Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 903-908
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115103

一类微分–差分方程的整函数解

刘思瑶，陈硕人

中国石油大学，山东 青岛
Email: 850132724@qq.com, 1656410069@qq.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月19日；发布日期：2021年5月26日

摘 要

本文应用Nevanlinna值分布理论来讨论一类非线性微分–差分方程整函数解的存在性等问题，推广、改进了几个已知结果。在本文中，我们考虑非线性微分–差分方程方程组的整解 $f^n + L(z,f) = p_1e^{\alpha_1 z} + p_2e^{\alpha_2 z}$，其中 $n \ge 3$， $L(z,f)$ 表示 f 的线性微分–差分多项式， $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$ 是整函数，其级小于1。同时我们对Zhang等人提出的猜想给出了肯定的答案。

关键词

Nevanlinna理论，微分–差分方程，允许解，整函数

The Entire Solutions of Certain Type of Nonlinear Difference Differenfial Equations

Siyao Liu, Shuoren Chen

China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong
Email: 850132724@qq.com, 1656410069@qq.com

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 19th, 2021; published: May 26th, 2021

Abstract

In this paper, the Nevanlinna value distribution theory is applied to discuss the existence of integral function solutions for a class of nonlinear differential-difference equations, and some interesting and important conclusions are obtained, which are extended and improved. In this paper, we consider the entire solutions of non-linear difference-differential equation $f^n + L(z,f) = p_1e^{\alpha_1 z} + p_2e^{\alpha_2 z}$, where $L(z,f)$ denotes a difference-differential polynomial of *f*, and

文章引用: 刘思瑶, 陈硕人. 一类微分–差分方程的整函数解[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 903-908.
DOI: 10.12677/pm.2021.115103

p_1, p_2, α_1, α_2 are entire functions with order less than 1. Meanwhile, we give an affirmative answer to the conjecture posed by Zhang *et al*.

Keywords

Nevanlinna Theory, Difference-Differential Equation, Admissible Solution, Entire Function

1. 引言

本文中的亚纯函数通常表示为复平面上的亚纯函数。为了证明主要结果，我们将采用 Nevanlinna 理论。通常用$T(r,f)$表示 f 的特征函数，$m(r,f)$表示接近函数，$N(r,f)$表示计数函数；与往常一样，$S(r,f)$表示满足$S(r,f)=o(T(r,f))$当$r\to\infty$的任意量，但可能除去一有限对数测度的集合(参见专著[1] [2] [3]和[4])。

2. 结论

定理 A [5]下列方程

$$4\left(f(z)\right)^3+3f''(z)=-\sin(3z)$$

有且仅有三个解，即

$$f_1(z)=\sin z,\ f_2(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\frac{1}{2}\sin z,\ f_3(z)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\frac{1}{2}\sin z$$

在 2010 年，Yang 和 Laine 考虑了以下差分方程。

定理 B [6]非线性差分方程

$$f^3(z)+q(z)f(z+1)=c\sin(bz)$$

其中 q 是非常数多项式，b,c 是非零常数，不存在有穷级整函数解。如果$q(z)=q$是一个非零常数，则上述方程具有三个不同的有穷级整函数解，n 是非零整数，$b=3n\pi$ 和$q^3=(-1)^{n+1}c^2\,27/4$。

在 2014 年，Liu 等人[7]考虑了以下更一般的差分方程

$$f^n(z)+q(z)\Delta f(z)=p_1e^{\alpha_1 z}+p_2e^{\alpha_2 z}\tag{2.1}$$

其中 n 是正整数，$\Delta f(z)=f(z+1)-f(z)$，$q(z)$是多项式。事实上，他们得到了：

定理 C 设$n\geq 4$是整数，q 是多项式，$p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2$是非零常数且$\alpha_1\neq\alpha_2$如果存在对(2.1)的有穷集级函数解 f，则$q(z)$是一个常数，下列关系之一成立：

1) $f(z)=c_1e^{\alpha_1 z/3}$，和$c_1\left(e^{\alpha_1/3}-1\right)q=p_2$，$\alpha_1=n\alpha_2$；
2) $f(z)=c_2e^{\alpha_2 z/3}$，和$c_2\left(e^{\alpha_2/3}-1\right)q=p_1$，$\alpha_2=n\alpha_1$，

其中c_1,c_2是满足$c_1^3=p_1$，$c_2^3=p_2$的常数。

对于 Zhang 等人[8]提出的$n=3$的情况[7]，他们得到了以下结果。

定理 D 设 q 是多项式，$p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2$是的非零常数，且$\alpha_1\neq\alpha_2$。如果 f 是下列方程的有穷级整函数

解：

$$f^3 + q(z)\Delta f = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} \tag{2.2}$$

那么 $q(z)$ 是一个常数，以下关系之一成立：

1) $T(r,f) = N_{1)}(r,1/f) + S(r,f)$，

2) $f(z) = c_1 e^{\alpha_1 z/3}$，和 $c_1\left(e^{\alpha_1/3} - 1\right)q = p_2$，$\alpha_1 = 3\alpha_2$，

3) $f(z) = c_2 e^{\alpha_2 z/3}$，和 $c_2\left(e^{\alpha_2/3} - 1\right)q = p_1$，$\alpha_2 = 3\alpha_1$，

其中 $N_{1)}(r,1/f)$ 表示对应 f 的简单零点的计数函数，c_1, c_2 是满足 $c_1^3 = p_1$, $c_2^3 = p_2$ 的常数。

Zhang 等人提出以下猜想。

猜想 1 如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，$\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ 则定理 C 的结果(1)将不会出现。事实上，(1.2)的任意整函数解 f 都必须有 0 作为其 Picard 例外值。进一步的结果参见[9] [10]及其他参考文献。

在这种情况下，$L(z,f)$ 表示一个在 f 上的线性微分－差分多项式

$$L(z,f) = \sum_{j=0}^{k} a_j(z) f^{(l_j)}(z + c_j)$$

其中 c_j 是复数，a_j 是 f 的小函数，不是所有的 a_j 都等于零，并且 $l_j\,(j = 0,\cdots,k)$ 是自然数。

在本文中，我们考虑了方程(1.2)一个稍微一般的形式，并得到了以下结果。

定理 1 设 p, q 是整函数，满足条件 $\rho(p) < 1$，$\rho(q) < 1$，q 不是常数，$n \geq 3$。如果 f 是方程

$$f^n + L(z,f) = p(z)\sin q(z) \tag{2.3}$$

的整函数解，则

$$f = \frac{\sqrt{\varphi}}{q'}\sin(q/n + a)$$

a, c 是常数，$\varphi^n = cp^2(q')^{2n}$，$p, q'$ 为常数。

显然定理 1 推广了定理 A 和定理 B 的结论；应用类似的方法，我们可以讨论如下形式的方程的解。

$$f^n + L(z,f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$$

其中 $L(z,f)$ 表示 f 的线性微分－差分多项式，$p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$ 是整函数，其级小于 1。

3. 主要引理

引理 2.1 [6]若亚纯函数 f 的增长极有限，$P(z,f)$, $Q(z,f)$ 为 f 的微分－差分多项式。

如果

$$f^n P(z,f) = Q(z,f)$$

且 $Q(z,f)$ 关于 f、其导数及平移或者差分的总次数不超过 n，则

$$m(r, P(z,f)) = S(r,f).$$

注 2.1 上面的引理是对应于 f 的微分－差分多项式的 Clunie 引理。用类似方法，我们可以证明：把引理中的限制条件“f 具有有穷级”放宽为超级小于 1，该引理的结论也对。关于该结论的进一步改进和推广，可以参见专著[1]。

引理 2.2 [11]若 f 是下列方程的允许解

$$af^2 + bff' + c(f')^2 = d,$$

其中 a,b,c,d 是满足 $acd\not\equiv 0$ 的函数，则

$$c\left(b^2-4ac\right)\frac{d'}{d}+b\left(b^2-4ac\right)-c\left(b^2-4ac\right)'+\left(b^2-4ac\right)c'=0$$

引理 2.3 [3]假设 f 超越亚纯，则对于任意整数 $k\ge 1$ 来说，必有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f)$$

4. 主要定理的证明

定理 1 的证明

假设 f 是方程(2.3)超越整函数解，则满足条件 $\rho_2(f)<1$。由方程(2.3)，得到

$$nf^{n-1}f'+L'=p'\sin q+pq'\cos q\text{。} \tag{4.1}$$

结合(2.3)和(4.1)，则

$$nf^{n-1}f'-\frac{p'}{p}f^n-\frac{p'}{p}L=pq'\cos q\text{。} \tag{4.2}$$

由(4.2)， $\cos^2 q+\sin^2 q=1$，得到

$$(q')^2+\left(\frac{p'}{p}\right)^2 f^{2n}-\frac{2np'}{p}f^{2n-1}f'+n^2f^{2n-2}(f')^2=T_{2n-2} \tag{4.3}$$

其中 T_{2n-2} 表示 f 差分－微分多项式，其次数不超过 $2n-2$。

由(4.3)，得到

$$f^{2n-2}\varphi=T_{2n-2} \tag{4.4}$$

这里

$$\varphi=\left[(q')^2+\left(\frac{p'}{q}\right)^2\right]f^2-\frac{2np'}{p}ff'+n^2(f')^2 \tag{4.5}$$

下面区分两种情形证明。

情形 1 假设 φ 恒为零，则 $q'f+i\left(nf'-\frac{p'}{p}f\right)\equiv 0$ 或者 $q'f-i\left(nf'-\frac{p'}{p}f\right)\equiv 0$。

这时， $f^n=cp\mathrm{e}^{-iq}$ 或者 $f^n=cp\mathrm{e}^{iq}$， c 是非零常数。由此结合(2.3)知道矛盾。

情形 2 假设 $\varphi\not\equiv 0$。然后对式(4.4)应用引理 2.1 和注 2.1，得到 $m(r,\varphi)=S(r,f)$。于是 $T(r,\varphi)=m(r,\varphi)=S(r,f)$。也就是说， φ 是 f 的小整函数。由(4.5)知道

$$T(r,f)=N(r,1/f)+S(r,f) \tag{4.6}$$

在(4.5)中，若 $(q')^2+\left(\frac{p'}{q}\right)^2$ 恒为零，则容易得到 $p=c\mathrm{e}^{\pm iq}$， c 是非零常数。

这与假设 $\rho(f)<1$ 不符。再根据引理 2.2 和(4.5)有

$$-4n^4(q')^2\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{8n^3(q')^2p'}{p}+8n^4q'q''\equiv 0 \tag{4.7}$$

由(4.10)得到

$$\varphi^n = cp^2\left(q'\right)^{2n} \tag{4.8}$$

c 是非零常数。若 p, q' 为常数，则 φ 也为常数，这时由(4.5)得到 $\left(\frac{q'}{\sqrt{\varphi}}f\right)^2 + \left(\frac{n}{\sqrt{\varphi}}f'\right)^2 = 1$，于是 $f = \frac{q'}{\sqrt{\varphi}}\sin h$，$f' = \frac{\sqrt{\varphi}}{n}\cos h$，其中 h 为整函数。

明显地，$h = q/n + a$，a 是常数。

若 p, q' 中有一个不为常数，则 φ 也不为常数。再根据(4.5)得到

$$\varphi' = \left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right]' f^2 + 2\left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2 - 2n\left(\frac{p'}{p}\right)'\right] ff' - \frac{2np'}{p}\left[\left(f'\right)^2 + ff''\right] + 2n^2 f'f'' \tag{4.9}$$

由(4.6)，假设 z_0 为 f 的单零点，但不是方程中系数的零点和极点。这样根据(4.5)和(4.9)有

$$\varphi(z_0) = n^2\left(f'(z_0)\right)^2,\ \varphi'(z_0) = -\frac{2\varphi p'}{p}(z_0) + 2n^2 f'(z_0) f''(z_0).$$

从而 z_0 也是 $\left(\varphi' + 2\varphi\frac{p'}{p}\right)f' - 2\varphi f''$ 的零点。为此，令

$$\omega = \frac{\left(\varphi' + 2\varphi\frac{p'}{p}\right)f' - 2\varphi f''}{f} \tag{4.10}$$

这样由引理 2.3 得到 $m(r, A) = S(r, f)$，$T(r, A) = S(r, f)$。并且，根据(4.10)，

$$f'' = \frac{\omega}{2\varphi} f - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{p'}{p}\right) f'。$$

再把这个表达式代入(4.9)，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right]' f^2 + 2\left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2 - 2n\left(\frac{p'}{p}\right)'\right] ff' - \frac{2np'}{p}\left(f'\right)^2 \\
&\quad - \frac{2np'}{p} f\left[\frac{\omega}{2\varphi} f - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{p'}{p}\right) f'\right] + 2n^2 f'\left[\frac{\omega}{2\varphi} f - \left(\frac{p'}{p}\right) f'\right] \\
&= \left\{\left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right]' - \frac{np'\omega}{p\varphi}\right\} f^2 - \left[\frac{2np'}{p} + 2n^2\left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{p'}{p}\right)\right]\left(f'\right)^2 \\
&\quad + \left\{2\left[\left(q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{p}\right)^2 - 2n\left(\frac{p'}{p}\right)'\right] + \frac{2np'}{p}\left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{p'}{p}\right) + n^2\frac{\omega}{2\varphi}\right\} ff'
\end{aligned} \tag{4.11}$$

和前面的证明类似，再根据引理 2.2 和(4.11)得到矛盾。

这就完成了定理 1 的证明。

基金项目

一类变系数非齐次微分－差分方程解的增长性 20190451。

参考文献

[1] Chen, Z.X. (2014) Complex Differences and Difference Equations. Science Press, Beijing. https://doi.org/10.1155/2014/124843

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[3] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin/New York. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[4] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing/New York. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[5] Yang, C.C. and Li, P. (2004) On the Transcendental Solutions of a Certain Type of Nonlinear Differential Equations. *Archiv der Mathematik*, **82**, 442-448. https://doi.org/10.1007/s00013-003-4796-8

[6] Yang, C.C. and Laine, I. (2010) On Analogies between Nonlinear Difference and Differential Equations. *Proceedings of the Japan Academy Series A: Mathematical Sciences*, **86**, 10-14. https://doi.org/10.3792/pjaa.86.10

[7] Liu, N.N., Lv, W.R., Shen, T.T. and Yang, C.C. (2014) Entire Solutions of Certain Type of Difference Equations. *Journal of Inequalities and Applications*, **2014**, Article Number: 63. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-63

[8] Zhang, F.R., Liu, N.N., Lv, W.R. and Yang, C.C. (2015) Entire Solutions of Certain Class of Differential-Difference Equations. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article Number: 150. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0488-5

[9] Latreuch, Z. (2017) On the Existence of Entire Solutions of Certain Class of Nonlinear Difference Equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, 115. https://doi.org/10.1007/s00009-017-0914-x

[10] Lv, W.R., Wu, L.L., Wang, D.D. and Yang, C.C. (2018) The Solutions of Difference-Differential Equations. *Open Mathematics*, **16**, 806-815. https://doi.org/10.1515/math-2018-0071

[11] Li, P. (2011) Entire Solutions of Certain Type of Deferential Equations II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 310-313. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.026