Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 882-888
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115101

一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在性

李雯婧

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 1750621369@qq.com

收稿日期：2021年4月10日；录用日期：2021年5月19日；发布日期：2021年5月26日

摘 要

本文运用单调迭代法研究了三阶三点积分边值问题

$$u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, t\in[0,T],$$
$$u'(T)=u''(0)=0,\ u(0)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s$$

正解的存在性，其中 $f:[0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续，$a:[0,T]\to[0,+\infty)$ 非负连续且 $a(t)$ 不恒等于零，$\eta\in[0,T]$ 为常数，$\alpha\in\left(0,\frac{1}{\eta}\right)$。

关键词

单调迭代法，三阶三点边值问题，正解

Existence of Positive Solutions for Third-Order Boundary Value Problems with Integral Boundary Conditions

Wenjing Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1750621369@qq.com

Received: Apr. 10th, 2021; accepted: May 19th, 2021; published: May 26th, 2021

文章引用: 李雯婧. 一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 882-888.
DOI: 10.12677/pm.2021.115101

Abstract

In this paper, by applying monotone iteration method, this article studies the existence of positive solutions for third-order three-point integral boundary value problem

$$u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, t\in[0,T],$$

$$u'(T)=u''(0)=0,\ u(0)=\alpha\int_0^{\eta}u(s)\mathrm{d}s$$

where $f:[0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ **is continuous,** $a:[0,T]\to[0,+\infty)$ **is nonnegatively continuous and** $a(t)$ **is not identical to zero,** $\eta\in[0,T]$ **is constant,** $\alpha\in\left(0,\frac{1}{\eta}\right)$**.**

Keywords

Monotone Iteration Method, Third-Order Three-Point Boundary Value Problem, Positive Solutions

1. 引言

随着微分方程在物理、生物和工程科学领域中的广泛应用，边值问题也逐渐成为一个热门的研究课题。在物理学等领域中的许多问题都可以归结为带积分边界条件的边值问题，因此越来越多的学者开始研究带积分边界条件边值问题的正解的存在性，同时也获得了一些重要的结论[1]-[9]。

在 2010 年，Jessda Tariboon 在文献[7]中利用锥上 Krasnoselskill 不动点定理，证明了一类含有积分边界条件的二阶三点边值问题

$$u''(t)+a(t)f(u)=0,\ t\in(0,1),$$

$$u(0)=0,\ \alpha\int_0^{\eta}u(s)\mathrm{d}s=u(1),\ \eta\in(0,1)$$

正解的存在性。

2015 年 Yao Zhijian 在文献[8]利用 Leray-Schauder 不动点定理研究了边值问题

$$u''(t)+a(t)f(u)=0,\ t\in(0,1),$$

$$u(0)=0,\ \alpha\int_0^{\eta}u(s)\mathrm{d}s=u(1),\ \eta\in(0,1)$$

正解的存在性，其中 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的，$a\in C([0,1],[0,+\infty))$ 并且存在 $t_0\in[\eta,1]$ 使得 $a(t_0)>0$。

受以上文献的启发，本文将运用单调迭代法研究带积分边界条件的三阶三点边值问题

$$u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0,\ t\in[0,T], \tag{1.1}$$

$$u'(T)=u''(0)=0,\ u(0)=\alpha\int_0^{\eta}u(s)\mathrm{d}s \tag{1.2}$$

正解的存在性，其中 $\eta\in[0,T]$，$0<\alpha<\frac{1}{\eta}$。

本文的工具是下面的定理：

定理 1.1 [10] 设 P 为 Banach 空间 E 中的正规锥，且 $v_0 < w_0$，假设 T 满足下列条件：

(A_1) $T:[v_0,w_0]\to E$ 是全连续的；

(A_2) T 在区间 $[v_0,w_0]$ 上单调递增，即若 $u\le v$，则 $Tu\le Tv$；

(A_3) v_0 是 T 的下解，即 $v_0\le Tv_0$；

(A_4) w_0 是 T 的上解，即 $Tw_0\le w_0$。

则 T 在 $[v_0,w_0]$ 中必有最小不动点 v 和最大不动点 w；并且作迭代序列

$$v_n = Tv_{n-1},\ w_n = Tw_{n-1},\ n=1,2,\cdots,$$

则有

$$v_0\le v_1\le\cdots\le v_n\le\cdots\le w_n\le\cdots\le w_1\le w_0$$

且 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别收敛于 T 的不动点 $v,w\in[v_0,w_0]$。

全文假设下述条件成立：

$(H1)$ $f:[0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是全连续的；

$(H2)$ $a\in C([0,T],[0,+\infty))$ 且在 $[0,T]$ 上 $a(t)$ 不恒等于零。

2. 预备知识

本文所用到的空间是 $C[0,T]$，记 $E=C[0,T]$，$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|$。

定义 2.1 [10]设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的非空闭集，如果 P 满足

1) 任给 $x,y\in P$，$\alpha\ge 0$，$\beta\ge 0$ 有 $\alpha x+\beta y\in P$；

2) 若 $x\in P$，$x\ne\varnothing$，则 $-x\notin P$，

则称 P 是 E 中的锥。

定义 2.2 [11]称算子 $T:E\to E$ 是全连续的，如果它是连续的并且是把有界集映成列紧集。对于任意的 $y\in E$，我们考虑边值问题

$$u'''(t)+y(t)=0,\ t\in[0,T], \tag{2.1}$$

$$u'(T)=u''(0)=0,\ u(0)=\alpha\int_0^{\eta}u(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

其中 $\eta\in[0,T]$，$\alpha\eta\ne 1$，则以下引理成立。

引理 2.1 设 $0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，$y\in C[0,T]$，则问题(2.1)~(2.2)有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)y(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=K(t,s)+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^T K(\eta,s)\,\mathrm{d}\eta,$$

$$K(t,s)=\begin{cases} t(T-s)-\dfrac{1}{2}(t-s)^2, & 0\le s\le t\le T,\\ t(T-s), & 0\le t\le s\le T.\end{cases}$$

证明：对(2.1)式在 $[0,t]$ 上积分可得

$$u''(t)=u''(0)-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

$$u'(t)=u'(0)+u''(0)t-\int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s,$$

$$u(t)=u(0)+u'(0)t+\frac{1}{2}u''(0)t^2-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

由边值条件(2.2)可得到

$$u''(0)=0,$$

$$u'(0)=\int_0^T (T-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

对(2.3)式在$[0,\eta]$上积分可得

$$\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s=\eta u(0)+\frac{1}{2}\eta^2 u'(0)-\frac{1}{6}\int_0^\eta (\eta-s)^3 y(s)\mathrm{d}s.$$

由$u(0)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s$，我们有

$$u(0)=\frac{\alpha\eta^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^T (T-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{6(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta (\eta-s)^3 y(s)\mathrm{d}s.$$

将(2.3)式替换为

$$\begin{aligned}
u(t)&=\frac{\alpha\eta^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^T (T-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{6(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta (\eta-s)^3 y(s)\mathrm{d}s+t\int_0^T (T-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^t\left[t(T-s)-\frac{1}{2}(t-s)^2\right]y(s)\mathrm{d}s+\int_t^T t(T-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta\left[\frac{\eta^2}{2}(T-s)-\frac{1}{6}(\eta-s)^3\right]y(s)\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_\eta^T\frac{\eta^2}{2}(T-s)y(s)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^T\left[K(t,s)+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^T K(\eta,s)\mathrm{d}\eta\right]y(s)\mathrm{d}s。
\end{aligned}$$

引理 2.2 对任意的$(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$，恒有$0\le K(t,s)\le t(T-s)$成立。

证明：$K(t,s)\ge 0$显然成立。

下证$K(t,s)\le t(T-s)$成立，

当$s\le t$时，$K(t,s)=t(T-s)-\frac{1}{2}(t-s)^2\le t(T-s)$；

当$s\ge t$时，$K(t,s)=t(T-s)\le t(T-s)$。

则结论成立。

3. 主要结果及证明

为了方便起见，记

$$\Lambda=\left[\left(1+\frac{\alpha T^2}{2(1-\alpha\eta)}\right)\int_0^T (T-s)a(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}.$$

定理 3.1 假设$f(t,0)$在$[0,T]$上不恒为 0，且存在一个常数$R>0$，使得

$$0\le f(t,u_1)\le f(t,u_2)\le\Lambda R,\ \forall t\in[0,T],\ 0\le u_1\le u_2\le R. \tag{3.1}$$

则边值问题(1.1)~(1.2)存在单调正解。

证明：定义锥

$$P=\left\{u\in E\left|u(t)\geq 0,\forall t\in[0,T]\right.\right\}.$$

并定义算子$T:P\to E$

$$Tu(t)=\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,T].$$

对$\forall u\in P$，由引理 2 和条件$(H1)$-$(H2)$可得$Tu(t)\geq 0$，从而$T:P\to P$，显然T的不动点为边值问题(1.1)~(1.2)的解。

令$v_0(t)=0$，$w_0(t)=R$。

接下来我们验证定理 1.1 的所有条件均满足。

首先证明$T:[v_0,w_0]\to P$是全连续的。

现证T是连续的。设u_n，$u\in P$，$\|u_n-u\|\to 0\ (n\to\infty)$，则对任意的自然数$n$和$t\in[0,T]$，有

$$\begin{aligned}\|Tu_n-Tu\|&=\max_{t\in[0,T]}\left|Tu_n(t)-Tu(t)\right|\\&=\max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,u_n(s))\mathrm{d}s-\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leq\max_{t\in[0,T]}\int_0^T G(t,s)a(s)\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|\mathrm{d}s\\&\leq\max_{t\in[0,T]}\int_0^T\left[t(T-s)+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^T\eta(T-s)\mathrm{d}\eta\right]a(s)\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|\mathrm{d}s\\&\leq\left[1+\frac{\alpha T^2}{2(1-\alpha\eta)}\right]\int_0^T(T-s)a(s)\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|Tu_n-Tu\|=0.$$

即$Tu_n\to Tu\ (n\to\infty)$。

故T是连续的。

其次证明T是紧算子。

设$S\subset[v_0,w_0]$是有界集,对于任意的$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset T(S)$,存在$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset S$,使得$y_k=Tx_k$。由于$S\subset[v_0,w_0]$是有界集，则存在自然数$R$，使得$0\leq x_k\leq R,\ t\in[0,T]$。

$$\begin{aligned}|y_k(t)|=|(Tx_k)(t)|&=\left|\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,x_k(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leq\int_0^T\left[t(T-s)+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^T\eta(T-s)\mathrm{d}\eta\right]a(s)f(s,x_k(s))\mathrm{d}s\\&\leq\left[1+\frac{\alpha T^2}{2(1-\alpha\eta)}\right]\int_0^T(T-s)a(s)\mathrm{d}s\cdot\Lambda R\\&\leq\Lambda^{-1}\cdot\Lambda R\\&=R.\end{aligned}$$

由此得到$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$在$t\in[0,T]$上一致有界。

进一步，对于任意的$\varepsilon\geq 0$，存在一个$\delta>0$，使得对于任意的正整数k，$\forall t_1$，$t_2\in[0,T]$且$|t_1-t_2|<\delta$，

$\left|G(t_1,s)-G(t_2,s)\right|<\dfrac{\varepsilon}{T\|a\|_\infty \Lambda R}$ 时，有

$$\begin{aligned}
\left|y_k(t_1)-y_k(t_2)\right| &= \left|(Tx_k)(t_1)-(Tx_k)\right|(t_2) \\
&= \left|\int_0^T G(t_1,s)a(s)f(s,x_k(s))\mathrm{d}s-\int_0^T G(t_2,s)a(s)f(s,x_k(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_0^T \left(G(t_1,s)-G(t_2,s)\right)a(s)f(s,x_k(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\le \int_0^T \left|G(t_1,s)-G(t_2,s)\right|\left|a(s)\right|\left|f(s,x_k(s))\right|\mathrm{d}s \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明$\{y_k\}_{k=1}^\infty$是等度连续的。从而由 Arzela-Ascoli 定理可知，$T:[v_0,w_0]\to P$ 是全连续的。

接下来证明T是单调递增算子。

由(3.1)知当$u(t)\le v(t)$时，有

$$Tu(t)\le Tv(t),\ \forall t\in[0,T].$$

故$Tu\le Tv$，从而T是单调递增算子。

其次证明v_0是T的下解。由引理 2.2 和$(H1)$知

$$Tv_0(t)=\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,0)\mathrm{d}s\ge 0=v_0(t).$$

故$v_0\le Tv_0$，即v_0是T的下解。

再证明w_0是T的上解。同样由引理 2.2 及(3.1)式知

$$\begin{aligned}
\left|Tw_0(t)\right| &= \int_0^T G(t,s)a(s)f(s,w_0(t))\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^T\left[t(T-s)+\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^T \eta(T-s)\mathrm{d}\eta\right]a(s)f(s,w_0(s))\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^T\left[(T-s)+\frac{\alpha T^2(T-s)}{2(1-\alpha\eta)}\right]a(s)f(s,w_0(s))\mathrm{d}s \\
&\le \left[1+\frac{\alpha T^2}{2(1-\alpha\eta)}\right]\int_0^T (T-s)a(s)\mathrm{d}s\cdot\Lambda R \\
&\le \Lambda^{-1}\cdot\Lambda R=R=w_0(t).
\end{aligned}$$

故$Tw_0\le w_0$，即w_0是T的上解。

最后证明边值问题(1.1)~(1.2)存在单调正解。

构造单调迭代序列$\{v_n\}_{n=1}^\infty$与$\{w_n\}_{n=1}^\infty$为

$$v_n=Tv_{n-1},\ w_n=Tw_{n-1},\ n=1,2,\cdots,$$

则由定理 1.1 可知

$$v_0\le v_1\le\cdots\le v_n\le\cdots\le w_n\le\cdots\le w_1\le w_0,$$

且$\{v_n\}_{n=1}^\infty$与$\{w_n\}_{n=1}^\infty$分别收敛于T的不动点$v,w\in[v_0,w_0]$。v和w分别为边值问题(1.1)~(1.2)的单调解。

另外对于任意的$t\in[0,T]$，由引理 2.2 可知

$$Tv_0(t)=\int_0^T G(t,s)a(s)f(s,0)\mathrm{d}s>0.$$

从而$0\le Tv_0(t)\le Tv(t)=v(t)\le w(t)$，$t\in[0,T]$。

这表明 v 和 w 是边值问题(1.1)~(1.2)的正解。故边值问题(1.1)~(1.2)存在单调正解 v 和 w 。

基金项目

国家自然科学基金(11561063)。

参考文献

[1] Boucherif, A., Bouguima, S., Al-Malki, N., *et al.* (2009) Third-Order Differential Equations with Integral Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis*, **71**, 1736-1743. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.02.055

[2] Sun, J. and Li, H. (2010) Monotone Positive Solution of Nonlinear Third-Order BVP with Integral Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, **1**, 1-17. https://doi.org/10.1155/2010/874959

[3] Wang, Y. and Ge, W.G. (2007) Existence of Solutions for a Third-Order Differential Equation with Integral Boundary Conditions. *Computers & Mathematics with Applications*, **53**, 144-154. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.01.002

[4] Tariboom, C.S. (2011) Positive Solutions to Generalized Second-Order Three-Point Integral Boundary-Value Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **14**, 403-428.

[5] Djourdem, H. and Benaicha, S. (2019) Positive Solutions of Nonlinear Third-Order Boundary Value Problem with Integral Boundary Conditions. *Malaya Journal of Matematik*, **7**, 269-275. https://doi.org/10.26637/MJM0702/0019

[6] Lv, X., Wang, L. and Pei, M. (2015) Monotone Positive Solution of a Fourth-Order BVP with Integral Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, **172**, 1-12. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0441-2

[7] Tariboom, J. and Sittiwirattham, T. (2010) Positive Solutions of a Nonlinear Three-Point Integral Boundary Value Problem. *Boundary Value Problems*, **10**, 1-11. https://doi.org/10.1155/2010/519210

[8] Yao, Z. (2015) New Results of Positive Solutions for Second-Order Nonlinear Three-Point Integral Boundary Value. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **8**, 93-98. https://doi.org/10.22436/jnsa.008.02.02

[9] Galvis, J., Rojas, E. and Sinitsyn, A. (2015) Existence of Positive Solutions of a Nonlinear Second-Order Boundary Valve Problem with Integral Boundary Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, **236**, 1-7.

[10] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第二版. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.