$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ($\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$\theta\in(0,1)$)称为拉格朗日余项，(**)式也称为 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的泰勒公式。

结构分析 1) 从定理的条件和结论看，(**)式中余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，对所有的 $x\in U(x_0)$ 成立，不要求在 $x\to x_0$ 这一条件，因此，(**)式也称为 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上的整体泰勒公式；2) 正因如此，此定理常用于研究 $f(x)$ 在整个区间上的性质；3) 由于公式中涉及到函数的各阶导数，因此，公式也建立了函数及其各阶导数间的联系，这种联系为函数中间导数的估计(利用函数及其高阶导数估计中间阶数的导数)提供了研究工具；4) 在拉格朗日余项中，由于涉及到介值点 ξ，因此，(**)式也视为中值定理的

推广或一般形式，可用于处理涉及高阶导函数的介值问题。

3. 泰勒公式的应用分析

3.1. 极限计算

(*)式的典型应用是用于求解由不同函数经过复合和四则运算形成的复杂函数的极限问题，这类极限利用泰勒公式，将不同的函数统一化成多项式的形式，实现了不同函数的形式统一，进而使极限的求解成为可能。

例 1 [2]计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$.

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构属于型极限问题，且涉及三类基本初等函数——幂函数、三角函数和指数函数，需要进行形式统一的同类化处理；类比已知：泰勒公式可以将各种结构的函数展开为多项式，达到各种不同结构的形式统一，因此，可以利用泰勒公式计算极限．具体方法设计：应用泰勒公式时，重点是展开到几阶导数，体现在题目中，是展开到x的几次幂，可以通过不同因子间的类比确定参照标准。本题，分母的幂因子最简单，又由于 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$，因此分母 $x^3\sin x$ 等价于 x^4，根据形式统一原则，分子中的两个因子只需展到 x^4 的Peano型余项即可。

解 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)$，得 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)$，又有 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)$，得 $\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=-\dfrac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4}=-\dfrac{1}{12}$.

抽象总结 应用泰勒公式求极限时的重点是展开到 x 的几次幂，必须在题目结构中寻找并确定对比标准，确定展开到第几项。

3.2. 中间导数估计

(**)式的典型应用是用于函数的中间导数估计，这种估计理论在现代分析学理论中具有非常重要的作用。下面，通过例子说明中间导数估计。

例 2 [3]已知函数 $f(x)(x\in R)$ 三阶可导，且存在 $M_0>0, M_1>0,$ 使得 $\left|f(x)\right|\le M_0$，$\left|f'''(x)\right|\le M_1$，证明：$f'(x), f''(x)$ 也有界。

结构分析 题型结构：若将函数本身视为函数的零阶导数，题目的条件是已知函数的零阶导数和三阶导数的界，估计一阶导数和二阶导数的界，这类题型称为中间导数的估计；思路确立：中间导数估计是泰勒公式作用的典型特征，因此，确定使用泰勒公式进行证明；方法设计：利用泰勒公式，需要解决的首要问题是展开点的选择，由于需要对任意点的导数进行估计，因此，必须选择任意点为展开点；难点是在估计一阶导数时，需要甩掉二阶导数的影响，估计二阶导数时，需要甩掉一阶导数的影响，必须通过选取关联点建立联系，达到消去的目的，可以通过下面的证明过程进行强化理解。

证明 将函数在任意点 t 处展开，则

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-t)^3,$$

其中 ξ 在 t 和 x 之间。

(先估计 $f'(t)$，此时，必须消去 $f''(t)$ 的影响，可以通过选取适当的、相互关联的 x，得到两个不同的展开式，也可视为关于 $f'(t)$、$f''(t)$ 的方程组，通过求解方程组达到目的)。

对任意的实数 a，分别取 $x=t\pm a$，则

$$f(t+a)=f(t)+af'(t)+\frac{1}{2}f''(t)a^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)a^3,$$

$$f(t-a)=f(t)-af'(t)+\frac{1}{2}f''(t)a^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)a^3,$$

(从上述两个表达式中可以看出，在估计某个中间导数时，如何消去另一个中间导数的影响)。将两式相减得

$$2af'(t)=f(t+a)-f(t)(t-a)+\frac{a^3}{3!}\left[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)\right],$$

因而，$|f'(t)|\le\frac{M_0}{|a|}+\frac{1}{6}a^2M_1$。

任取 a，如取 $a=1$，可得 $|f'(t)|\le M_0+\frac{1}{6}M_1$，因而，一阶导数的有界。

还可以选择适当的 a，得到最佳的界。事实上，设 $h(t)=\frac{M_0}{t}+\frac{1}{6}M_1t^2$，可以计算它在 $t=\left(\frac{3M_0}{M_1}\right)^{\frac{1}{3}}$ 处达到最小值，因而，还有 $|f'(t)|\le\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}(M_0)^{\frac{2}{3}}(M_1)^{\frac{1}{3}}$，这是该方法下最好的界。

类似，将两式相加，得

$$a^2f''(t)=f(t+a)+f(t-a)-2f(t)+\frac{a^3}{3!}\left[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)\right],$$

因而，$|f''(t)|\le\frac{4M_0}{a^2}+\frac{1}{6}aM_1$。

取 $a=1$ 即得 $|f''(t)|\le 4M_0+\frac{1}{6}M_1$。

同样，可以得到更好的界为 $|f'(t)|\le\frac{4}{3}(M_0)^{\frac{1}{3}}(M_1)^{\frac{2}{3}}$。

3.3. 高阶导数中值估计

在(**)式中，余项中含有高阶导数的中值项 $f^{(n+1)}(\xi)$，因此，通常可以利用(**)式进行高阶导数中值估计。

例 3 设函数 $f(x)$ 在[0,1]二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\min_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$。

结构分析 题型为高阶导数的中值估计；类比已知，涉及中值点问题的已知理论有微分中值定理和泰勒公式，微分中值定理只涉及一阶导数的中值问题，当然，可以多次利用微分中值定理或对低阶导函数利用微分中值定理得到高阶导函数的中值信息，这是一个研究思路；更直接的思路是利用泰勒公式直接得到高阶导函数的中值信息；因此，本题的研究思路是利用泰勒公式证明；方法设计：首先解决展开点的确定问题，类比题目条件结构，由于不涉及一阶导数的信息，这是确定展开点的重要线索，即选择展开点使得此点的一阶导数值为 0，这是一类特殊点，需要在特殊点中选择，如区间端点以及题目中含有特殊信息的点，如极值点；由于中值点即和展开点有关，也和自变量的位置有关，因此，确定展开点后，剩下的工作就是确定对应的自变量的取点，使得对应的中值点满足要求。

证明 由条件可知，最小值一定在内部达到，不妨设 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) = -1$，因而 $f'(x_0) = 0$。在此点展开，得

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

其中 ξ 在 x_0 和 x 之间。

下面，确定 x，使得对应的 ξ 满足要求；显然，这样的点也是特殊点，我们应该在特殊点类(区间端点、条件中含有特殊信息的点)中寻找。

取 $x = 0$，则存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$，使得

$$0 = f(0) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(0 - x_0)^2$$

故，$f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2}$。

此时还不能得到结论，除非 $0 \le x_0 \le \frac{1}{2}$。还有一个条件没有使用，为此，再利用剩下的条件试一下。

取 $x = 1$，则存在 $\xi_2 \in (x_0, 1)$，使得

$$0 = f(1) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(1 - x_0)^2$$

故，$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2}$。

类似，只有当 $0 < 1 - x_0 \le \frac{1}{2}$ 时结论成立，与前面的分析比较，发现至少有一个条件成立，因而，总能保证结论成立。

因而，$f''(\xi) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} = \max\left\{\frac{2}{x_0^2}, \frac{2}{(1 - x_0)^2}\right\} \ge 8$。

抽象总结 高阶导数的中值估计是一类较难的题目，难点有两个：展开点的确定和中值点的确定，必须通过筛选特殊点信息来解决这些难点。

例 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a) = f'(b) = 0$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $|f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$。

结构分析 题型是高阶导数的中值估计；思路：利用泰勒公式；方法设计：由于要求展开与一阶导数无关，条件中有两个对应点，需要得到两个展开式，需要挖掘特殊点的信息。

证明：将 $f(x)$ 在 $x = a$ 点展开，则

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - a)^2,$$

其中，ξ 位于 a 与 x 之间。

与要证明的结论作比较，必须去掉与 x 有关的项，可以通过选定特殊的 x 达到这一目的，显然，这样的 x 必须与 a、b 有关，满足这样条件的点有 3 个：$x = a$，$x = b$ 和 $x = \frac{a+b}{2}$，简单验证表明，代入这 3 个点不能直接得到结论，事实上，还有一个同等的条件没有利用，因此，考虑端点 b 处的展开，则

$$f(x) = f(b) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - b)^2,$$

其中，ξ 位于 b 与 x 之间。

由于将两个端点有机联系在一起且产生 $(b-a)^2$ 项的点是中点 $\frac{a+b}{2}$，因此，将 $x=\frac{a+b}{2}$ 代入两个展开式，得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2,$$

其中 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，相减得，

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

故，

$$f''(\xi_2)-f''(\xi_1)=\frac{8}{(b-a)^2}\left[f(b)-f(a)\right],$$

记 $\left|f''(\xi)\right|=\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\right\}$，则

$$2\left|f''(\xi)\right|\geq\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|=\frac{8}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|.$$

4. 简单小结

从上面几个应用举例中可以初步体会泰勒公式的重要作用，也可以感受到应用的难度，当然，泰勒公式的应用还不止于此，还有更多方面的应用，因此，必须深刻掌握泰勒公式的应用思想，核心思想就是特殊点的信息挖掘。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 《高等数学》[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 王耀革, 崔国忠, 郭从洲. 利用“结构分析-形式统一法”求解数学题目[J]. 理论数学, 2020(5): 524-529. https://doi.org/10.12677/PM.2020.105064

[3] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018.