Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 966-972
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115110

Gorenstein强FI-内射模

袁 倩

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: queenayq@yeah.net

收稿日期：2021年4月18日；录用日期：2021年5月20日；发布日期：2021年5月27日

摘 要

引入强FI-内射模和Gorenstein强FI-内射模，讨论了这两类模的同调性质，证明了$\left({}^{\perp_1}\mathbf{SFI}(\mathbf{R}),\mathbf{SFI}(\mathbf{R})\right)$是遗传完备的余挠对。

关键词

强FI-内射模，Gorenstein强FI-内射模，余挠对

Gorenstein Strongly FI-Injetive Modules

Qian Yuan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: queenayq@yeah.net

Received: Apr. 18th, 2021; accepted: May 20th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

The strongiy FI-injective modules and the Gorenstein strongly FI-injective modules are introduced, and the homology properties of these two types of modules are discussed. It is proved that $\left({}^{\perp_1}\mathbf{SFI}(\mathbf{R}),\mathbf{SFI}(\mathbf{R})\right)$ is a hereditary-complete cotorsion pair.

Keywords

Strongly FI-Injetive Module, Gorenstein Strongly FI-Injetive Module, Cotorsion Pair

文章引用: 袁倩. Gorenstein 强 FI-内射模[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 966-972.
DOI: 10.12677/pm.2021.115110

1. 引言

1995 年，Enochs 等人在一般环上引入 Gorenstein 内射模的概念[1]。称内射左 R-模的正合列 $\mathbf{E}=\cdots\to E^{-1}\to E^{0}\to E^{1}\to\cdots$ 是完全内射分解，如果对任意内射左 R-模 E，序列 $\mathrm{Hom}_R(E,\mathbf{E})$ 正合。称左 R-模 N 是 Gorenstein 内射模，如果存在一个完全内射分解 $\mathbf{E}$ 使得 $N\cong\mathrm{Ker}\left(E^{0}\to E^{1}\right)$。2007 年，Mao 等人引入 FI-内射模的概念[2]。称左 R-模 M 是 FP-内射(或绝对纯)模，若对任意的有限表示 R-模 F，$\mathrm{Ext}_R^1(F,M)=0$ ([3] [4])。称左 R-模 M 是 FI-内射模，若对任意 FP-内射 R-模 G，$\mathrm{Ext}_R^1(G,M)=0$。2019 年，陈东等人引入 Gorenstein FI-内射模的概念[5]。称左 R-模 M 是 Gorenstein FI-内射模，如果存在内射模的正合列 $\mathbf{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^{0}\to E^{1}\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}\left(E^{0}\to E^{1}\right)$，且对任意 FI-内射模 I，$\mathrm{Hom}_R(I,\mathbf{E})$ 正合。

受以上文献的启发，我们引入强 FI-内射模和 Gorenstein 强 FI-内射模的概念，讨论其同调性质，并找到了一个遗传完备的余挠对(详见定理 2.7)。

本文中所提到的环均指有单位元的结合环。模均指酉模，除非特别说明，R-模指左R-模。本文中，我们用 R-Mod，$\mathrm{I}(R)$，$\mathrm{P}(R)$，$\mathrm{FI}(R)$，$\mathrm{FPI}(R)$，$\mathrm{GFI}(R)$ 和 $\mathrm{GI}(R)$ 分别表示R-模类，内射R-模类，投射R-模类，FI-内射R-模类，FP-内射R-模类，Gorenstein FI-内射R-模类和Gorenstein内射R-模类；用 $\mathrm{id}(M)$，$\mathrm{FP}\text{-}\mathrm{id}(M)$ 分别表示R-模M的内射维数和FP-内射维数；$\mathbb{N}$ 表示自然数集。

2. 强 FI-内射模

设 M 是一 R-模，$\aleph$ 是一 R-模类，记 ${}^{\perp}\aleph=\left\{M\,\middle|\,\text{对任意}X\in\aleph,\ \mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(M,X)=0\right\}$；${}^{\perp_1}\aleph=\left\{M\,\middle|\,\text{对任意}X\in\aleph,\ \mathrm{Ext}_R^{1}(M,X)=0\right\}$ [6]。对偶地，可定义 $\aleph^{\perp}$ 和 $\aleph^{\perp_1}$。

设 $\mathbf{F}$ 是 R-模类，M 是一 R-模，称同态 $\varphi:C\to M$ 是 M 的 $\mathbf{F}$-预覆盖，如果 $C\in\mathbf{F}$，并且对任意 $C'\in\mathbf{F}$，任意同态 $g:C'\to M$，存在同态 $f:C'\to C$，使得 $g=\varphi f$，其中 $C'\in\mathbf{F}$；取 $C'=C$，若满足 $g=\varphi f$ 的 f 都是 C 的自同构，则称 φ 为 M 的 $\mathbf{F}$-覆盖。对偶地，可定义 M 的 $\mathbf{F}$-预包络和 $\mathbf{F}$-包络。若满同态 $\varphi:C\to M$ 满足 $C\in\mathbf{F}$，并且 $\mathrm{Ker}\varphi\in\mathbf{F}^{\perp_1}$，则称 $\varphi:C\to M$ 是 M 的特殊 $\mathbf{F}$-预覆盖。对偶地，可定义 M 的特殊 $\mathbf{F}$-预包络[7]。

设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是两个 R-模类，称类对 $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 是一余挠对，如果 $\mathbf{A}={}^{\perp_1}\mathbf{B}$，$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\perp_1}$。称余挠对 $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 是遗传的，如果对任意 $A\in\mathbf{A}$，$B\in\mathbf{B}$，$\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(A,B)=0$。若每个 R-模有特殊 $\mathbf{A}$-预覆盖(等价于特殊 $\mathbf{B}$-预包络)，则称 $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 为完备的余挠对[7]。

本部分我们引入强FI-内射模，讨论其同调性质，并证明 $\left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R),\mathrm{SFI}(R)\right)$ 是一遗传完备的余挠对。

定义 2.1 称R-模M是强FI-内射模，若对任意 $I\in\mathrm{FPI}(R)$，$\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(I,M)=0$。

我们将强FI-内射R-模类记为 $\mathrm{SFI}(R)$。

称R-模类 $X(R)$ 是内射可解类，如果 $\mathrm{I}(R)\subseteq X(R)$，且对任意 $X(R)$ 中的正合列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$，其中 $X'\in X(R)$，则 $X''\in X(R)\Leftrightarrow X\in X(R)$ [6]。

关于定义，我们注意到

注记 2.2 1) $\mathrm{I}(R)\subseteq\mathrm{SFI}(R)\subseteq\mathrm{FI}(R)$；特别地，如果$R$是左Noether环，则 $\mathrm{FPI}(R)\subseteq\mathrm{I}(R)\subseteq\mathrm{SFI}(R)\subseteq\mathrm{FI}(R)$。

2) $\mathrm{SFI}(R)$是内射可解类，且关于直积与直和项封闭。

称环R是QF环，如果R是左Noether环，且R是内射R-模[2]。下面用强FI-内射R-模给出QF环的等价刻画。

命题 2.3 设R是环，则以下等价：

1) R 是 QF 环；

2) 若 $I \in \mathrm{I}(R)$，则 $I \in \mathrm{P}(R)$；

3) 若 $M \in R\text{-Mod}$，则 $M \in \mathrm{SFI}(R)$；

证明 1) $\Leftrightarrow$ 2) 由文献([8] 定理 5.3)可得。

2) $\Rightarrow$ 3) 设 $M \in R\text{-Mod}$，$I \in \mathrm{FPI}(R)$，由文献([4] 定理 2.6)可知，$I \in \mathrm{I}(R)$，则由条件(2)可知，$I \in \mathrm{P}(R)$，所以 $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(I, M) = 0$，即 $M \in \mathrm{SFI}(R)$。

3) $\Rightarrow$ 2) 设 $M \in R\text{-Mod}$，任取 $I \in \mathrm{I}(R)$，则 $I \in \mathrm{FPI}(R)$。因为 $M \in \mathrm{SFI}(R)$，所以 $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(I, M) = 0$，因此 $I \in \mathrm{P}(R)$。

推论 2.4 设R是环，则以下等价：

1) R 是QF环；

2) 若 $M \in R\text{-Mod}$，则 $M \in \mathrm{FI}(R)$；

3) 若 $M \in R\text{-Mod}$，则 $M \in \mathrm{SFI}(R)$。

证明由命题 2.3 及文献([2] 命题 2.8)易得。

下面给出强FI-内射模是一个内射模的等价刻画。

命题 2.5 设R是左凝聚环，$M \in R\text{-Mod}$，则 $M \in \mathrm{I}(R) \Leftrightarrow M \in \mathrm{SFI}(R)$ 且 $\mathrm{FP\text{-}id}(M) \leq 1$。

证明 $(\Rightarrow)$ 显然。

$(\Leftarrow)$ 设 $0 \to M \to E \to L \to 0$ 是R-模的正合列，其中 $E \in \mathrm{I}(R)$。因为 $\mathrm{FP\text{-}id}(M) \leq 1$，所以由文献([3] 引理 3.1)可知，$L \in \mathrm{FPI}(R)$。又因为 $M \in \mathrm{SFI}(R)$，所以正合列 $0 \to M \to E \to L \to 0$ 可裂，故 $M \in \mathrm{I}(R)$。

设 $M \in R\text{-Mod}$，取 M 的一个投射分解 $\mathbf{P} = \cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ $(i \in \mathbb{N})$，令 $K_0 = \mathrm{Ker}(P_0 \to M)$，$K_i = \mathrm{Ker}(P_i \to P_{i-1})$ $(i \geq 1)$，则称 $K_i\,(i \in \mathbb{N})$ 为 M 的第i次合冲；取 M 的一个内射分解 $\mathbf{E} = 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{i-1} \to E^i \to \cdots$ $(i \in \mathbb{N})$，令 $L^0 = \mathrm{Coker}(M \to E^0)$，$L^i = \mathrm{Coker}(E^{i-1} \to E^i)$ $(i \geq 1)$，则称 $L^i\,(i \in \mathbb{N})$ 为 M 的第i次上合冲[9]。下面证明 $({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R), \mathrm{SFI}(R))$ 是一遗传完备的余挠对。

引理 2.6 设R是环，则以下条件成立：

1) 任意强FI-内射R-模M的第 $i\,(i \geq 0)$ 次上合冲 $L^i \in \mathrm{SFI}(R)$；

2) 任意FP-内射R-模I的第 $i\,(i \geq 0)$ 次合冲 K_i，都有 $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(K_i, \mathrm{SFI}(R)) = 0$。

证明 因为$\mathrm{SFI}(R)$是内射可解类，且 $\mathrm{I}(R) \subseteq \mathrm{SFI}(R)$，所以由维数转移易知结论成立。

命题 2.7 $({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R), \mathrm{SFI}(R))$ 是遗传完备的余挠对；

证明 要证 $({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R), \mathrm{SFI}(R))$ 是余挠对，只需证 $\mathrm{SFI}(R) = \left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)\right)^{\perp_1}$ 即可。

任取 $M \in \mathrm{SFI}(R)$，取 M 的内射分解 $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to L^{n-1} \to 0$，其中 $E^i \in I(R)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，L^{n-1} 是M的第 $n-1$ 次上合冲。由引理 2.6 可知，$L^{n-1} \in \mathrm{SFI}(R)$。对任意 $X \in {}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)$，由维数转移可知，$0 = Ext_R^j(X, L^{n-1}) \cong Ext_R^{j+n}(X, M)$ $(j \geq 1)$。另一方面，取 X 的投射分解 $0 \to K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$，其中 $P_i \in \mathrm{P}(R)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，K_{n-1} 是 M 的第 $n-1$ 次合冲。由维数转移可知，$\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(X, M) = 0$。于是 $K_{n-1} \in {}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)$，故 $M \in \left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)\right)^{\perp_1}$。

设 $M \in \left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)\right)^{\perp_1}$，由以上证明有 $\mathrm{Ext}_R^j(K_{n-1}, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+j}(X, M) = 0$ $(j \geq 1)$。特别地，若 $I \in \mathrm{FPI}(R)$，则 $I \in {}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)$。因此 $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(I, M) = 0$，故 $M \in \mathrm{SFI}(R)$。综上所述，$({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R), \mathrm{SFI}(R))$ 是余挠对。

设 $M\in\mathrm{SFI}(R)$，$I\in\mathrm{FPI}(R)$，对 I 的任意 i 次合冲 K_i，由引理 2.6 可知，$\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(K_i,M)=0$，故 $\left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R),\mathrm{SFI}(R)\right)$ 是遗传余挠对。设 Y_i 是所有 FP-内射R-模的第 i 次合冲的代表集，则 $\mathbf{Y}=\oplus Y_i$ 也是一个集合。注意到 $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(\oplus Y_i,M)\cong\prod\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(Y_i,M)=0$，所以 $\mathrm{SFI}(R)=\mathbf{Y}^{\perp}$。从而由文献([10]定理 10)可知，$\left({}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R),\mathrm{SFI}(R)\right)$ 是遗传完备的余挠对。

推论 2.8 每个R-模都有特殊 ${}^{\perp_1}\mathrm{SFI}(R)$-预覆盖和特殊 $\mathrm{SFI}(R)$-预包络。

3. Gorenstein 强 FI-内射模

定义 3.1 称R-模M是Gorenstein强FI-内射模，如果存在内射R-模的正合列

$$\boldsymbol{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}\left(E_0\to E^0\right)$，且对任意 $S\in\mathrm{SFI}(R)$，$\mathrm{Hom}_R(S,\mathbf{E})$ 正合。

我们将Gorenstein强FI-内射R-模类记为 $\mathrm{GSFI}(R)$。

关于定义，我们注意到

注记 3.2 1) $\mathrm{I}(R)\subseteq\mathrm{GFI}(R)\subseteq\mathrm{GSFI}(R)\subseteq\mathrm{GI}(R)$；

2) 由对称性可知，定义 3.1 中正合列$\mathbf{E}$的所有同态的像、核和余核都是Gorenstein强FI-内射R-模；

3) $\mathrm{GSFI}(R)$ 关于直积封闭。

下面首先讨论Gorenstein强FI-内射模的基本同调性质。

命题 3.3 设M是一R-模，则以下等价：

1) $M\in\mathrm{GSFI}(R)$；

2) M 满足以下条件：

a) $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(S,M)=0$，其中 $S\in\mathrm{SFI}(R)$；

b) 存在 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ 正合的R-模正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to M\to0$，其中 $E_i\in\mathrm{I}(R)$，$S\in\mathrm{SFI}(R)$。

3) 存在R-模的正合列 $0\to K\to E\to M\to0$，其中 $E\in\mathrm{I}(R)$，$K\in\mathrm{GSFI}(R)$。

证明 1) $\Leftrightarrow$ 2)，1) $\Rightarrow$ 3) 显然。

3) $\Rightarrow$ 2) 因为 $K\in\mathrm{GSFI}(R)$，所以存在 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ 正合的R-模正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to K\to0$，其中 $E_i\in\mathrm{I}(R)$，$S\in\mathrm{SFI}(R)$，并且 $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(S,K)=0$。故存在 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ 正合的R-模正合列 $\cdots\to E_0\to E\to M\to0$。由维数转移，$\mathrm{Ext}_R^i(S,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+1}(S,K)=0$ $(i\geq1)$。

定义R-模类 $\mathrm{SFI-id}^{<\infty}=\{M\in R\text{-}\mathrm{Mod}\,|\,M\text{的强FI内射维数有限}\}$。

命题 3.4 设 $M\in\mathrm{GSFI}(R)$，则以下条件成立：

1) $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(D,M)=0$，其中 $D\in\mathrm{SFI-id}^{<\infty}$。

2) $\mathrm{id}(M)=0$ 或 ∞。

证明 1) 设 $\mathrm{SFI-id}(D)=n<\infty$，我们对 n 进行归纳。当 $n=0$ 时，由命题 3.3 结论显然成立。设 $n\geq1$，则存在 R-模的正合列 $0\to D\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{n-1}\to E^n\to0$，其中 $E^i\in\mathrm{SFI}(R)$。由维数转移可知，$\mathrm{Ext}_R^i(D,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+n}\left(E^n,M\right)=0$ $(i\geq1)$。

2) 设 $\mathrm{id}(M)=n<\infty$，则存在 R-模的正合列 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{n-1}\to E^n\to0$，其中 $E^i\in\mathrm{I}(R)$。令 $L=\mathrm{Ker}\left(E^1\to E^2\right)$，则 $\mathrm{SFI-id}(L)\leq\mathrm{id}(L)\leq n-1$。由(1)可得，$\mathrm{Ext}_R^1(L,M)=0$，所以 $M\in\mathrm{I}(R)$。

命题 3.5 设 $0\to A\to B\to C\to0$ 是R-模的正合列，则以下条件成立：

1) 若 $A,C\in\mathrm{GSFI}(R)$，则 $B\in\mathrm{GSFI}(R)$；

2) 若 $A,B\in\mathrm{GSFI}(R)$，则 $C\in\mathrm{GSFI}(R)$；

3) 若 $B,C\in\mathrm{GSFI}(R)$，则 $A\in\mathrm{GSFI}(R)\Leftrightarrow$ 对任意 $S\in\mathrm{SFI}(R)$，$\mathrm{Ext}_R^1(S,A)=0$。

证明 1) 设 $A,C\in\mathrm{GSFI}(R)$， $S\in\mathrm{SFI}(R)$，则存在 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ 正合的正合列

$$\cdots\to E_1'\to E_0'\to A\to 0,$$

和

$$\cdots\to E_1'\to E_0''\to C\to 0,$$

其中 $E_i',E_i''\in\mathrm{I}(R)$，且 $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(S,A)=0$， $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(S,C)=0$。令 $K'=\mathrm{Ker}(E_0'\to A)$， $K''=\mathrm{Ker}(E_0''\to C)$，则由命题 3.3 可知， K'， $K''\in\mathrm{GSFI}(R)$。于是有交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0' \arrow[r] \arrow[d] & E_0'\oplus E_0'' \arrow[r] \arrow[d] & E_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

故存在 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ 正合的正合列 $\cdots\to E_1'\oplus E_1''\to E_0'\oplus E_0''\to B\to 0$，其中 $E_i'\oplus E_i''\in\mathrm{I}(R)$，且 $\mathrm{Ext}_R^{\geq1}(S,B)=0$。因此由命题 3.3 可知， $B\in\mathrm{GSFI}(R)$。

2) 因为 $B\in\mathrm{GSFI}(R)$，所以由命题 3.3 存在正合列 $0\to K'\to E\to B\to 0$，其中 $E\in\mathrm{I}(R)$，$K'\in\mathrm{GSFI}(R)$。考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为A， $K'\in\mathrm{GSFI}(R)$，所以由(1)可知， $G\in\mathrm{GSFI}(R)$。于是对中间行用命题 3.3 可知， $C\in\mathrm{GSFI}(R)$。

3) $(\Rightarrow)$ 显然。

$(\Leftarrow)$ 因为 $C\in\mathrm{GSFI}(R)$， 所以由命题 3.3 存在正合列 $0\to K\to E\to C\to 0$， 其中 $E\in\mathrm{I}(R)$， $K\in\mathrm{GSFI}(R)$。考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为B，$K \in \mathrm{GSFI}(R)$，所以由(1)可知，$D \in \mathrm{GSFI}(R)$，于是由命题 3.3 存在正合列 $0 \to K' \to E' \to D \to 0$，其中 $E' \in \mathrm{I}(R)$， $K' \in \mathrm{GSFI}(R)$。考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为A， $K' \in \mathrm{GSFI}(R)$， 所以对任意 $S \in \mathrm{SFI}(R)$， $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(S, A) = 0$， $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(S, K') = 0$， 故 $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(S, T) = 0$ 。特别地， $\mathrm{Ext}_R^1(E, T) = 0$ 。因此中间行可裂，所以 $T \in \mathrm{I}(R)$ 。于是由命题 3.3 可知， $A \in \mathrm{GSFI}(R)$ 。

推论 3.6 $\mathrm{GSFI}(R)$ 是内射可解类，且关于直和项封闭。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2007) FI-Injective Resolutions and Dimensions. *Journal of Algebra*, **309**, 367-385. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.019

[3] Stenström, B. (1970) Coherent Rings and FP-Injective Modules. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 323-329. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-2.2.323

[4] Megibben, C. (1970) Absolutely Pure Modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **26**, 561-566. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0294409-8

[5] 陈东，胡葵. 关于 Gorenstein FI-内射模[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(3): 9-13.

[6] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[7] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter, New York. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[8] Faith, C. and Walker, E.A. (1967) Direct-Sum Representations of Injective Modules. *Journal of Algebra*, **5**, 203-221. https://doi.org/10.1016/0021-8693(67)90035-X

[9] Rotman, J.J. (2009) An Introduction to Homological Algebra. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/b98977

[10] Eklof, P. and Trlifaj, J. (2001) How to Make Ext Vanish. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **33**, 31-41. https://doi.org/10.1112/blms/33.1.41