

基于公理化模糊集合的投影相似度多属性决策方法

王 虎*, 潘小东

西南交通大学, 数学学院, 四川 成都

Email: *252831426@qq.com

收稿日期: 2021年4月2日; 录用日期: 2021年5月3日; 发布日期: 2021年5月11日

摘 要

针对属性值为语言值的模糊多属性决策问题, 本文提出了一种以公理化模糊集合为基础的投影相似度多属性决策方法, 将评价自然语言转化为相对应的由模糊划分生成的公理化模糊集; 将已知备选方案看作向量, 基于公理化模糊集合向量的模长与余弦值, 提出了投影相似度; 并由此构建了相应的多属性决策模型。最后, 通过算例的比较来说明该模型的有效性和实用性。

关键词

多属性决策, 语言值, 公理化模糊集, 投影相似度

Projection Similarity Multi-Attribute Decision-Making Method Based on Axiomatic Fuzzy Sets

Hu Wang*, Xiaodong Pan

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Email: *252831426@qq.com

Received: Apr. 2nd, 2021; accepted: May 3rd, 2021; published: May 11th, 2021

Abstract

Aiming at the problem of fuzzy multi-attribute decision-making in which the attribute value is a

*通讯作者。

linguistic value, this paper proposes a projection similarity multi-attribute decision-making method based on axiomatic fuzzy sets, which transforms the evaluation natural language into corresponding axiomization generated by fuzzy division Fuzzy set: Regarding the known alternatives as a vector, based on the modulus length and cosine value of the axiomatic fuzzy set vector, the projection similarity is proposed; and the corresponding multi-attribute decision-making model is constructed from this. Finally, the effectiveness and practicability of the model are illustrated by the comparison of calculation examples.

Keywords

Multi-Attribute Decision-Making, Linguistic Value, Axiomatic Fuzzy Set, Projection Similarity

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于决策问题的复杂性以及人类本身思维的模糊性,在实际决策过程中,评价者或专家往往难以用精确的实数来表示决策信息。因而在多属性决策问题中衍生了模糊多属性决策问题。1965年,Zadeh [1]提出模糊集理论,用来研究模糊领域的数学理论应用问题。1970年,Bellman和Zadeh [2]首次基于模糊集理论建立了模糊决策的基本模型,基于模糊集理论的各类模糊决策方法被相继提出。在众多研究成果中,投影法[3]-[9]是一种概念清楚、计算简单的方法,目前已经成功应用于各类模糊多属性决策问题。例如,2008年,吴坚[10]等提出了一种基于投影法的区间型多属性决策两阶段优化模型,用区间数来表示决策信息。2009年,卫贵武[11]提出了一种直觉模糊多属性决策方法,其针对属性值为直觉模糊数的模糊多属性决策问题,通过备选方案在正、负理想方案上的投影,计算每个方案关于正、负理想方案上的相似度,从而得到所有方案的排序结果。将自然语言量化为直觉模糊数来处理,从正、反两个角度来刻画直觉模糊数的隶属度函数,想要较模糊数更加准确表示属性值。越来越多的基于扩展模糊集的投影法被提出,原因在于如何准确地量化模糊多属性决策问题中的决策信息存在争议。而且在现有的一些投影方法中,当投影向量的模比被投影向量的模大时,投影值大小并不能反映其相似程度。现有大多数方法受投影向量模的约束,需要两个向量的模长满足一定关系时,投影相似度的大小比较才成立。

针对模糊多属性决策问题,现有的一般处理模糊性的方法为将自然语言转化为模糊数或扩展的模糊数去计算,并且基于这些模糊数提出了相应的加权算子[12] [13] [14]来进行信息的合成,还有一种常用的做法使用二元语义[15] [16] [17] [18]处理方法,西班牙学者Herrea [15]教授于2000年首次提出了二元语义分析方法,并提出了相应的语义合成算子。第一种方法的困难在于转化为模糊数时隶属度的确定问题,第二种方法困难在于使用二元语义处理方法容易造成初始决策信息的丢失。

2018年,潘小东等[19] [20]从模糊现象的本质和特征出发给出了模糊集合的公理化定义,从整体或全局的观点给出关于模糊概念的新认识。公理化模糊集合是定性评价自然语言的数学模型,是对Zadeh意义下的模糊集的严格化、明确化、清晰化。在公理化模糊集合的框架下,模糊集合能够与评价自然语言值之间建立良好的对应关系。

综合以上分析,本文以公理化模糊集合为基础,模糊隶属空间中的公理化模糊集能够很好地与评价自然语言相对应,在公理化模糊集合的框架下,将自然语言量化为公理化模糊集相对应的隶属度函数,隶属

度函数满足严格的公理化定义, 并且综合投影法中向量之间余弦值与向量模长的影响, 建立公理化模糊集合为基础的投影相似度多属性决策方法。

2. 公理化模糊集合的基本理论

下面我们首先给出模糊划分和公理化模糊集合的定义。

定义 2.1 [19] [20] 设 $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$, U 上的一个模糊划分指的是具有如下形式的对象:

$$\tilde{U} = \{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}$$

其中, 函数 $\mu_{A_i}(x): U \rightarrow [0, 1]$ ($i=1, \dots, n$) 定义了元素 $x \in U$ 关于类 A_i 得隶属度, 并且满足下面的条件:

- 1) 对任意的 $x \in U$, 至少存在一个 $i \in \bar{n}$ 满足 $\mu_{A_i}(x) > 0$;
- 2) 对任意的 $i \in \bar{n}$, $\mu_{A_i}(x)$ 在 U 上连续;
- 3) 对任意的 $i \in \bar{n}$, 至少存在一个 $x_0 \in U$ 使得 $\mu_{A_i}(x_0) = 1$;
- 4) 对任意的 $i \in \bar{n}$, 如果在点 $x_0 \in U$ 处满足若 $\mu_{A_i}(x_0) = 1$, 那么, $\mu_{A_i}(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上不减, 在 $[x_0, b]$ 上不减;

- 5) 对任意的 $x \in U$, 满足 $0 < \mu_{A_1}(x) + \dots + \mu_{A_n}(x) \leq 1$ 。

定义 2.2 [19] [20] 设 $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\tilde{U} = \{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, 是 U 上的一个模糊划分。定义集合 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 如下:

- 1) 如果存在 $i \in \bar{n}$ 使得 $\mu_A(x) = \mu_{A_i}(x)$ 对所有 $x \in U$ 都成立, 那么 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 2) 如果 $\mu_A(x) = \bar{\mu}(x) = 1$, 那么 $A = \{(x, (x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 3) 如果 $\mu_A(x) = \bar{\mu}(x) = 0$, 那么 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 4) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ 且 $r \in \mathbb{Q}^+$, 那么 $A^r = \{(x, (\mu_A(x))^r) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 5) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 N 是定义在 $[0, 1]$ 上的强否定, 那么 $A^N = \{(x, (\mu_A(x))^N) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 6) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 \otimes 是一个三角模, 那么 $A \cap_{\otimes} B = \{(x, \mu_A(x) \otimes \mu_B(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 7) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 \oplus 是一个三角余模算子, 则 $A \cup_{\oplus} B = \{(x, \mu_A(x) \oplus \mu_B(x)) \mid x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 8) $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 不再包含其它元素。

$\mathcal{F}(\tilde{U})$ 称为由 \tilde{U} 生成的模糊隶属空间, $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 中的元素称为定义在 U 上且关于模糊划分 \tilde{U} 的模糊集合。

3. 公理化模糊集合的数学性质

3.1. 公理化模糊集合的序关系

在下文中, 若无特殊说明, \tilde{U} 均表示论域 $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的模糊划分, $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 表示由 \tilde{U} 生成的模糊隶属空间。

当用准确的实数表示事物的属性时, 我们可以通过实数的自然序关系对事物的属性进行排序, 例如两个人的身高, 我们可以直接通过身高的数值来进行排序。当使用自然语言表示事物的属性时, 我们将自然语言转化为对应的公理化模糊集, 公理化模糊集表示了自然语言表示的类, 隶属度函数满足严格的公理化定义。我们若需要对相应的属性进行排序, 则会涉及到公理化模糊集的序关系。

基于以上背景, 我们定义公理化模糊集上的序关系, 为了定义模糊集的序关系, 下面我们首先计算同一模糊隶属空间中的模糊集合的数字特征, 然后再根据所得到的实数值的自然序对模糊集合进行排序。

定义 3.1 设 $A \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 定义 A 的模糊均值 $m_v(A)$ 为:

$$m_v(A) = \frac{\int_a^b x u_A(x) dx}{\int_a^b u_A(x) dx}.$$

在公理化模糊集的框架下, A 的隶属度函数 $u_A(x)$ 为一个连续函数, 我们可以直接计算它的积分来得到这个公理化模糊集的模糊均值。

例 3.1 假设四川某地的男子身高范围为 $[0, 300]$, 单位为 cm , 则在论域 $[0, 300]$ 上建立模糊划分, 生成 $\{u_{A_1}(x), u_{A_2}(x), u_{A_3}(x)\}$ 三个基本模糊隶属度函数, 分别代表模糊集{“矮”, “中”, “高”}, 图像如图 1 所示。

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{150}x + 1, & x \in [0, 150], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{150}x, & x \in [0, 150], \\ -\frac{1}{150}x + 2, & x \in [150, 300], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{150}x - 1, & x \in [150, 300], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

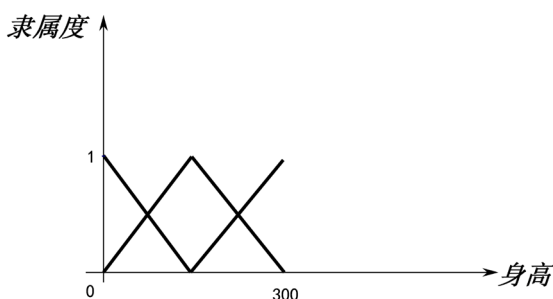


Figure 1. Height membership function
图 1. 身高隶属度函数图

可以计算上述模糊集的模糊均值, 计算可得,

$$m_v(A_1) = 50, m_v(A_2) = 150, m_v(A_3) = 250.$$

对于 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 中的元素, 我们可以通过模糊均值将公理化模糊集合去模糊化, 这个数字特征可以近似看作这个公理化模糊集合所代表的类的精确数字表示。例如在本例子中 150 可以看作代表中的身高数字。

定义 3.2 设 $A, B \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 定义 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 上的序关系 \leq 为: $A \leq B$ 当且仅当 $m_v(A) \leq m_v(B)$ 。

例 3.2 在例 3.1 中, 计算出的身高{矮, 中, 高}的模糊均值为,

$$m_v(A_1) = 50, m_v(A_2) = 150, m_v(A_3) = 250$$

于是可知, $A_3 \geq A_2 \geq A_1$ 。

3.2. 公理化模糊集合的投影相似度

在计算分量为实数的向量模长时, 我们通过模长公式来计算向量的模长, 若向量的分量为公理化模糊集合, 公理化模糊集合不能直接进行运算, 我们可以将公理化模糊集合去模糊化, 通过计算模糊均值的方法将公理化模糊集的向量转化为实数向量。

定义 3.3 设向量 α 有 m 个分量, 并且向量的分量由公理化模糊集表示, 其中 α 表示为 (x_1, x_2, \dots, x_m) , 令

$$\alpha' = (m_v(x_1), m_v(x_2), \dots, m_v(x_m)),$$

定义向量 α 的模长 $\|\alpha\|$ 为:

$$\|\alpha\| = \alpha' = \sqrt{\sum_{j=1}^m (m_v(x_j))^2},$$

有了向量的模长, 我们可以继续计算向量的余弦值。

定义 3.4 设两个向量 α, β 有 m 个分量, 并且向量的分量由公理化模糊集表示, 其中 α 表示为 (x_1, x_2, \dots, x_m) , β 表示为 (y_1, y_2, \dots, y_m) 。令

$$\alpha' = (m_v(x_1), m_v(x_2), \dots, m_v(x_m));$$

$$\beta' = (m_v(y_1), m_v(y_2), \dots, m_v(y_m))。$$

定义向量 α, β 的余弦值 $\cos(\alpha, \beta)$ 为:

$$\cos(\alpha, \beta) = \cos(\alpha', \beta') = \frac{\alpha' \beta'}{\alpha \beta}。$$

若两个向量的夹角越小, 我们认为这两个向量越接近, 但若是两个向量的方向一致, 而模长相差很大, 则这两个向量的差异也很大。在考虑两个向量的差异值时, 我们需要综合考虑向量的模长与余弦值。就产生了投影法。

定义 3.5 设两个向量 α, β 有 m 个分量, 并且向量的分量由公理化模糊集表示, 其中 α 表示为 (x_1, x_2, \dots, x_m) , 相应 β 表示为 (y_1, y_2, \dots, y_m) 。定义向量 α 在向量 β 上的投影 $D_\beta(\alpha)$ 为:

$$D_\beta(\alpha) = \cos(\alpha, \beta) \|\alpha\|。$$

现有的投影法中, 假设两个向量有两个分量 α, β , 我们考虑向量 α 类似于向量 β 的程度时, 可以通过计算向量 α 投影在向量 β 上的长度来计算, 如图 2 所示。

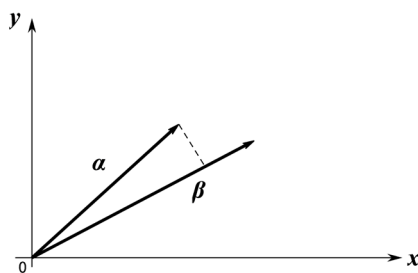


Figure 2. Vector projection diagram

图 2. 向量投影图示

向量 α 投影在向量 β 上的长度越大则向量 α 与 β 的相似程度越高。现假设有三个向量 α, β, γ , 如图 3 所示,

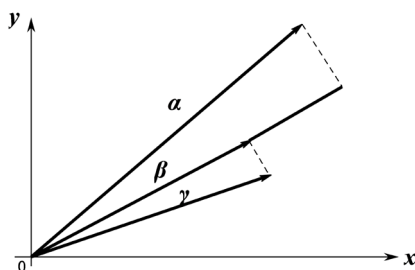


Figure 3. Vector projection comparison
图 3. 向量投影比较

向量 α 投影在向量 β 的长度很长, 向量 γ 与向量 β 更接近, 我们在考虑两个向量的差异时, 通过向量投影到另一向量的长度与被投影向量的模长做差, 若是差值越大, 则认为向量差异越大。通过这种方法, 可知图 3 中三个向量的差异大小被成功区分。

定义 3.6 设两个向量 α, β 有 m 个分量, 并且向量的分量由公理化模糊集表示, 其中 α 表示为 (x_1, x_2, \dots, x_m) , 相应 β 表示为 (y_1, y_2, \dots, y_m) 。定义向量 α 相似于 β 的相似度 $S_\beta(\alpha)$ 为:

$$S_\beta(\alpha) = \frac{1}{1 + |D_\beta(\alpha) - \|\beta\||}$$

当且仅当向量 α 投影在向量 β 长度为向量 β 的模长时, 相似度为最大值 1。

例 3.3 若评价某班同学通过同学们的学习成绩和综合成绩来评价, 语数外总分学习成绩的范围为 [0, 300], 综合成绩的分数范围为 [0, 100], 建立学习成绩论域的模糊划分 $(u_{A_1}(x), u_{A_2}(x), u_{A_3}(x))$, 分别对应自然语言 {差、良、优}, 综合成绩论域的模糊划分为 $(u_{B_1}(x), u_{B_2}(x), u_{B_3}(x))$, 分别对应自然语言 {低, 中等, 高}。隶属度函数如下所示:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{150}x + 1, & x \in [0, 150], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{150}x, & x \in [0, 150], \\ -\frac{1}{150}x + 2, & x \in [150, 300], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{150}x - 1, & x \in [150, 300], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{B_1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{50}x + 1, & x \in [0, 50], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{B_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x, & x \in [0, 50], \\ -\frac{1}{50}x + 2, & x \in [50, 100], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mu_{B_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x - 1, & x \in [50, 100], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

现有甲、乙、丙三名同学，他们的评价为，甲(优，高)，乙(优，中等)，丙(差，低)，分别甲相似于的程度与丙相似于乙的程度。

$$S_Z(\text{甲}) = \frac{1}{1 + |D_Z(\text{甲}) - \|Z\||} = 0.1694,$$

$$S_Z(\text{丙}) = \frac{1}{1 + |D_Z(\text{丙}) - \|Z\||} = 0.0063。$$

从结果来看，甲与乙更加接近，与预期期望一致，证明了投影相似度的有效性。

4. 基于公理化模糊集合的投影相似度多属性决策问题

4.1. 问题描述

模糊多属性决策问题描述为：设一共有 n 个备选方案 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，这些方案由 m 个属性 (c_1, c_2, \dots, c_m) 决定，对这 m 个属性建立模糊划分，生成相应的基本模糊集与相对应的自然语言，通过不同的算子，可以生成新的模糊集和对应的自然语言，用这些自然语言来对属性进行评价。属性的权重 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 为实数，满足 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ 。

4.2. 决策方法

下面建立属性权重为实数，属性值为自然语言的多属性决策模型。

第一步建立决策矩阵。

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

其中， $r_{i,j}$ 代表第 i 个方案第 j 个属性的属性值，我们将专家给出的自然语言评价转化为相对应的公理化模糊集。

第二步确定理想方案 Y 。

$$Y = (y_1^+, y_2^+, \dots, y_n^+),$$

我们令成本型指标属性的下标集为 N_1 ，效益型指标属性的下标为 N_2 。对于效益型指标 $r_{i,j}$ ($j \in N_2$)，我们在取理想方案的时候，选取每个属性基于模糊划分生成的这组基本模糊集中的最大值，使这个效益型指标取最大的模糊集，对于成本型指标 $r_{i,j}$ ($j \in N_1$) 则正好相反，取这组基本模糊集中的最小值。对于

属性 c_i , 设它的模糊划分为 $\tilde{U}_i = \left\{ \mu_{A_i^1}(x), \dots, \mu_{A_i^{n_i}}(x) \right\}$,

则

$$y_j^+ = \max_{1 \leq i \leq n_i} \mu_{A_i^j}, j \in N_2;$$

$$y_j^- = \min_{1 \leq i \leq n_i} \mu_{A_i^j}, j \in N_1.$$

通过上述方法, 我们确定了理想方案。

第三步 计算各个备选方案与理想方案的投影相似度。

我们在前面讨论过分量为公理化模糊集的向量之间的投影相似度, 在多属性决策问题中, 我们可以把各个备选方案当作向量来处理, 同时需要考虑属性的权重问题, 即分量的权重问题, 假设有方案 a_i, a_j , 计算 a_i 类似于 a_j 的相似度, 首先计算方案 a_i 的模长为

$$\|a_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (w_j m_v(r_{i,j}))^2},$$

再计算方案 a_i 与 a_j 的余弦值

$$\cos(a_i, a_j) = \frac{a_i a_j}{\|a_i\| \|a_j\|},$$

其中

$$a_i a_j = w_1^2 m_v(r_{i,1}) \times m_v(r_{j,1}) + w_2^2 m_v(r_{i,2}) \times m_v(r_{j,2}) + \dots + w_m^2 m_v(r_{i,m}) \times m_v(r_{j,m}),$$

计算方案 a_i 投影在方案 a_j 上的长度为

$$D_{a_j}(a_i) = \cos(a_i, a_j) \|a_i\|,$$

最后计算方案 a_i 类似于 a_j 的投影相似度为

$$S_{a_j}(a_i) = \frac{1}{1 + |D_{a_j}(a_i) - \|a_j\||}.$$

通过上述方法可以计算备选方案类似于理想方案的投影相似度。

第四步 按照投影相似度的大小对方案的优劣进行排序。

5. 算例分析

5.1. 决策实例

选用文献[21]中的方法来验证本文提出方法的有效性, 某公司拟对外投资, 可选方案分别为软件外包企业 a_1 , 清洁能源企业 a_2 , 连锁餐饮企业 a_3 , 快递企业 a_4 。由于条件有限, 只能选择一个企业进行投资, 并且投资公司认为决策需考虑以下 4 个指标: 企业近 3 年成长能力 c_1 , 企业潜在的风险 c_2 , 企业未来持续盈利的能力 c_3 , 企业内外部经营环境 c_4 。4 个指标的论域都为 $[0, 100]$, 我们给出相同的模糊划分为 {非常差, 差, 中等, 好, 非常好}, 权重 $w_1 = 0.26, w_2 = 0.24, w_3 = 0.245, w_4 = 0.255$ 。

$$u_{A_i}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{25}x + 1, & x \in [0, 25], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$u_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & x \in [0, 25], \\ -\frac{1}{25}x + 2, & x \in [25, 50], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$u_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 1, & x \in [25, 50], \\ -\frac{1}{25}x + 3, & x \in [50, 75], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$u_{A_4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 2, & x \in [50, 75], \\ -\frac{1}{25}x + 4, & x \in [75, 100], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$u_{A_5}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 3, & x \in [75, 100], \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

其中 $u_{A_1}(x)$ 、 $u_{A_2}(x)$ 、 $u_{A_3}(x)$ 、 $u_{A_4}(x)$ 、 $u_{A_5}(x)$ 分别表示自然语言{非常差, 差, 中等, 好, 非常好}。

步骤一建立决策矩阵

$$\begin{bmatrix} \text{差} & \text{好} & \text{差} & \text{中} \\ \text{非常好} & \text{差} & \text{好} & \text{好} \\ \text{中} & \text{非常差} & \text{好} & \text{差} \\ \text{中} & \text{差} & \text{差} & \text{非常好} \end{bmatrix}$$

步骤二确定理想方案

$$Y = \{\text{非常好, 非常好, 非常好, 非常好}\}。$$

步骤三计算备选方案到理想方案的投影相似度

$$m_v(A_1) = \frac{\int_0^{25} -\frac{1}{25}x \times x + x dx}{\int_0^{25} -\frac{1}{25}x + dx} = 8.33,$$

$$m_v(A_2) = \frac{\int_0^{50} u_{A_2}(x) x dx}{\int_0^{50} u_{A_2}(x) dx} = 25,$$

$$m_v(A_3) = \frac{\int_{25}^{75} u_{A_3}(x) x dx}{\int_{25}^{75} u_{A_3}(x) dx} = 50,$$

$$m_v(A_4) = \frac{\int_{50}^{75} u_{A_4}(x) x dx}{\int_{50}^{75} u_{A_4}(x) dx} = 75,$$

$$m_v(A_5) = \frac{\int_{75}^{100} u_{A_5}(x) x dx}{\int_{75}^{100} u_{A_5}(x) dx} = 91.67。$$

4 个方案的模长为:

$$\|a_1\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (w_1 m_v(r_{1,j}))^2} = 23.7976,$$

$$\|a_2\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (w_2 m_v(r_{2,j}))^2} = 30.2306,$$

$$\|a_3\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (w_3 m_v(r_{3,j}))^2} = 23.4793,$$

$$\|a_4\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (w_4 m_v(r_{4,j}))^2} = 28.088。$$

4 个备选方案与理想方案的投影相似度:

$$S_Y(a_1) = 0.0395, S_Y(a_2) = 0.0621, S_Y(a_3) = 0.0372, S_Y(a_4) = 0.0448。$$

可得 $a_2 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_3$ 。

5.2. 比较分析

比较文献[21]与本文结果, 结果一致, 证明本文方法的有效性。分析本文的数值结果, 其中 a_2 为最优选择, 结果较其它三个被选公司区分性更强, 在使用文献[21]中的方法计算决策信息时, 将专家的评价语言转化为区间数, 没有在严格意义下的数学框架来确定区间数的值。而本文从全局的角度来确定模糊划分生成的公理化模糊集的隶属度, 用在决策的计算中较为准确。

6. 结论

本文基于公理化模糊集合的投影相似度建立了多属性决策模型, 将决策过程中的自然语言量化为对应的公理化模糊集合隶属度函数。隶属度函数满足严格的公理化定义。基于公理化模糊集合的特点, 提出了公理化模糊集合的向量模长和余弦值, 并且考虑模长和方向对向量相似度的影响, 建立了投影相似度。下一步的研究重点将放在权重信息为未知或自然语言表示的情况下。

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 61673320)。

参考文献

- [1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [2] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A. (1970) Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Science*, **17B**, 141-164. <https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141>
- [3] 王应明. 一种多指标决策与评价的方法——投影法[J]. 统计研究, 1998(4): 66-69.
- [4] 王应明. 多指标决策与评价的新方法: 投影法[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(3): 1-4.
- [5] 巩奕成, 任仲宇, 丁飞, 等. 基于直觉梯形模糊数的灰关联投影寻踪动态聚类多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2015(7): 1333-1339.
- [6] 王晓, 刘兮, 陈华友. 一种基于投影的区间直觉模糊信息多属性决策方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(9): 1420-1424.
- [7] 邵良杉, 赵琳琳. 区间直觉模糊信息下的双向投影决策模型[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 571-576.

-
- [8] Yue, C. (2018) Normalized Projection Approach to Group Decision-Making with Hybrid Decision Information. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **9**, 1365-1375. <https://doi.org/10.1007/s13042-017-0650-3>
- [9] Xu, G.-L., Wan, S.-P. and Dong, J.-Y. (2016) A Hesitant Fuzzy Programming Method for Hybrid MADM with Incomplete Attribute Weight Information. *Informatica*, **27**, 863-892. <https://doi.org/10.15388/Informatica.2016.115>
- [10] 吴坚, 董富华, 梁昌勇. 基于投影法的区间型多属性决策两阶段优化模型[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(12): 2393-2397.
- [11] 卫贵武. 基于投影的直觉模糊数多属性决策方法[J]. 管理学报, 2009, 6(9): 1154-1156.
- [12] Harsanyi, J.C. (1976) Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility, Essays on Ethics, Social Behaviour, and Scientific Explanation. *Journal of Political Economy*, **63**, 309-321. <https://doi.org/10.1086/257678>
- [13] Yager, R.R. and Xu, Z. (2006) The Continuous Ordered Weighted Geometric Operator and Its Application to Decision Making. *Fuzzy Sets & Systems*, **157**, 1393-1402. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.12.001>
- [14] 许叶军, 达庆利. TFOWA 算子及其在决策中的应用[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, 36(6): 1034-1038.
- [15] Herrera, F. and Martinez, L. (2000) A 2-Tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **8**, 746-752. <https://doi.org/10.1109/91.890332>
- [16] 姜艳萍, 樊治平. 二元语义信息集结算子的性质分析[J]. 控制与决策, 2003, 18(6): 754-757.
- [17] 刘培德, 刘俊麟, 杨云彬. 基于语言直觉模糊数的 ELECTRE 方法及在决策中的应用[J]. 山东财经大学学报, 2017, 29(1): 82-89.
- [18] 徐泽水, 达庆利. 基于模糊语言评估的多属性决策方法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32(4): 656-658.
- [19] Pan, X.D. and Xu, Y. (2018) Redefinition of the Concept of Fuzzy Set Based on Vague Partition from the Perspective of Axiomatization. *Soft Computing*, **22**, 1777-1789. <https://doi.org/10.1007/s00500-017-2855-5>
- [20] Pan, X.D. and Xu, Y. (2018) Correction to: Redefinition of the Concept of Fuzzy Set Based on Vague Partition from the Perspective of Axiomatization. *Soft Computing*, **22**, 2079. <https://doi.org/10.1007/s00500-018-3061-9>
- [21] 李东辉, 孙贵玲. 一种基于投影法的直觉模糊多属性群决策方法[J]. 轻工学报, 2015(5): 157-160.