Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 973-978
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115111

Hans汉斯

考研数学中求极限方法的总结

徐晓静

沈阳师范大学 辽宁 沈阳
Email: 1748691725@qq.com

收稿日期：2021年4月18日；录用日期：2021年5月20日；发布日期：2021年5月27日

摘 要

极限是数学分析的基础，在数学分析中的连续、可导、微分、定积分、广义积分、级数以及多元函数的积分和微分中等都是运用极限的观点和定义并讨论的。可以说极限论是初等数学和高等数学的分水岭。因此在许多学校的研究生入学考试中求极限问题成了必考题。本篇文章介绍的是几种常见的求极限的计算方法，并通过实例进行分析。

关键词

极限，数列极限，函数极限

The Summary of the Limit Method in the Mathematics of Entrance Examination

Xiaojing Xu

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1748691725@qq.com

Received: Apr. 18th, 2021; accepted: May 20th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

Limit is the basis of mathematical analysis. In the mathematical analysis, the continuity, derivability, differentiation, definite integral, generalized integral, series and the integration and differentiation of multivariate functions are all discussed by using the point of view and definition of limit. It can be said that limit theory is the watershed between elementary mathematics and advanced mathematics. Therefore, in the graduate student entrance examination in many schools, seeking the limit becomes the basic question that must take an examination. This article is introduced several kinds of common limit calculation method through the example to analyze.

文章引用: 徐晓静. 考研数学中求极限方法的总结[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 973-978.
DOI: 10.12677/pm.2021.115111

Keywords

The Limit, Sequence Limit, Function Limit

1. 引言

19 世纪建立的极限理论奠定了微积分的基础[1]，使数学这门古老的学科有了质的飞跃，由此建立起来的理论及其应用开创了一个崭新的数学时代。但是对于数列及函数极限的求解问题，看似简单，但实则方法过于多种多样，往往就是一个比较难一点的极限问题，就会导致学者因选错方法而浪费大量的时间或者根本做不出来。因此本文针对求极限的方法进行总结归纳，给学者梳理出了一些求极限的方法。

2. 利用几种已知公式求极限

2.1. 和差化积公式积化和差公式

解题思路：此方法一般求解的比较简单的极限，比较明显的是两个三角函数相减或相乘的形式。

例 1.1 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

解：由积化和差公式 $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 有

$\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$，又因为 $|\sin x|\le x$，所以有

$2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\to 0$。

故 $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x-1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$。

2.2. 伯努利不等式

已知实数 $x>-1$，当 $n\ge 1$ 时，有 $(1+x)^n\ge 1+nx$；

当 $0\le n\le 1$，有 $(1+x)^n\le 1+nx$。

解题思路：此种类型一般是在求解极限的过程中，所以在这里就不举例说明。

2.3. 泰勒公式[2]

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$$

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)x^{n}}{n!}+o\left(x^{n}\right).$$

解题思路：对于$\frac{0}{0}$型不定式中，如果运用洛必达则比较麻烦。此类题目比较明显的特征是含有e^{x}，$\sin x$，$\cos x$，$\ln\left(1+x\right)$等混在一起的混合运算，此类题大多数是用洛必达做不出来的，而用泰勒公式进行简单的替换就很容易求出来的。

例 1.3 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin x-x\left(1+x\right)}{x^{3}}$

解：由泰勒公式展开到第三项得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin x-x\left(1+x\right)}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^{2}+\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)-x\left(1+x\right)}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o\left(x\right)^{3}}{x^{3}}\right)=\frac{1}{3}$$

3. 利用洛必达法则求极限[3]

定理：对在数列x_n与y_n间有一定关系的商的极限，我们可以用序列的洛比达法则。满足

1) $y_{n+1}>y_{n}$；
2) $\lim_{n\to\infty}y_{n}=\infty$；
3) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n}}{y_{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_{n}}{y_{n+1}-y_{n}}$。

解题思路：此种解题方法适用于$\frac{\infty}{\infty}$、$\frac{0}{0}$形式的极限求法。

例题 2.1 求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}$

令$x_{n}=\ln n$，$y_{n}=n^{2}$，满足洛必达法则的条件，则有$x_{n+1}-x_{n}=\ln\left(n+1\right)-\ln n$，$y_{n+1}-y_{n}=2n+1$，于是$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n+1\right)-\ln n}{2n+1}=0$。

4. 利用单调有界性求极限

单调有界定理[3]：在实数系中，有界的单调数列必有极限。

有上界的递增数列必有极限，有下界的递减数列必有极限。

解题思路：可以用$a_{n}-a_{n-1}$与 0 的关系来判断其增减性，或者根据$\frac{a_{n}}{a_{n-1}}$与 1 的关系来判断其增减性。

例题 3.1 求极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{3}}}}$

解：设数列$\left\{x_{n}\right\}=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{3}}}}$，则有$1<x_{n}$，根据$x_{1}=\sqrt{3}<3$，假设$x_{n}<3$，则$x_{n+1}=\sqrt{3x_{n}}<\sqrt{3\times 3}=3$，由归纳假设知数列$\left\{x_{n}\right\}$有上界，又因为$x_{n+1}=\sqrt{3x_{n}}$，$\frac{x_{n+1}}{x_{n}}=\frac{\sqrt{3x_{n}}}{x_{n}}=\frac{3}{\sqrt{x_{n}}}>1$所以数列$\left\{x_{n}\right\}$单调递增。根据单调有界原理知数列$\left\{x_{n}\right\}$收敛。令$\lim_{n\to\infty}x_{n}=x$，则有$0\le x\le 3$。根据题意有$x=\sqrt{3x}$，解得$x=3$，故$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{3}}}}=3$。

5. 利用迫敛性(两边夹定理)求极限

迫敛性[3]：设收敛数列$\left\{a_{n}\right\}$，$\left\{b_{n}\right\}$都是以a为极限，则数列$\left\{c_{n}\right\}$满足，存在正数N_{0}，当$n>N_{0}$时

有 $a_n \le c_n \le b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 收敛，且满足 $\lim_{n\to\infty} c_n = a$。

解题思路： 一般适用于较复杂的通项。首先要把从 x_n 的表达式写出来，然后通过放缩法找到两个有相同极限值的数列。

例题 4.1 求极限 $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

解：因为 $1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$。由追敛性得 $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$。

6. 利用积分法求极限[4]

解题思路： 有些数列通项中含有 $n!$ 的数列，极限很难直接利用一些公式去求，但是如果能转化成定积分形式的话，计算就相对比教简单了。

例题 5.1 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{n+(n+1)}\right)$

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{n+(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

例题 5.2 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$

解：令 $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$，取对数则有 $\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$，所以 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{n+(n+1)}\right) = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$。

注： 对于一些乘积形式的数列或函数极限问题，通常是通过取对数的方法把乘积形式转化为和的形式，再求极限。

7. 利用级数收敛的必要条件求极限

定理： 若级数 $\sum u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

判断正项级数收敛的方法：

1) 若 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0，及常数 q，$(0<q<1)$，若对一切 $n > N_0$，成立不等式 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$，则级数 $\sum u_n$ 收敛。

2) 若 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0，及常数 l，$(0<l<1)$，若对一切 $n > N_0$，成立不等式 $\sqrt[n]{u_n} \le l < 1$，则级数 $\sum u_n$ 收敛。

例题 6.1 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!5^n}$

解：令 $u_n = \frac{n^n}{n!5^n}$，则根据达郎贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!5^{n+1}}\cdot\frac{n!5^n}{n^n} = \frac{1}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{5} < 1,$$

根据级数收敛的必要条件，可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!5^n}=0$。

8. 利用施笃兹(Stolz)定理求极限[4]

定理： 数列$\{y_n\}$单调递增$\to\infty$，如果有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$ (可以无穷大)，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$

例题 7.1 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}$

此极限满足 Stolz 的条件，令

令 $x_n=1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}$， $y_n=n$； $x_n-x_{n-1}=\sqrt[n]{n}$， $y_n-y_{n-1}=1$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1}=1$$

9. 通项公式法求极限 [1]

定理： 已知数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$。则可以构造特征方程 $x^2+px+q=0$。根据 $\Delta=p^2-4q$ 来分类

1) $\Delta=0$ 方程有两个相等的实数根，设为 x_0，则 $x_n=(nC_1+C_2)x_0^n$ (其中 C_1， C_2 为常数)；
2) $\Delta\neq 0$ 方程有两个不相等的实数根设为 x_1， x_2 则 $x_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n$ (其中 C_1， C_2 为常数)。

例题 8.1 已知数列$\{a_n\}$，满足 $a_0=0$， $a_1=1$， $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$。

解：其特征方程为：$x=\frac{x+1}{2}$，解得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$，所以求得通向公式为 $a_n=C_1+C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$；把 $a_0=0$，$a_1=1$ 带入 a_n，

解得： $C_1=\frac{2}{3}$， $C_2=-\frac{2}{3}$， $a_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$。因此有 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$。

10. 利用压缩映射原理求极限[5] (完备度量空间上的不动点定理)

命题： 完备距离空间上的压缩映射具有唯一不动点。

解题此路：

1) 证明数列收敛只需满足 $|x_{n+1}-x_n|\le r|x_n-x_{n-1}|$，其中 r 满足 $0<r<1$，则数列收敛。
2) $|x_{n+1}-x_n|\le f'(\xi)|x_{n+1}-x_n|\le r|x_{n+1}-x_n|$， $0<r<1$，解方程 $f(x^*)=x^*$ 所得解即为不动点。

例 9.1 设 $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ 数列$\{x_n\}$如下递归公式定义： $x_0=1$， $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=(0,1,2\cdots)$ 求极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

解：显然 $x_n>1$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续可导， $|f'(x)|=\left|\frac{1}{(x+2)^2}\right|<\frac{1}{9}$，满足 $|f'(\xi)|<1$，故$\{x_n\}$收敛。

又因为满足 $x_{n+1}=f(x_n)$。所以设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\frac{a+1}{a+2}$，解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 舍去故有 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

11. 结论

求数列和函数极限的方法并不局限于以上几种，方法是灵活多样的。而且求极限的方法往往是一题

[1] 李扬. 李扬数学分析强化讲义. 2021.

多解的，但在本篇文章中我并有涉及。根据极限问题，针对不同的题目选择最优的方法将是我今后继续研究的方向。

参考文献

[1] 李铭辉. 求数列极限的若干方法[J]. 明日风尚, 2018(17): 273.

[2] 黄辉. 巧用等价无穷小与泰勒公式求极限[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2019, 32(4): 50-51+54.

[3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[5] 王文静. 考研中极限求解方法的讨论[J]. 现代职业教育, 2021(9): 178-179.