Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1112-1120
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116125

r个点并圈的补图的色等价图类

李丹阳*，**马海成**†

青海民族大学数学与统计学院，青海 西宁
Email: 2390803677@qq.com, †qhmymhc@163.com

收稿日期：2021年5月8日；录用日期：2021年6月9日；发布日期：2021年6月16日

摘 要

两个图G 和H 色等价当且仅当它们的补图伴随等价. 图G 色唯一当且仅当$\overline{G}$ 伴随唯一. 在这篇文章中, 我们计算了$rK_1 \cup C_m (r \geq 1, m \geq 3)$ 的伴随等价图的个数, 并刻画了它的伴随等价图类. 因而, 我们也计算了$\overline{rK_1 \cup C_m}$ 的色等价图的个数, 刻画了$\overline{rK_1 \cup C_m}$ 的色等价图类.

关键词

色多项式，伴随多项式，色等价，伴随等价，色唯一，伴随唯一

The Chromatic Equivalence Classes of the Complements of Union Graphs of r Vertices and a Cycle

Danyang Li*, **Haicheng Ma**†

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Nationalities University, Xining Qinghai
Email: 2390803677@qq.com, †qhmymhc@163.com

Received: May 8^{th}, 2021; accepted: Jun. 9^{th}, 2021; published: Jun. 16^{th}, 2021

* 第一作者。
† 通信作者。

文章引用: 李丹阳, 马海成. r个点并圈的补图的色等价图类[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1112-1120.
DOI: 10.12677/pm.2021.116125

Abstract

Two graphs G and H are chromatically equivalent if and only if $\overline{G}$ and $\overline{H}$ are adjointly equivalent. G is chromatically unique if and only if $\overline{G}$ adjointly unique. In this paper, the number of the adjoint equivalence graphs of $rK_1 \cup C_m (r \geq 1, m \geq 3)$ is calculated, and the adjoint equivalence classes of $rK_1 \cup C_m$ can also be characterized. As a result, the number of the chromatic equivalence graphs of $\overline{rK_1 \cup C_m}$ is calculated, and the chromatic equivalence classes of $\overline{rK_1 \cup C_m}$ can also be characterized.

Keywords

Chromatic Polynomial, Adjoint Polynomial, Chromatically Equivalent, Adjointly Equivalent, Chromatically Unique, Adjointly Unique

1. 介绍

本文仅考虑有限无向的简单图. 对于图G, $\overline{G}, V(G), E(G), v(G), \chi(G)$ 分别表示图G 的补图, 点集, 边集, 阶数和色数. K_n, P_n 和$C_n (n \geq 3)$ 分别表示n 个点的完全图, 路和圈, K_1 表示一个孤立点, D_n 表示C_3 上的一点与路P_{n-2} 的一个端点黏结后得到的图, $T_{i,j,k}$ 表示只有一个3 度点, 三个1 度点, 且这个3 度点到三个1 度点的距离分别为i, j, k 的树, $N_G(v)$ 表示G 中所有与点v 邻接的点构成的集合, $G \cup H$ 表示图G 与图H 的不交并, mG 表示m 个G 的不交并.

对于正整数k, 如果$V(G)$ 的一个划分$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中每个A_i 是非空独立集, 则这个划分称为图G 的一个$k-$独立划分. 令$\alpha(G, k)$ 表示图G 的所有$k-$ 独立划分的数目, 在文 [1]中定义图G的色多项式为

$$P(G, \lambda) = \sum_{k=1}^{v(G)} \alpha(G, k)(\lambda)_k,$$

这里$(\lambda)_k = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + 1), (k \geq 1)$.

如果两个图G 和H 满足$P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$, 则称这两个图是色等价的, 简记为$G \sim_P H$. 明显地, 关系$\sim_P$ 是所有图构成的集合中的一个等价关系. 与图G 色等价的所有图构成的集合记为$[G]_P$,

称为图G 的色等价图类. 如果$[G]_P = \{G\}$, 则称图G 是色唯一的. 对于给定的图G, 确定$[G]_P$ 是一个非常有趣而困难的问题. 已经有许多图类的色等价图类被确定(见 [2]). 为了研究图的色性和色多项式, 1987年刘儒英在 [3]中引入了伴随多项式的概念,

令$P(\overline{G}, \lambda) = \sum\limits_{i=1}^{v(G)} \alpha(\overline{G}, i)(\lambda)_i$ 为图$\overline{G}$ 的色多项式, 则

$$h(G, x) = \sum_{i=1}^{v(G)} \alpha(\overline{G}, i)x^i$$

叫做图G 的伴随多项式.

图G 和H 伴随等价当且仅当$\overline{G}$ 和$\overline{H}$ 色等价. 令$[G] = \{H|H \sim G\}$ 为G 的伴随等价图类. 已经发现很多图的色等价图类及很多色唯一的图 [1, 4–7], 但是能够完整刻画图的色等价类的文章还是很少的. 在 [5]中刻画了集合$[\overline{P_n}]_P$. 在 [8]中刻画了集合$[\overline{aK_1 \cup bC_3 \bigcup\limits_{1\le i\le s} P_{l_i}}]_P$ 和$[\overline{aC_3 \bigcup\limits_{1\le i\le s} P_{u_i} \bigcup\limits_{1\le j\le t} C_{v_j}}]_P$, 这里$a, b$ 是任意的非负整数, l_i 是偶数, $u_i \ge 3$ 并且$u_i \ne 4(mod 5)$. 以$\beta(G)$ 表示伴随多项式$h(G, x)$ 的最小实根. 在 [9]中刻画了$\beta(G) > -4$ 的所有图. 在这篇文章中我们刻画了集合$[rK_1 \cup C_m]$, 进而刻画了集合$[\overline{rK_1 \cup C_m}]_P$.

2. 若干引理

引理 1 [8] (i)$G \sim_P H$ 当且仅当$\overline{G} \sim \overline{H}$;

(ii)$[G]_P = \{H|\overline{H} \in [\overline{G}]\}$;

(iii)图G 色唯一当且仅当$\overline{G}$ 伴随唯一.

引理 2 [1,3] 设图G 有k个连通分支：$G_1, G_2, \cdots G_k$, 则

$$h(G, x) = \prod_{i=1}^{k} h(G_i, x).$$

对于图G 的任意一条边$e = uv$, 定义图$G * e$ 如下:

$V(G * e) = \{V(G) \setminus \{u, v\}\} \cup \{x\}$,

$E(G * e) = \{e \in E(G)|\text{边}e\text{不关联点}u\text{或}v\} \cup \{xy|y \in N_G(u) \cap N_G(v)\}$,

其中$x \notin V(G)$.

引理 3 [1,10] 任意的$e \in E(G), h(G) = h(G - e) + h(G * e)$, 其中$G - e$ 表示从图G 中删除边e.

引理 4 [6]设G 是一个连通图, 则$\beta(G) > -4$ 当且仅当

$G \in \Gamma = \{K_1, P_n(n \ge 2), T_{1,1,k}(k \ge 1), T_{1,2,i}(2 \le i \le 4), C_m(m \ge 3), D_l(4 \le l \le 7)\}$.

引理 5 [9]

(1)$P_{2m+1} \sim P_m \cup C_{m+1}(m \ge 3)$.

(2)$T_{1,1,n} \sim K_1 \cup C_{n+2}(n \ge 2)$.

(3)$T_{1,2,n} \sim K_1 \cup D_{n+3}$.

(4)$P_4 \sim K_1 \cup C_3$.

(5)$K_1 \cup P_5 \sim P_2 \cup T_{1,1,1}$.

(6)$C_4 \sim D_4$.

(7)$P_2 \cup C_6 \sim P_3 \cup D_5$.

(8)$P_2 \cup C_9 \sim P_5 \cup D_6$.

(9)$K_1 \cup C_9 \sim T_{1,1,1} \cup D_6$.

(10)$P_2 \cup C_{15} \sim P_5 \cup C_5 \cup D_7$.

(11)$K_1 \cup C_{15} \sim T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7$.

(12)$C_{15} \cup D_6 \sim C_5 \cup C_9 \cup D_7$.

引理 6 [9](1)如果$m > n$, 则$\beta(P_m) < \beta(P_n)$.

(2)$\beta(C_m) = \beta(P_{2m-1})$, 其中$m \geq 4$.

(3)$\beta(T_{1,1,n}) = \beta(C_{n+2}) = \beta(P_{2n+3})$, 其中$n \geq 2$.

(4)$\beta(T_{1,2,n}) = \beta(D_{n+3})$.

(5)$\beta(C_3) = \beta(P_4)$.

(6)$\beta(T_{1,1,1}) = \beta(P_5)$.

(7)$\beta(C_4) = \beta(T_{1,1,2}) = \beta(D_4) = \beta(P_7)$.

(8)$\beta(C_6) = \beta(T_{1,1,4}) = \beta(D_5) = \beta(T_{1,2,2}) = \beta(P_{11})$.

(9)$\beta(C_9) = \beta(T_{1,1,7}) = \beta(D_6) = \beta(T_{1,2,3}) = \beta(P_{17})$.

(10)$\beta(C_{15}) = \beta(T_{1,1,13}) = \beta(D_7) = \beta(T_{1,2,4}) = \beta(P_{29})$.

引理 7 [6] 设G 是具有$\beta(G) > -4$ 的一个图, 则G 伴随唯一当且仅当

$G = kK_1 \cup m_2P_2 \cup m_3P_3 \cup m_5P_5 \cup [\cup_{i\geq 3} m_{2i}P_{2i}] \cup n_3C_3 \cup [\cup_{j\geq 5} n_jC_j] \cup [\cup_{5\leq l\leq 7} d_lD_l] \cup tT_{1,1,1}$使得$kn_j = kd_l = km_5 = m_in_{i+1} = m_2n_6 = m_2n_9 = m_2n_{15} = m_2t = m_3d_5 = m_5d_6 = td_6 = m_5n_5d_7 = tn_5d_7 = n_{15}d_6 = n_5n_9d_7 = 0$, 这里$k, m_i, n_j, d_l, t$ 是非负整数.

为了方便, 我们用$\delta(G)$ 表示图G 的所有不同构的伴随等价图的个数. $\delta(G) = 1$ 当且仅当G 是伴随唯一的.

3. 主要结果

定理 1 整数$r \geq 1$. $(i)m \neq 3, 4, 9, 15$, 则$\delta(rK_1 \cup C_m) = 2$, $[rK_1 \cup C_m] = \{rK_1 \cup C_m, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,m-2}\}$.

(ii) $\delta(rK_1 \cup C_3) = 2$, $[rK_1 \cup C_3] = \{rK_1 \cup C_3, (r-1)K_1 \cup P_4\}$.

(iii) $\delta(rK_1 \cup C_4) = 3$, $[rK_1 \cup C_4] = \{rK_1 \cup C_4, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,2}, rK_1 \cup D_4\}$.

(iv)

$$\delta(K_1 \cup C_9) = \begin{cases} 3, & r = 1, \\ 4, & r \geq 2. \end{cases}$$

$$[K_1 \cup C_9] = \begin{cases} \{K_1 \cup C_9, T_{1,1,7}, T_{1,1,1} \cup D_6\}, & r = 1, \\ \{rK_1 \cup C_9, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,7}, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup D_6, & \\ (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,2,3}\}, & r \geq 2. \end{cases}$$

(v)

$$\delta(K_1 \cup C_{15}) = \begin{cases} 3, & r = 1, \\ 5, & r = 2, \\ 6, & r \geq 3. \end{cases}$$

$$[K_1 \cup C_{15}] = \begin{cases} \{K_1 \cup C_{15}, T_{1,1,13}, T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7\}, & r = 1, \\ \{2K_1 \cup C_{15}, K_1 \cup T_{1,1,13}, K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7, & \\ T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3} \cup D_7, T_{1,1,1} \cup T_{1,2,4} \cup C_5\}, & r = 2, \\ \{rK_1 \cup C_{15}, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,13}, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7, & \\ (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3} \cup D_7, (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,2,4} \cup C_5, & \\ (r-3)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3} \cup T_{1,2,4}\}, & r \geq 3. \end{cases}$$

证明: 设$H \sim rK_1 \cup C_m$, H_1 是H 的一个连通分支, $\beta(H_1) = \beta(rK_1 \cup C_m) = \beta(C_m)$, $H = H_1 \cup H_2$.

(i)**情形1.**当$m \neq 3, 4, 6, 9, 15$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_m, T_{1,1,m-2}, P_{2m-1}$.

①当$H_1 = C_m$ 时, 由$rK_1 \cup C_m \sim C_m \cup H_2$ 得$H_2 \sim rK_1$, 由引理7 知rK_1 伴随唯一, 则$H_2 = rK_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,m-2}$ 时, 由$T_{1,1,m-2} \cup H_2 \sim rK_1 \cup C_m \sim (r-1)K_1 \cup T_{1,1,m-2}$ 得$H_2 \sim (r-1)K_1$, 进一步得到$H_2 = (r-1)K_1$.

③当$H_1 = P_{2m-1}$ 时, 由$rK_1 \cup C_m \sim P_{2m-1} \cup H_2 \sim P_{m-1} \cup C_m \cup H_2$得$rK_1 \sim P_{m-1} \cup H_2$, 由引理7 知$rK_1$ 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m \neq 3, 4, 6, 9, 15$ 时, H有两个: $rK_1 \cup C_m, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,m-2}$.

情形2.当$m = 6$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_6, T_{1,1,4}, D_5, T_{1,2,2}, P_{11}$.

①当$H_1 = C_6$ 时, 由$rK_1 \cup C_6 \sim C_6 \cup H_2$ 得$H_2 = rK_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,4}$ 时, 由$rK_1 \cup C_6 \sim T_{1,1,4} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_6 \cup H_2$ 得$H_2 = (r-1)K_1$.

③当$H_1 = D_5$ 时, 由$rK_1 \cup C_6 \sim D_5 \cup H_2$, 由引理5(7) 进一步得$P_3 \cup rK_1 \cup C_6 \sim P_3 \cup D_5 \cup H_2 \sim P_2 \cup C_6 \cup H_2$ 得$P_3 \cup rK_1 \sim P_2 \cup H_2$, 由引理7 知$P_3 \cup rK_1$ 伴随唯一, 所以这样的H_2 是不存在的.

④当$H_1 = T_{1,2,2}$ 时, 由$rK_1 \cup C_6 \sim T_{1,2,2} \cup H_2 \sim K_1 \cup D_5 \cup H_2$, 由引理5(7) 进一步得$P_3 \cup rK_1 \cup C_6 \sim P_3 \cup D_5 \cup K_1 \cup H_2 \sim P_2 \cup C_6 \cup K_1 \cup H_2$ 得$P_3 \cup (r-1)K_1 \sim P_2 \cup H_2$, 由引理7 知$P_3 \cup (r-1)K_1$ 伴随唯一, 所以这样的H_2 是不存在的.

⑤当$H_1 = P_{11}$ 时, 由$rK_1 \cup C_6 \sim P_{11} \cup H_2 \sim P_5 \cup C_6 \cup H_2$ 得$rK_1 \sim P_5 \cup H_2$, 由引理7 知rK_1 伴随唯一, 所以这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 6$ 时, H有两个: $rK_1 \cup C_6, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,4}$.

综上所述, 当$m \neq 3, 4, 9, 15$ 时, H有两个: $rK_1 \cup C_m, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,m-2}$.

(ii)当$m = 3$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_3, P_4$.

①当$H_1 = C_3$ 时, 由$rK_1 \cup C_3 \sim C_3 \cup H_2$ 得$H_2 = rK_1$.

②当$H_1 = P_4$ 时, 由$rK_1 \cup C_3 \sim P_4 \cup H_2 \sim K_1 \cup C_3 \cup H_2$ 得$H_2 = (r-1)K_1$.

故当$m = 3$ 时, H有两个: $rK_1 \cup C_3, (r-1)K_1 \cup P_4$.

(iii)当$m = 4$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_4, T_{1,1,2}, D_4, P_7$.

①当$H_1 = C_4$ 时, 由$rK_1 \cup C_4 \sim C_4 \cup H_2$ 得$H_2 = rK_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,2}$ 时, 由$rK_1 \cup C_4 \sim T_{1,1,2} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_4 \cup H_2$ 得$H_2 = (r-1)K_1$.

③当$H_1 = D_4$ 时, 由$rK_1 \cup C_4 \sim D_4 \cup H_2 \sim C_4 \cup H_2$ 得$H_2 = rK_1$.

④当$H_1 = P_7$ 时, 由$rK_1 \cup C_4 \sim P_7 \cup H_2 \sim P_3 \cup C_4 \cup H_2$ 得$rK_1 \sim P_3 \cup H_2$, 由引理7 知rK_1 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 4$ 时, H有三个: $rK_1 \cup C_4, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,2}, rK_1 \cup D_4$.

(iv) 当$m = 9$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_9, T_{1,1,7}, D_6, T_{1,2,3}, P_{17}$.

情形1.当$r = 1$ 时:

①当$H_1 = C_9$ 时, 由$K_1 \cup C_9 \sim C_9 \cup H_2$ 得$H_2 = K_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,7}$ 时, 由$K_1 \cup C_9 \sim T_{1,1,7} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_9 \cup H_2$ 得H_2 为空图.

③当$H_1 = D_6$ 时, 由$D_6 \cup H_2 \sim K_1 \cup C_9 \sim T_{1,1,1} \cup D_6$ 得$H_2 \sim T_{1,1,1}$, 由引理7 知$T_{1,1,1}$ 伴随唯一, 则$H_2 = T_{1,1,1}$.

④当$H_1 = T_{1,2,3}$ 时, 由$K_1 \cup C_9 \sim T_{1,2,3} \cup H_2 \sim K_1 \cup D_6 \cup H_2$得$C_9 \sim D_6 \cup H_2$, 由引理7 知$C_9$ 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

⑤当$H_1 = P_{17}$ 时, 由$K_1 \cup C_9 \sim P_{17} \cup H_2 \sim P_8 \cup C_9 \cup H_2$ 得$K_1 \sim P_8 \cup H_2$, 由引理7 知K_1 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 9(r = 1)$ 时, H有三个: $K_1 \cup C_9, T_{1,1,7}, T_{1,1,1} \cup D_6$.

情形2.当$r = 2$ 时, 与情形1类似, 略.

情形3.当$r \geq 3$ 时:

①当$H_1 = C_9$ 时, 由$rK_1 \cup C_9 \sim C_9 \cup H_2$ 得$H_2 = rK_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,7}$ 时, 由$rK_1 \cup C_9 \sim T_{1,1,7} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_9 \cup H_2$ 得$H_2 = (r-1)K_1$.

③当$H_1 = D_6$ 时, 由$D_6 \cup H_2 \sim rK_1 \cup C_9 \sim (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup D_6$ 得$H_2 \sim (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1}$, 由引理7 知$(r-1)K_1 \cup T_{1,1,1}$ 伴随唯一, 则$H_2 = (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1}$.

④当$H_1 = T_{1,2,3}$ 时, 由$T_{1,2,3} \cup H_2 \sim rK_1 \cup C_9 \sim (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup D_6 \sim (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,2,3}$得$H_2 \sim (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1}$, 由引理7 知($(r-2)K_1 \cup T_{1,1,1}$ 伴随唯一, 则$H_2 = (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1}$.

⑤当$H_1 = P_{17}$ 时, 由$rK_1 \cup C_9 \sim P_{17} \cup H_2 \sim P_8 \cup C_9 \cup H_2$ 得$rK_1 \sim P_8 \cup H_2$, 由引理7 知rK_1 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 9$ 时, H有四个: $rK_1 \cup C_9, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,7}, (r-1)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup D_6, (r-2)K_1 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,2,3}$.

(v)当$m = 15$ 时, 由引理6 知, $H_1 = C_{15}, T_{1,1,13}, D_7, T_{1,2,4}, P_{29}$.

情形1.当$r = 1$ 时:

①当$H_1 = C_{15}$ 时, 由$K_1 \cup C_{15} \sim C_{15} \cup H_2$ 得$H_2 = K_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,13}$ 时, 由$K_1 \cup C_{15} \sim T_{1,1,13} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_{15} \cup H_2$ 得H_2 为空图.

③当$H_1 = D_7$ 时, 由$D_7 \cup H_2 \sim K_1 \cup C_{15} \sim T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7$ 得$H_2 \sim T_{1,1,1} \cup C_5$, 由引理7 知$T_{1,1,1} \cup C_5$ 伴随唯一, 则$H_2 = T_{1,1,1} \cup C_5$. .

④当$H_1 = T_{1,2,4}$ 时, 由$K_1 \cup C_{15} \sim T_{1,2,4} \cup H_2 \sim K_1 \cup D_7 \cup H_2$得$C_{15} \sim D_7 \cup H_2$, 由引理7 知$C_{15}$ 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

⑤当$H_1 = P_{29}$ 时, 由$K_1 \cup C_{15} \sim P_{29} \cup H_2 \sim P_{14} \cup C_{15} \cup H_2$ 得$K_1 \sim P_{14} \cup H_2$, 由引理7 知K_1 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 15(r = 1)$ 时, H有三个: $K_1 \cup C_{15}, T_{1,1,13}, T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7$.

情形2.当$r = 2$ 时:

①当$H_1 = C_{15}$ 时, 由$2K_1 \cup C_{15} \sim C_{15} \cup H_2$ 得$H_2 = 2K_1$.

②当$H_1 = T_{1,1,13}$ 时, 由$2K_1 \cup C_{15} \sim T_{1,1,13} \cup H_2 \sim K_1 \cup C_{15} \cup H_2$ 得$H_2 = K_1$.

③当$H_1 = D_7$ 时, 由$D_7 \cup H_2 \sim 2K_1 \cup C_{15} \sim K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7$ 得$H_2 \sim K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5$, 由引理5 知$K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \sim T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3}$, 进一步由引理7 知$H_2 = K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5, T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3}$.

④当$H_1 = T_{1,2,4}$ 时, 由$T_{1,2,4} \cup H_2 \sim 2K_1 \cup C_{15} \sim K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7 \sim T_{1,1,1} \cup C_5 \cup T_{1,2,4}$ 得$H_2 \sim T_{1,1,1} \cup C_5$, 由引理7 知$T_{1,1,1} \cup C_5$ 伴随唯一, 则$H_2 = T_{1,1,1} \cup C_5$.

⑤当$H_1 = P_{29}$ 时, 由$2K_1 \cup C_{15} \sim P_{29} \cup H_2 \sim P_{14} \cup C_{15} \cup H_2$ 得$2K_1 \sim P_{14} \cup H_2$, 由引理7 知$2K_1$ 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m = 15(r = 2)$ 时, H有五个: $2K_1 \cup C_{15}, K_1 \cup T_{1,1,13}, K_1 \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7, T_{1,1,1} \cup T_{1,1,3} \cup D_7, T_{1,1,1} \cup C_5 \cup T_{1,2,4}$.

情形3.当$r=3$ 时, 与情形2类似, 略.

情形4.当$r\geq 4$ 时:

①当$H_1=C_{15}$ 时, 由$rK_1\cup C_{15}\sim C_{15}\cup H_2$ 得$H_2=rK_1$.

②当$H_1=T_{1,1,13}$ 时, 由$rK_1\cup C_{15}\sim T_{1,1,13}\cup H_2\sim K_1\cup C_{15}\cup H_2$ 得$H_2=(r-1)K_1$.

③当$H_1=D_7$ 时, 由$D_7\cup H_2\sim rK_1\cup C_{15}\sim (r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7$ 得$H_2\sim (r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5$, 由引理5 知$(r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\sim (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}$, 进一步由引理7 知$H_2=(r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5, (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}$.

④当$H_1=T_{1,2,4}$ 时, 由$T_{1,2,4}\cup H_2\sim rK_1\cup C_{15}\sim (r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7\sim (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup T_{1,2,4}$ 得$H_2\sim (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5$, 由引理5 知$(r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\sim (r-3)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}$, 进一步由引理7 知$H_2=(r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5, (r-3)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}$.

⑤当$H_1=P_{29}$ 时, 由$rK_1\cup C_{15}\sim P_{29}\cup H_2\sim P_{14}\cup C_{15}\cup H_2$ 得$rK_1\sim P_{14}\cup H_2$, 由引理7 知rK_1 伴随唯一, 则这样的H_2 是不存在的.

故当$m=15$ 时, H有六个：$rK_1\cup C_{15}, (r-1)K_1\cup T_{1,1,13}, (r-1)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7, (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}\cup D_7, (r-2)K_1\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup T_{1,2,4}, (r-3)K_1\cup T_{1,1,1}\cup T_{1,1,3}\cup T_{1,2,4}$.

推论 1 对于定理1 中m 的不同类型, $[\overline{rK_1\cup C_m}]_P$ 就是定理1 所述的每个集合中图的补图构成的集合.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11561056, 11661066)，青海省自然科学基金资助项目(2016-ZJ-914)。

参考文献

[1] Liu, R.Y. (1997) Adjoint Polynomials and Chromatically Unique Graphs. *Discrete Mathematics*, **172**, 85-92. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00271-3

[2] Dong, F.M., Koh, K.M. and Teo, K.T. (2005) Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graph. World Scientific, London.

[3] Liu, R.Y. (1987) A New Method to Find Chromatic Polynomial of Graph and Its Applications. *Chinese Science Bulletin*, **32**, 1508-1509. (In Chinese, English Summary)

[4] Zhao, H., Huo, B. and Liu, R. (2000) Chromaticity of the Complements of Paths. *Journal of Mathematical Study*, **33**, 345-353.

[5] Ye, C.F. and Li, N.Z. (2002) Graphs with Chromatic Polynomial $\sum_{1\leq m_0} lm_0-1(\lambda)_l$. *Discrete Mathematics*, **259**, 369-381. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00592-7

[6] Zhao, H.X., Li, X.L., Zhang, S.G. and Liu, R.Y. (2004) On the Minimum Real Roots of the σ-Polynomials and Chromatic Uniqueness of Graphs. *Discrete Mathematics*, **281**, 277-294. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.010

[7] Ye, C.F. and Yang, W.J. (2004) The Graphs with the Same Chromatic Partitions as the Complement of $T_{1,2,n}$. *Journal of Northeast Normal University*, **36**, 18-26.

[8] Dong, F.M., Teo, K.L., Little, C.H.C. and Hendy, M.D. (2002) Chromaticity of Some Families of Dense Graphs. *Discrete Mathematics*, **258**, 303-321. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00355-2

[9] Ma, H.C. and Ren, H.Z. (2008) The Chromatic Equivalence Classes of the Complements of Graphs with the Minimum Real Roots of Their Adjoint Polynomials Greater Than –4. *Discrete Mathematics*, **308**, 1830-1836.

[10] Du, Q.Y. (1996) Chromaticity of the Complements of Paths and Cycles. *Discrete Mathematics*, **162**, 109-125. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00308-J