Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 946-953
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115108

带有 p-Laplace 算子的离散混合周期边值问题正解的存在性

李慧娟

西北师范大学, 数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: liwwhj@163.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月20日；发布日期：2021年5月27日

摘 要

运用山路引理研究带有 p-Laplace 算子的二阶离散混合周期边值问题

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1))) + q(t)\phi_p(u(t)) = \lambda f(t, u(t)), \ t \in [2, N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(N), \ \Delta u(0) = -\Delta u(N) \end{cases}$$

正解的存在性, 并获得了两个正解的存在性结果。

关键词

差分方程，临界点理论，混合周期边界条件

Existence of Positive Solutions for Discrete Mixed Periodic Boundary Value Problem Involving the p-Laplacian

Huijuan Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: liwwhj@163.com

Received: Apr. 17^{th}, 2021; accepted: May 20^{th}, 2021; published: May 27^{th}, 2021

文章引用: 李慧娟. 带有 p-Laplace 算子的离散混合周期边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 946-953. DOI: 10.12677/pm.2021.115108

Abstract

By applying the mountain pass lemma, we consider the existence of positive solutions for a second order discrete mixed periodic boundary value problem involving the p-Laplacian as follow

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1))) + q(t)\phi_p(u(t)) = \lambda f(t,u(t)),\ \ t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=u(N),\ \ \Delta u(0) = -\Delta u(N), \end{cases}$$

and the existence of two positive solutions is obtained.

Keywords

Difference Equation, Critical Point Theory, Mixed Periodic Boundary Conditions

1. 引言

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ 分别表示整数集和实数集, $[a,b]_{\mathbb{Z}}$ 表示离散区间 $\{a, a+1, \cdots, b\}$, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $b\geq a$. 设 $N>2$ 是正整数. 考虑以下混合周期边值问题

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1))) + q(t)\phi_p(u(t)) = \lambda f(t,u(t)),\ t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=u(N),\ \ \Delta u(0) = -\Delta u(N), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\lambda>0$ 是实参数, 对任意的 $t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}$, $q(t)>0$ 且 $f:[2,N]_{\mathbb{Z}}\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 连续. Δ 表示前向差分算子, 即 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$, $\phi_p(s)$ 是 p-Laplace 算子, 即 $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$.

差分方程被广泛地应用于计算机科学、经济学、生物学等研究领域, 见文献 [1]. 近年来, 许多学者用不同的方法对差分方程进行了研究, 如锥上的不动点理论、上下解方法、单调迭代方法等. 这些方法可在文献 [2–5] 中找到. 2012年, Bian 等人在文献 [6] 中运用临界点理论研究了如下带有 p -Laplace 算子的离散周期边值问题

$$-\Delta[\phi_p(\Delta x(k-1))] + q(k)\phi_p(x(k)) = \lambda f(k,x(k)),\ \ k\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \tag{1.2}$$

$$x(0) = x(T+1),\ \Delta x(0) = \Delta x(T), \tag{1.3}$$

得到了 λ 满足一定的条件时存在两个正解、三个解和多个解的结果. 特别地, 在 [7] 中, D'Aguì 等人运用临界点理论研究了方程 (1.2) 在 Dirichlet 边界条件下正解的存在性. 在 [8] 中, 王俊梅运用临界点理论研究了在 Robin 型边界条件: $\Delta u(0) = u(T+1) = 0$ 下方程 (1.2) 多个解的存在性, 进一步, 当非线性项 $f > 0$ 时, 应用强极大值原理得到一个正解.

然而, 对于离散混合周期边值问题的研究相对较少. 2020 年, Kong 和 Wang 在文献 [9] 中运用临界点理论研究了如下二阶离散混合周期边值问题

$$\begin{cases} -\Delta(r(t-1)\Delta u(t-1)) = f(t,u(t)),\ t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(N),\ r(0)\Delta u(0) = -r(N)\Delta u(N). \end{cases} \tag{1.4}$$

值得注意的是, 这种混合周期边界条件的不对称性, 使得能量泛函的构造变得尤为困难, 作者引入了新的 Banach 空间和新泛函

$$J(u) := -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N} r(t-1)(\Delta u(t-1))^2 + \sum_{t=1}^{N}\tilde{F}(t,u(t))$$

其中, $\sum\limits_{t=1}^{N} r(t-1)(\Delta u(t-1))^2$ 等价于一个 $N-1$ 阶的半正定矩阵, 借助特征值讨论问题 (1.4) 多个解的存在性.

受上述文献的启发, 本文将运用山路引理研究带有 p-Laplace 算子的离散混合周期边值问题 (1.1). 由于 p-Laplace 算子的引入, 使得问题 (1.1) 的研究变得困难. 因此, 本文通过定义一个新的泛函来讨论问题 (1.4) 正解的存在性.

2. 预备知识

定义

$$E = \{u : [0,N+1]_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R} \mid u(0) = u(N),\ u(1) = 0,\ \Delta u(0) = -\Delta u(N)\},$$

对任意的 $u \in E$, 有

$$u(0) = u(N),\ u(1) = 0,\ u(N+1) = 2u(N) = 2u(0),$$

易得, E 与 $\mathbb{R}^{N-1}$ 同胚. 取

$$\|u\| = \left(\sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|^p + \sum_{t=1}^{N} q(t)|u(t)|^p\right)^{1/p},$$

那么 $(E, \|\cdot\|)$ 是 $N-1$ 维的 Banach 空间.

引理 2.1. 定义 E 上的最大值范数为 $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in[1,N]}|u(t)|$. 则存在 $\omega \in \mathbb{R}$ 使得

$$\|u\|_\infty \le \omega\|u\|. \tag{2.1}$$

证明 由 $u(k)=\sum_{t=1}^{k}\Delta u(t-1)+u(0)$, 可得 $|u(k)|\le\sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|+\sum_{t=1}^{N}|u(t)|,\ k\in[1,N]_{\mathbb{Z}}$.

假设 p 是 q 的共轭数, 即 $(1/p)+(1/q)=1$. 由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty&\le\sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|+\sum_{t=1}^{N}|u(t)|\\&\le(N)^{1/q}\left(\sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{q(t)^{q/p}}\right)^{1/q}\left(\sum_{t=1}^{N}q(t)|u(t)|^p\right)^{1/p}\\&\le\max\left\{(N)^{1/q},\left(\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{q(t)^{q/p}}\right)^{1/q}\right\}\left(\left(\sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{t=1}^{N}q(t)|u(t)|^p\right)^{1/p}\right)\\&\le2^{1/q}\max\left\{(N)^{1/q},\left(\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{q(t)^{q/p}}\right)^{1/q}\right\}\|u\|.\end{aligned}$$

取

$$\omega=2^{(p-1)/p}\max\left\{N^{(p-1)/p},\ \left(\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{(q(t))^{1/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p}\right\},$$

则

$$\|u\|_\infty\le\omega\|u\|.$$

证毕.

定义 $\tilde{f}:[1,N]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $\tilde{F}:[1,N]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$\tilde{f}(t,x)=\begin{cases}0, & t=1,\\ f(t,x), & t\in[2,N-1]_{\mathbb{Z}},\\ f(N,x)+\frac{2}{\lambda}\phi_p(x), & t=N\end{cases}$$

和

$$\tilde{F}(t,x)=\int_0^x\tilde{f}(t,s)\mathrm{d}s,\quad t\in[1,N]_{\mathbb{Z}}.$$

此外, 对任意的 $u\in E$, 定义 $J:E\to\mathbb{R}$ 为

$$J(u)=\frac{\|u\|^p}{p}-\lambda\sum_{t=1}^{N}\tilde{F}(t,u(t)).$$

引理 2.2. 若 $u\in E$ 是 J 的临界点, 则 u 是问题 (1.1) 的解.
证明 对任意的 $u\in E$, 有

$$J(u)=\frac{\|u\|^p}{p}-\lambda\sum_{t=2}^{N}\int_0^{u(t)}f(t,s)\mathrm{d}s-2\int_0^{u(N)}\phi_p(s)\mathrm{d}s.$$

对任意的 $v \in E$, 有

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v\rangle &= \lim_{k\to 0}\frac{J(u+kv)-J(u)}{k}\\ &= \sum_{t=1}^{N}|\Delta u(t-1)|^{p-2}\Delta u(t-1)\Delta v(t-1)+\sum_{t=1}^{N}q(t)|u(t)|^{p-2}u(t)v(t)\\ &\quad -\lambda\sum_{t=2}^{N}f(t,u(t))v(t)-2\phi_p(u(N))v(N)\\ &= \sum_{t=1}^{N}\phi_p(\Delta u(t-1))\Delta v(t-1)+\sum_{t=1}^{N}q(t)\phi_p(u(t))v(t)\\ &\quad -\lambda\sum_{t=2}^{N}f(t,u(t))v(t)-2\phi_p(u(N))v(N),\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{N}\phi_p(\Delta u(t-1))\Delta v(t-1) &= \sum_{t=1}^{N}\phi_p(\Delta u(t-1))v(t)-\sum_{t=1}^{N}\phi_p(\Delta u(t-1))v(t-1)\\ &= \sum_{t=1}^{N}\phi_p(\Delta u(t-1))v(t)-\sum_{t=0}^{N-1}\phi_p(\Delta u(t))v(t)\\ &= -\sum_{t=1}^{N-1}\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1)))v(t)+\phi_p(\Delta u(N-1))v(N)-\phi_p(\Delta u(0))v(0)\\ &= -\sum_{t=1}^{N}\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1)))v(t)+2\phi_p(u(0))v(0).\end{aligned}$$

假设 $\tilde{u}$ 是 $J(u)$ 在 E 上的临界点, 那么

$$0=\langle J'(\tilde{u}), v\rangle=\sum_{t=2}^{N}\left[-\Delta(\phi_p(\Delta\tilde{u}(t-1)))+q(t)\phi_p(\tilde{u}(t))-\lambda f(t,\tilde{u}(t))\right]v(t),$$

由 $v \in E$ 的任意性, 可知

$$-\Delta(\phi_p(\Delta\tilde{u}(t-1)))+q(t)\phi_p(\tilde{u}(t))=\lambda f(t,\tilde{u}(t)),\ t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}.$$

证得 $\tilde{u} \in E$ 是 J 的临界点时, $\tilde{u}$ 是问题 (1.1) 的解. 证毕.

由引理 2.2, 我们可以将问题 (1.1) 的解的存在性转化为寻找 $J(u)$ 在 E 上的临界点. 下面给出一些重要的定义和引理.

定义 2.3. [11] 设 E 是一个实 Banach 空间且 $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. 若对任意的 $\{u_n\} \subset E$, $J(u_n)$ 有界, $J'(u_n) \to 0$ $(n\to\infty)$ 蕴涵 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 J 在 E 上满足 Palais-Smale 条件, 简称 P. S. 条件.

引理 2.4. [6] 设 E 是一个实 Banach 空间, $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ 满足 P. S. 条件. 若 J 下方有界, 那么

$$c = \inf_E J$$

是 J 的临界值.

设 B_r 为实 Banach 空间上半径趋于 0 的开球, ∂B_r 为其边界.

引理 2.5. [10] 设 E 是一个实 Banach 空间, $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ 满足 P. S. 条件. 假设 $J(0)=0$ 且下列条件成立:

(I_1) 存在常数 $\rho,\alpha>0$, 使得 $J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

(I_2) 存在 $e \in E\backslash \bar{B}_\rho$ 使得 $J(e) \leq 0$.

则 J 有一个临界值 $c \geq \alpha$. 此外,

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} J(u),$$

其中

$$\Gamma = \{g \in C([0,1],E) | g(0)=0,\ g(1)=e\}.$$

3. 主要结果

下面给出本文的主要结果:

定理 3.1. 假设 f 满足

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{|x|^{p-1}} = 0,\ t \in [2,N]_{\mathbb{Z}}. \tag{3.1}$$

则存在 $\bar{\lambda}$, 使得 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时, 问题 (1.1) 至少有两个正解.

证明 对每个 $\lambda > 0$, $J(u) \in C^1(E,R)$. 假设对任意的 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, 存在常数 M, 有 $J(u_n) \leq M$, 那么必存在常数 η 使 $\tilde{F}(t,u_n) < \eta$, 结合 (2.1) 式, 则有

$$M \geq J(u_n) \geq \frac{\|u_n\|^p}{p} - \lambda\eta N \geq \frac{|u_n|^p}{p\omega^p} - \lambda\eta N. \tag{3.2}$$

因此, u_n 在有限维 Banach 空间 E 上有界, 故 $\{u_n\}$ 在 E 上有收敛的子列, 即 J 在 E 上满足 P. S. 条件. 根据 (3.2) 式 J 下方有界, 结合引理 2.4 知, $a_\lambda = \inf\limits_{u\in E} J(u)$ 是 J 的临界值.

设 $u \in E\backslash\{0\}$, 使得 $u(t) > 0,\ t \in [2,N]$. 由 $u(t)>0$ 时, $f(t,u(t))>0$ 得

$$\sum_{t=1}^{N} \tilde{F}(t,u(t)) = \sum_{t=2}^{N} \int_0^{u(t)} f(t,s)ds + \frac{2}{\lambda}\int_0^{u(N)} \phi_p(s)ds > 0.$$

当 λ 充分大时, 有 $J(u) < 0$ 及 $a_\lambda < 0$.

定义 $\bar{\lambda} = \inf\{\lambda > 0 | a_\lambda < 0\}$, 当 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时, $J(u)$ 有临界值 a_λ, 对应的临界点取为 $u_1 > 0$. 此外, $J(x_1) < 0$ 满足定理 2.5 的 (I_2).

由 $\|u\|_\infty \le \omega\|u\|$ 及 (3.1) 式可得, 对任意的 $t \in [2,N]_{\mathbb{Z}}$, 有

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\int_0^{u(t)} f(t,s)ds}{\|u\|^p} \le \lim_{\|u\|\to 0}\frac{\omega^p\int_0^{u(t)} f(t,s)ds}{|u|^p} = \lim_{\|u\|\to 0}\frac{\omega^p f(t,u(t))}{p|u|^{p-1}\mathrm{sgn}u} = 0,$$

又因为

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\int_0^{u(N)} \phi_p(s)ds}{\|u\|^{p-1}} \le \lim_{\|u\|\to 0}\frac{\phi_p(u(N))u(N)}{\|u\|^{p-1}} = \lim_{\|u\|\to 0}\frac{|u(N)|^p}{\|u\|^{p-1}} \le \frac{\omega^p\|u\|^p}{\|u\|^{p-1}} = 0,$$

所以当 $\|u\|$ 充分小时 ($\le \|u_0\|$), 有

$$J(u) = \frac{\|u\|^p}{p} + o(\|u\|^p) + o(\|u\|^{p-1}).$$

因此, $J(u)$ 满足引理 2.5 的 (I_1). 由引理 2.5, J 有临界值 $c>0$, 对应的临界点取为 $u_2>0$. 由映射的性质, $u_1 \ne u_2$, 故当 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时, 问题 (1.1) 有两个不同的正解. 证毕.

下面给出一个例子.

例 设 $P>1,\ T=12,\ q(t)=\lg t,\ f(t,u)=t(u^m+u^{m+1}),\ m\ge p$. 考虑以下问题:

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(t-1))) + \lg t\phi_p(u(t)) = \lambda t(u^m+u^{m+1}),\ t\in[2,N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=u(12),\ \Delta u(0) = -\Delta u(12), \end{cases} \tag{3.3}$$

显然, $f:[2,N]\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是连续函数, 且满足假设条件 (3.1). 由定理 3.1 可知, 存在 $\bar{\lambda}$, 使得 $\lambda>\bar{\lambda}$ 时, 问题 (3.3) 至少存在两个正解.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11961060)；甘肃省自然科学基金资助项目(No. 18JR3RA084).

参考文献

[1] Agarwal, R.P. (2000) Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. Marcel Dekker. New York, Basel.

[2] Atici, F.M. and Cabada, A. (2003) Existence and Uniqueness Results for Discrete Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Computers and Mathematics with Applications*, **45**, 1417-1427. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00097-X

[3] Graef, J.R., Heidarkhani, S., Kong, L.J. and Wang, M. (2018) Existence of Solutions to a Discrete Fourth Order Boundary Value Problem. *Journal of Difference Equations and Applications*, **24**, 849-858. https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1428963

[4] Gao, C.H. (2014) Solutions to Discrete Multiparameter Periodic Boundary Value Problems Involving the p-Laplacian via Critical Point Theory. *Acta Mathematica Scientia*, **34**, 1225-1236. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60081-3

[5] Jiang, D.Q., Chu, J.F., O'Regan, D. and Agarwal, R.P. (2004) Positive Solutions for Continuous and Discrete Boundary Value Problems to the One-Dimension p-Laplacian. *Mathematical Inequalities and Applications*, **7**, 523-534. https://doi.org/10.7153/mia-07-53

[6] Bian, L.H., Sun, H.R. and Zhang, Q.G. (2012) Solutions for Discrete p-Laplacian Periodic Boundary Value Problems via critical point theory. *Journal of Difference Equations and Applications*, **18**, 345-355. https://doi.org/10.1080/10236198.2010.491825

[7] D'Aguì, G., Mawhin, J. and Sciammetta, A. (2017) Positive Solutions for a Discrete Two Point Nonlinear Boundary Value Problem with p-Laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **447**, 383-397. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.023

[8] 王俊梅. 具有p-Laplace算子的离散混合边值问题的多解性[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(16): 226-231.

[9] Kong, L.J. and Wang, M. (2020) Multiple and Particular Solutions of a Second Order Discrete Boundary Value Problem with Mixed Periodic Boundary Conditions. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 47, 1-13.

[10] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析(第二版) [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 423-482.