Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 865-872
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115099

Hans汉斯

关于微分多项式的正规定则

阿尔孜古丽·依马木买买提，杨 祺*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: *1355414645@qq.com

收稿日期：2021年4月15日；录用日期：2021年5月19日；发布日期：2021年5月26日

摘 要

本文研究了一类微分多项式的亚纯函数的正规定则。我们改进和推广了前人的结论，利用P-Z引理，采用反证法，得到一个新的正规定则。

关键词

亚纯函数，正规定则，微分多项式

A Normal Criterion Concerning the Differential Polynomials

Aerziguli·Yimamumaimaiti, Qi Yang*

School of Mathematical Sciences, Xinjinag Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: *1355414645@qq.com

Received: Apr. 15th, 2021; accepted: May 19th, 2021; published: May 26th, 2021

Abstract

In this paper, we discuss the normal criterion of meromorphic functions concerning differential polynomials. We have improved and extended the previous conclusions, by using P-Z lemma and the method of proof by contradiction, we obtain a new normal criterion.

Keywords

Meromorphic Function, Normal Criterion, Differential Polynomial

*通讯作者。

文章引用: 阿尔孜古丽·依马木买买提，杨祺. 关于微分多项式的正规定则[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 865-872.
DOI: 10.12677/pm.2021.115099

1. 引言与主要结果

设 D 是复平面 C 上的一个区域，F 为 D 内的一组亚纯函数，如果 F 中每个函数序列都包含一个子序列，它在 D 的任一紧子集上都按球面距离一致收敛到一个亚纯函数或 ∞，则称 F 在 D 内正规。

2014 年，徐焱在文献[1]证明了如下结果：

定理 A 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k=2$ 或 3，$A>1$ 为常数，对于族中任意 $f\in F$，f 的零点重级至少为 k，满足下列条件：

1) $f(z)=0\Rightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\le A|z|$，

2) $f^{(k)}(z)\ne z$，

3) f 的极点重级至少为 3，

则 F 在区域 D 上正规。

若将定理 A 条件 2)中的 $f^{(k)}$ 换为一般的微分多项式，结论是否依然成立？本文研究这一问题，得到如下结果。

定理 1 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k=2$ 或 3，$A>1$ 为常数，$a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 为 D 上的全纯函数，对于族中任意 $f\in F$，f 的零点重级至少为 3 且满足下列条件：

1) $f(z)=0\Rightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\le A|z|$，

2) $\forall z\in D, f^{(k)}(z)+a_{k-1}f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_1f'(z)+a_0f(z)\ne z$，

3) f 的极点重级至少为 3，

则 F 在区域 D 上正规。

2. 主要引理

引理 2.1 [2]设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，对于每一个 $f\in F$，f 的零点重级至少为 k，存在一个数 $A\ge1$，使得当 $f\in F$ 且 $f(z)=0$ 时，$\left|f^{(k)}(z)\right|\le A$。若 F 在 D 内一点 z_0 不正规，则对 $0\le\alpha\le k$，存在

1) 点列 $z_n\in D$，$z_n\to z_0$；

2) F 中函数列 f_n；

3) 正数序列 $\rho_n\to0$，

使得函数列 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 C 上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$，其零点重数至少为 k，且满足 $g^{\#}(\zeta)\le g^{\#}(0)=kA+1$，$g(\zeta)$ 的级至多为 2。

引理 2.2 [3]设 f 是一个超越亚纯函数，$k(\ge2)$，l 为正整数。若 f 的零点的级数至少为 3，则 $f^{(k)}-z^l$ 有无穷多个零点。

引理 2.3 [4]设 f 为有穷阶的亚纯函数，$k(\ge2)$ 为正整数，K 为一个正数。若 f 只有重数至少为 k 的零点，$f(z)=0\Rightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\le K$，且 $f^{(k)}(z)\ne1$。则下列两种情形必有一个发生：

1)
$$f(z)=\alpha(z-\beta)^k, \tag{2.1}$$

这里 $\alpha,\beta\in C$，且 $\alpha\cdot k!\ne1$。

2) 若 $k=2$，则

$$f(z)=\frac{(z-c_1)^2(z-c_2)^2}{2(z-c)^2}, \tag{2.2}$$

或

$$f(z)=\frac{(z-c_1)^3}{2(z-c)}. \tag{2.3}$$

若 $k\geq 3$，则

$$f(z)=\frac{1}{k!}\frac{(z-c_1)^{k+1}}{(z-c)} \tag{2.4}$$

这里 c_1,c_2,c 为不同的复数。

引理 2.4 [1]设 f 是有理函数，$k(\geq 2)$ 为正整数，f 的零点重级至少为 k，若 $f^{(k)}(z)\neq z$，则下列三种情形必有一个发生：

1)
$$f(z)=\frac{(z+c)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{2.5}$$

2)
$$f(z)=\frac{(z-c_1)^{k+2}}{(k+1)!(z-b)}, \tag{2.6}$$

3) 若 $k=2$，则

$$f(z)=\frac{(z-c_1)^2(z-c_2)^3}{6(z-b)^2}, \tag{2.7}$$

若 $k=3$，则

$$f(z)=\frac{(z-c_1)^3(z-c_2)^3}{24(z-b)^2}, \tag{2.8}$$

这里 c 为非零常数，c_1,c_2,b 为不同的常数。

引理 2.5 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k=2$ 或 3，$A>1$ 为常数，$a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 为 D 上的全纯函数，对于族中任意 $f\in F$，f 的零点重级至少为 k，满足下列条件：

1) $f(z)=0\Rightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A|z|$，

2) $\forall z\in D, f^{(k)}(z)+a_{k-1}f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_1f'(z)+a_0f(z)\neq z$，

3) f 的极点重级至少为 3，

则 F 在区域 $D\setminus\{0\}$ 上正规。

证明： 设 F 在 $z_0\in D\setminus\{0\}$ 上不正规。由条件给定一个 $r>0$，使得 $\Delta(z_0,r)\subset D\setminus\{0\}$，且对 $\forall f\in F$，$z\in\Delta(z_0,r)$，当 $f(z)=0$ 时有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A|z_0|+1$。由引理 2.1，对 $\alpha=k$，存在函数列 $f_n\in F$，点列 $z_n\to z_0$，正数列 $\rho_n\to 0$，使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g(\zeta)$ 在复平面 C 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\zeta)$，且其零点重级至少为 k，极点重级至少为 3，$g^{\#}(\zeta)\leq g^{\#}(0)=k(A|z_0|+1)+1$，且 g 为有穷级。由 Hurwitz 定理知，g 极点重级至少为 3。

断言：1) $g=0\Rightarrow\left|g^{(k)}\right|\leq A|z_0|$；2) $g^{(k)}(\zeta)\neq z_0$。

设 ζ_0 为 $g(\zeta)$ 的一个零点，存在 ζ_n，$\zeta_n\to\zeta_0$，使得对于 n 充分大时 $g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)=0$。因此 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，当 n 充分大时 $\left|f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)\right|\leq A|z_n+\rho_n\zeta_n|$。由于

$$g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)\to g^{(k)}(\zeta_0),$$

故有$\left|g^{(k)}(\zeta_0)\right|\le A|z_0|$。1) 得证。

下证 2)。由于

$$\begin{aligned}&g_n^{(k)}(\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_n^{k-i}a_i(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(i)}(\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta)\\&=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta),\end{aligned}$$

因为$a_i(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(i)}(\zeta)\to a_i(z_0)g^{(i)}(\zeta)$，所以在$C\setminus g^{-1}(\infty)$上$a_i(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(i)}(\zeta)$在 C 上内闭一致有界。因此，在$C\setminus g^{-1}(\infty)$上有

$$g_n^{(k)}(\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_n^{k-i}a_i(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(i)}(\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta)\to g^{(k)}(\zeta)-z_0 \tag{2.9}$$

若存在ζ_0，使得$g^{(k)}(\zeta_0)=z_0$。由于

$$\begin{aligned}&g_n^{(k)}(\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_n^{k-i}a_i(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(i)}(\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta)\\&=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta)\ne 0\end{aligned}$$

由(2.9)式及 Hurwitz 定理，得$g^{(k)}(\zeta)\equiv z_0$。又因为g只有重级至少为k的零点，所以

$$g(\zeta)=\frac{z_0}{k!}(z-\alpha)^k,\ \alpha\in C$$

通过简单计算：

$$g^{\#}(0)\le\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & |\alpha|\ge 1\\ |z_0|, & |\alpha|<1\end{cases}$$

这与$g^{\#}(\zeta)\le g^{\#}(0)=k(A|z_0|+1)+1$矛盾。因此 2) 得证。

由引理 2.3 g有(2.1)，(2.2)，(2.3)或(2.4)的形式，若 g 有(2.1)的形式，同上估计$g^{\#}(0)$。可得矛盾。因此g有(2.2)，(2.3)或(2.4)的形式，但这与g的极点重级至少为 3 矛盾。引理得证。

3. 主要结果的证明

证明：由引理 2.5 只需证F在$z=0$正规。不妨设$D=\Delta$，若F在$z=0$不正规。考虑

$$G=\left\{g(z)=\frac{f(z)}{z}: f\in F\right\}$$

对任意$f\in F$，有$f(0)\ne 0$。否则，若$f(0)=0$，由已知条件有$f^{(k)}(0)=0$，f的零点重级至少为 3，得

$$f^{(k)}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(0)f_n^{(i)}(0)=0$$

但这与条件 2)矛盾。因此，对$\forall g\in G,\ g(0)=\infty$，而且$g$的零点重级至少为 3。通过计算：

$$g^{(k)}(z)=\frac{f^{(k)}(z)}{z}-\frac{kg^{(k-1)}(z)}{z} \tag{2.10}$$

因为$f(z)=0\Rightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\le A|z|$，故$g(z)=0\Rightarrow\left|g^{(k)}(z)\right|\le A$。

下面证 G 在 $z=0$ 正规。若 G 在 $z=0$ 不正规，由引理 2.1，存在 $g_n\in G$，$z_n\to 0$，$\rho_n\to 0^+$，使得

$$G_n(\zeta)=\frac{g_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\to G(\zeta), \tag{2.11}$$

在复平面 C 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $G(\zeta)$，其零点重级至少为 3，且 $G^{\#}(\zeta)\le G^{\#}(0)=kA+1$。

下面分两种情形：

情形 1：$z_n/\rho_n\to\infty$。

由(2.11)式，通过计算，对于 $0\le i\le k$ 有

$$\rho_n^{k-i}G_n^{(i)}(\zeta)=g_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)=\frac{f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)}{z_n+\rho_n\zeta}-i\cdot\frac{g_n^{(i-1)}(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n}\cdot\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}$$

另一方面，有

$$\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}\to 0$$

由于 $g_n(z_n+\rho_n\zeta)/\rho_n^k\to G(\zeta)$，所以 $g_n^{(i-1)}(z_n+\rho_n\zeta)/\rho_n$ 在 $C\setminus G^{-1}(\infty)$ 上内闭一致有界。因此，在 $C\setminus G^{-1}(\infty)$ 上，

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{z_n+\rho_n\zeta}\to G^{(k)}(\zeta), \tag{2.12}$$

与

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)}{z_n+\rho_n\zeta}\to 0,\ i=0,1,\cdots,k-1.$$

由于 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 在 D 上解析，因此

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)-(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)}\to G^{(k)}(\zeta)-1$$

断言：1) $G(\zeta)=0\Rightarrow\left|G^{(k)}(\zeta)\right|\le A$；2) $G^{(k)}(\zeta)\ne 1$。

若 $G(\zeta_0)=0$，由 Hurwitz 定理与(2.11)式，存在 ζ_n，$\zeta_n\to\zeta_0$，使得 $g_n(z_n+\rho_n\zeta)=0$，从而当 n 充分大时 $f_n(z_n+\rho_n\zeta)=0$。由定理条件 $\left|f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)\right|\le A\left|z_n+\rho_n\zeta_n\right|$ 与(2.12)式可得 $\left|G^{(k)}(\zeta_0)\right|\le A$。1) 得证。

由条件 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)\ne z_n+\rho_n\zeta$。由 Hurwitz 定理与(2.12)式，对任意 $\zeta\in C\setminus G^{-1}(\infty)$ 有 $G^{(k)}(\zeta)\ne 1$ 或 $G^{(k)}(\zeta)\equiv 1$。显然 $\zeta\in C$ 上也成立。若 $G^{(k)}(\zeta)\equiv 1$，因 G 的零点重级至少为 3，则 $G(\zeta)=(\zeta-\alpha)^k/k!\ (\alpha\in C)$。通过计算可得：

$$G^{\#}(0)\le\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & |\alpha|\ge 1\\ 1, & |\alpha|<1\end{cases}$$

这与 $G^{\#}(0)=kA+1$ 矛盾，2) 得证。

由引理 2.3，G 有(2.1)，(2.2)，(2.3)或(2.4)的形式。若 G 有(2.1)的形式，同上估计 $G^{\#}(0)$，可得矛盾。

因此 G 有(2.2)，(2.3)或(2.4)的形式，但这与 G 的极点重级至少为 3 矛盾。

情形 2：$z_n/\rho_n \to \alpha,\alpha$ 为有限复数。则

$$\frac{g_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k} = G_n(\zeta - z_n/\rho_n) \to G(\zeta-\alpha) = \tilde{G}(\zeta).$$

$\tilde{G}(\zeta)$ 的零点重级至少为 3，$\tilde{G}(\zeta)$ 的极点重级至少为 3 ($\zeta=0$ 例外)。

令

$$H_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+1}}, \tag{2.13}$$

则

$$H_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+1}} = \zeta\frac{g_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k} \to \zeta\tilde{G}(\zeta) = H(\zeta) \tag{2.14}$$

由(2.14)式，在 $C\setminus H^{-1}(\infty)$ 上

$$H_n^{(k)}(\zeta) = \frac{f_n^{(k)}(\rho_n\zeta)}{\rho_n} \to H^{(k)}(\zeta) \tag{2.15}$$

显然，H 的零点重级至少为 3，极点重级至少为 3。由于 $\tilde{G}(0)=\infty$，所以 $H(0)\neq 0$。

断言：3) $H(\zeta)=0 \Rightarrow \left|H^{(k)}(\zeta)\right| \le A|\zeta|$；4) $H^{(k)}(\zeta)\neq\zeta$。

若 $H(\zeta_0)=0$，由 Hurwitz 定理与(2.14)式，存在 $\zeta_n \to \zeta_0$，使得当 n 充分大时 $f_n(\rho_n\zeta_n)=0$。由定理条件 $\left|f_n^{(k)}(\rho_n\zeta_n)\right| \le A|\rho_n\zeta_n|$ 与(2.15)式，得 $\left|H^{(k)}(\zeta_0)\right| \le A|\zeta_0|$，3) 得证。

若存在 ζ_0，使得 $H^{(k)}(\zeta_0)=\zeta_0$。在 $C\setminus H^{-1}(\infty)$ 上，由(2.15)式有

$$\begin{aligned} 0 &\neq \frac{f_n^{(k)}(\rho_n\zeta) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\rho_n\zeta) f_n^{(i)}(\rho_n\zeta) - \rho_n\zeta}{\rho_n} \\ &= H_n^{(k)}(\zeta) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} a_i(\rho_n\zeta) H_n^{(i)}(\zeta) - \zeta \to H^{(k)}(\zeta) - \zeta. \end{aligned}$$

由 Hurwitz 定理有 $H^{(k)}(\zeta)\equiv\zeta$ 在 $C\setminus H^{-1}(\infty)$ 上，因此 H 为 $k+1$ 次多项式。由于 H 的零点重级至少为 3，注意到 $k=3$，故 H 只有一个零点，且重数为 $k+1$，所以 $H^{(k)}(\zeta_1)=0$。又 $H^{(k)}(\zeta)\equiv\zeta$，所以 $\zeta_1=0$，但 $H(0)\neq 0$ 矛盾。4)得证。

由引理 2.2，H 为有理函数。再由引理 2.4 知，H 有(2.5)，(2.6)，(2.7)或(2.8)的形式。因为 H 的极点重级至少为 3。所以(2.6)，(2.7)或(2.8)式不可能。因此，我们有

$$H(\zeta) = \frac{(\zeta+c)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.16}$$

这里 $(c\neq 0)$ 是一个常数。

下面证明(2.16)是不可能的。由(2.14)与(2.16)式，得

$$\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+1}} \to \frac{(\zeta+c)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.17}$$

因 f_n 的零点重级至少为 $k=3$，则存在 $\zeta_{n,0}\to -c$，使得 $z_{n,0}=\rho_n\zeta_{n,0}$ 为 f_n 的一个 $k+1$ 重零点。

再分两个子情形：

情形 1.1：存在$0<\delta\le 1$，使得当n充分大时，$f_n(z)$在$\Delta(0,\delta)$上全纯。

由于$\{f_n\}$在$\Delta'(0,\delta)$上正规，但在$z=0$不正规。由最大模原理，在$\Delta'(0,\delta)$上，$f_n\to\infty$。若存在$0<\sigma<\delta$，使得对于任意的f_n在$\Delta(0,\sigma)$上只有一个零点$z_{n,0}$，令

$$K_n(z)=\frac{f_n(z)}{(z-z_{n,0})^{k+1}} \tag{2.18}$$

则$\{K_n\}$为$\Delta(0,\sigma)$上不为零的全纯函数族，且在$\Delta'(0,\sigma)$上$K_n(z)\to\infty$。于是$\{1/K_n\}$在$\Delta(0,\sigma)$上全纯，且在$\Delta'(0,\sigma)$上$1/K_n(z)\to 0$。由最大模原理在$\Delta(0,\sigma)$上也成立。所以在$\Delta(0,\sigma)$上$K_n(z)\to\infty$，特别地，$K_n(2z_{n,0})\to\infty$。但是由(2.17)与(2.18)式，

$$K_n(2z_{n,0})=\frac{f_n(2z_{n,0})}{z_{n,0}^{k+1}}=\frac{f_n(2\rho_n\zeta_{n,0})}{\rho_n^{k+1}\zeta_{n,0}^{k+1}}\to\frac{1}{(k+1)!},$$

矛盾。

因此，取出一个序列，对于任意$0<\sigma<\delta$，当n充分大时，$f_n(z)$在$\Delta(0,\sigma)$上至少有两个零点。设$z_{n,1}$为f_n在$\Delta(0,\sigma)\setminus\{z_{n,0}\}$上的一个零点，显然，$z_{n,1}\to 0$。设$\zeta_{n,1}=z_{n,1}/\rho_n$，由(2.17)得$\zeta_{n,1}\to\infty$，因此$z_{n,0}/z_{n,1}=\zeta_{n,0}/\zeta_{n,1}\to 0$。令

$$L_n(z)=\frac{f_n(z_{n,1}z)}{z_{n,1}^{k+1}}.$$

则对于n充分大时，$\{L_n\}$在C上任一有界集上有定义且全纯，其的零点重级至少为 3。由定理条件有$L_n(z)=0\Rightarrow\left|L_n^{(k)}(z)\right|\le A|z|$。因

$$L_n^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}z_{n,1}^{k-i}a_i(z_{n,1}z)L_n^{(i)}(z)=\frac{f_n^{(k)}(z_{n,1}z)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_{n,1}z)f_n^{(i)}(z_{n,1}z)}{z_{n,1}}.$$

由条件

$$f_n^{(k)}(z_{n,1}z)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_{n,1}z)f_n^{(i)}(z_{n,1}z)\ne z_{n,1}z,$$

得

$$L_n^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}z_{n,1}^{k-i}a_i(z_{n,1}z)L_n^{(i)}(z)\ne z.$$

类似引理 2.5 的证明可知$\{L_n\}$在$C\setminus\{0\}$上正规。断言$\{L_n\}$在$z=0$也正规。否则，由最大模原理，在$C\setminus\{0\}$上$L_n(z)\to\infty$。这与$L_n(1)=0$矛盾。所以$\{L_n\}$在C上正规。

如需要重取一序列，可设$L_n(z)\to L(z)$，有

$$L_n^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}z_{n,1}^{k-i}a_i(z_{n,1}z)L_n^{(i)}(z)\to L^{(k)}(z) \tag{2.19}$$

其中$L(z)$为整函数，$L(z)$的零点重级至少为 3。显然$L(1)=0$。另外，$L_n(z_{n,0}/z_{n,1})=0$，$z_{n,0}/z_{n,1}\to 0$，得到$L(0)=0$。由于$L_n(z)=0\Rightarrow\left|L_n^{(k)}(z)\right|\le A|z|$，同断言 3) 可证$L(z)=0\Rightarrow\left|L^{(k)}(z)\right|\le|z|$。根据$L(0)=0$得$L^{(k)}(0)=0$。因$L_n^{(k)}\ne z$，故由 Hurwitz 定理及(2.19)式得$L^{(k)}(z)\equiv z$。因为$L$的零点重级至少为3且$L(0)=0$，则有$L(z)=z^{k+1}/(k+1)!$，但这与$L(1)=0$矛盾。

情形 1.2：如果取出一个子列，$\forall\delta>0$，对每个n，f_n在$\Delta(0,\delta)$上至少有一个极点。

故存在 $z_{n,\infty}\to 0$，使得 $f_n\left(z_{n,\infty}\right)=\infty$。不妨设 $z_{n,\infty}$ 是 f_n 最小模的一个极点。设 $\zeta_{n,\infty}=z_{n,\infty}/\rho_n$，由(2.17)式得 $\zeta_{n,\infty}\to\infty$，从而 $z_{n,0}/z_{n,\infty}=\zeta_{n,0}/\zeta_{n,\infty}\to 0$。令

$$M_n(z)=\frac{f_n\left(z_{n,\infty}z\right)}{z_{n,\infty}^{k+1}}.$$

当 n 充分大时，对任意 $z\in C$，$\{M_n\}$ 有定义，其零点重级至少为 3，极点重级至少为 3。而且，当 n 充分大时 $\{M_n\}$ 在 Δ 上全纯。由条件知 $M_n(z)=0\Rightarrow\left|M_n^{(k)}(z)\right|\le A|z|$ 且 $M_n^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}z_n^{k-i}a_i\left(z_{n,\infty}z\right)M_n^{(i)}(z)\ne z$。因情形 1.1，$\{M_n\}$ 在 $C\setminus\{0\}$ 上正规。同样，$M_n(z)$ 在 $z=0$ 也正规。否则，若 $\{M_n\}$ 在 Δ' 上正规，但在 $z=0$ 不正规。由于 $\{M_n\}$ 在 Δ 上全纯，由最大模原理 $M_n\to\infty$。但是 $M_n\left(z_{n,0}/z_{n,\infty}\right)=0$ 与 $z_{n,0}/z_{n,\infty}\to 0$ 矛盾，所以 $\{M_n\}$ 在 C 上正规。

取序列 $\{M_n\}$，使得

$$M_n(z)\to M(z),$$

M 为 C 上亚纯函数，且它的零点重级至少为 3。显然 $M(1)=\infty$。另外 $M_n\left(z_{n,0}/z_{n,\infty}\right)=0$ 与 $z_{n,0}/z_{n,\infty}\to 0$，所以 $M(0)=0$。同情形 1.1 对 $L(z)$ 可得 $M(z)=z^{k+1}/(k+1)!$，但与 $M(1)=\infty$ 矛盾。从而得证(2.16)式不可能的。

因此可得证 G 在 $z=0$ 正规。

由于 G 在 $z=0$ 正规，则 G 在 $z=0$ 是关于球面距离等度连续。对任意 $g\in G$，$g(0)=\infty$。故存在 $\delta>0$，使得对任意 $g\in G$，$z\in\Delta(0,\delta)$，有 $|g(z)|\ge 1$。因此对于任意 $f\in F$，$z\in\Delta(0,\delta)$，有 $f(z)\ne 0$。由于 F 在 Δ' 上正规，但在 $z=0$ 不正规。$1/F=\{1/f:f\in F\}$ 在 D_δ 上全纯，在 $\Delta'(0,\delta)$ 上正规，但 $z=0$ 不正规。因此存在一序列 $\{1/f_n\}\subset 1/F$ 在 $\Delta'(0,\delta)$ 上内闭一致收敛，但在 $\Delta(0,\delta)$ 上不成立。由最大模原理，在 $\Delta'(0,\delta)$ 上 $1/f_n\to\infty$。在 $\Delta'(0,\delta)$ 上 $f_n\to 0$ 内闭一致收敛，所以 $\{g_n\}\subset G$。但 $z\in\Delta(0,\delta)$ 时与 $|g_n(z)|\ge 1$ 矛盾。

定理 1 证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(11961068，12061077)。

参考文献

[1] Xu, Y. (2016) Normal Families and Fixed-Points of Meromorphic Functions. *Monatshefte für Mathematik*, **179**, 471-485. https://doi.org/10.1007/s00605-015-0847-z

[2] Zhang, G.M. (2009) Normal Families and Omitted Functions II. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **41**, 63-71. https://doi.org/10.1112/blms/bdn103

[3] Xu, Y. (2004) Normality and Exceptional Functions of Derivatives. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **76**, 403-414. https://doi.org/10.1017/S1446788700009940

[4] Xu, Y. and Fang, M.L. (2003) On Normal Families of Meromorphic Functions. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **74**, 155-164. https://doi.org/10.1017/S1446788700003219