Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1130-1136
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116127

Hans汉斯

平均曲率型方程的全局梯度估计

阿迪莱·玉苏普，韩　菲，马春梅

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: 1772944943@qq.com

收稿日期：2021年5月8日；录用日期：2021年6月10日；发布日期：2021年6月17日

摘　要

本文通过选取合适的辅助函数，考虑三种情况并利用极值原理来证平均曲率型方程的全局梯度估计。

关键词

平均曲率型方程，梯度估计，极值原理

Global Gradient Estimate of the Mean Curvature Type Equation

Adilai·Yusupu, Fei Han, Chunmei Ma

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: 1772944943@qq.com

Received: May 8th, 2021; accepted: Jun. 10th, 2021; published: Jun. 17th, 2021

Abstract

In this paper, by selecting the appropriate auxiliary function, three cases are considered and the extremum principle is used to prove the global gradient estimation of the mean curvature type equation.

Keywords

Mean Curvature Type Equation, Gradient Estimation, Extremum Principle

文章引用: 阿迪莱·玉苏普，韩菲，马春梅. 平均曲率型方程的全局梯度估计[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1130-1136.
DOI: 10.12677/pm.2021.116127

1. 引言

平均曲率方程是几何偏微分方程中较为基础和重要的一类方程，对给定的平均曲率方程的内部梯度估计和全局梯度估计已经被广泛的研究了。Bombieri [1]等人首先利用测试函数技巧和图上的 Sobolev 不等式，对高维的极小图曲面得到了极小曲面方程的内部梯度估计，在 1970 年 Ladyzhenskaya 和 Ural'Tseva [2]运用了测试函数的方法对于一般的平均曲率方程得到了内部梯度估计，详细过程请参见文献 Gilbarg [3]。

在文献[4]中，Wang 考虑了如下的平均曲率方程

$$a_{ij}u_{ij} =: \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1+|\nabla u|^2}\right)u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} \tag{1}$$

他对于方程(1)内部梯度估计的证明有如下结果：

定理 1. 设 $u \in C^3(B_r(0))$ 是方程(1)的一个非负解，当 $|H(x)| \le C_0$，并且 $|\nabla H(x)| \le C_0$，则有

$$|\nabla u(0)| \le \exp\left(C_1 + C_2\frac{M^2}{r^2}\right)$$

其中 $M = \sup\limits_{B_r(0)} u(x)$，$C_1$ 依赖于 n，M 和 C_0；C_2 依赖于 n，和 C_0。

在文献[5]中王聪涵进一步展开问题的研究，尝试得出类似的内部梯度估计结果，并研究平均曲率型方程的梯度估计时用到了几个极值原理，具体的证明参见[6]。他考虑了以下平均曲率型方程并证明出了定理 2。

$$a_{ij}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \alpha u$$

定理 2. 设 $u \in C^3(B_r(0))$，$u \ge 0$ 满足方程

$$a_{ij}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \alpha u$$

当 $|H(x)| \le C_0$，$|\nabla H(x)| \le C_0$，则有

$$|\nabla u(0)| \le \exp\left(C_1 + C_2|\alpha| + C_3\frac{M^2}{r^2} + C_3\frac{M^2}{r^2}\right)$$

其中 $M = \sup\limits_{B_r(0)} u(x)$，$C_1$ 依赖于 n，M 和 C_0；C_2 依赖于 n，和 C_0。

定理 3. 设 Ω 是在 R^n 中的有界领域具有 C^1 边界，$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$，满足

$$\Delta u - \frac{u_i u_j}{1+|\nabla u|^2}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} \text{ in } \Omega$$

则

$$\sup_{\Omega}|\nabla u| \le \left(\sup_{\partial\Omega}|\nabla u| + \sup_{\Omega}|H| + 2\right)\exp\left\{\left(\sup_{\Omega}|\nabla H| + c_0\right)\operatorname*{osc}_{\Omega} u\right\}$$

其中 c_0 是正常数。

本文主要在定理 3 平均曲率方程的全局梯度估计的基础上研究平均曲率型方程的全局梯度估计，即考虑如下平均曲率型方程

$$a_{ij}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \alpha u.$$

2. 主要结果

本节，对于平均曲率型方程

$$a_{ij}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \alpha u$$

其中 $H(x)\in C^1(\bar{\Omega})$， $u_{ij}=u_{x_i x_j}$ ， $\alpha\in R$ 且 $\alpha\ge 0$，主要证明以下定理。

定理 4 设 Ω 是在 R^n 中的有界领域具有 C^1 边界， $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^3(\Omega)$， $u\ge 0$ 满足

$$\Delta u - \frac{u_i u_j}{1+|\nabla u|^2}u_{ij} = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \alpha \mathrm{u} \qquad \text{in } \Omega$$

则

$$\sup_{\Omega}|\nabla u| \le \left(\sup_{\partial\Omega}|\nabla u| + \sup_{\Omega}|H|\right)\exp\left\{\left(\sup_{\Omega}|\nabla H| + c_0\right)|u|_{C^0}\right\}$$

其中 c_0 是正常数.

证明：令

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}$$

$$f(x,u,p) = H(x)\sqrt{1+|p|^2} + \alpha u$$

其中 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)=Du$ ，则平均曲率型方程可以写成：

$$a_{ij}(Du)u_{ij} = f(x,u,Du) \qquad \text{in } \Omega. \tag{2}$$

选取辅助函数：

$$\varphi(x) = |Du|^2 e^{\beta(M_0+u)}, \qquad \text{in } \Omega$$

其中 $M_0=\sup_{\bar{\Omega}}|u|$， β 是待定的正常数。

若 $\varphi(x)$ 在 $x_0\in\bar{\Omega}$ 处达到极大值，则 $\forall x\in\Omega$， $\varphi(x)\le\varphi(x_0)$。

$$|Du(x)|^2 \mathrm{e}^{\beta(M_0+u(x))} \le |Du(x_0)|^2 \mathrm{e}^{\beta(M_0+u(x_0))}$$

$$|Du(x)|^2 \le |Du(x_0)|^2 \mathrm{e}^{\beta(u(x_0)-u(x))}$$

$$|Du(x)| \le |Du(x_0)|\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(u(x_0)-u(x))} \le |Du(x_0)|\mathrm{e}^{\beta|u|_{C^0}}$$

$$|Du(x)| \le |Du(x_0)|\exp\left\{\beta|u|_{C^0}\right\}. \qquad \text{in } \Omega \tag{3}$$

若 $\varphi(x)$ 在 $x_0\in\partial\Omega$ 处达到极大值，则

$$|Du(x_0)| \le \sup_{\partial\Omega}|Du| \qquad \text{in } \Omega \tag{4}$$

若 $\varphi(x)$ 在 $x_0\in\Omega$ 处达到极大值，由极值原理

$$(\log\varphi)_i(x_0)=0 \text{ 和 } (\log\varphi)_{ij}(x_0)\le 0$$

$$(\log\varphi)_i=\frac{2u_ku_{ki}}{|Du|^2}+\beta u_i$$

$$(\log\varphi)_{ij}=\frac{2u_ku_{kij}}{|Du|^2}+\frac{2u_{ki}u_{kj}}{|Du|^2}-\frac{4u_ku_lu_{ki}u_{lj}}{|Du|^4}+\beta u_{ij}$$

因此

$$a_{ij}(\log\varphi)_{ij}=\frac{2u_k}{|Du|^2}a_{ij}u_{kij}+\frac{2}{|Du|^2}a_{ij}u_{ki}u_{kj}-\frac{4u_ku_l}{|Du|^4}a_{ij}u_{ki}u_{lj}+\beta a_{ij}u_{ij}$$

为了消掉上式中的三阶导数，对(2)求微分可得

$$a_{ij}u_{kij}+a_{ij,p_l}u_{kl}u_{ij}=\partial_k f$$

其中 $a_{ij,p_l}=-\dfrac{\delta_{li}p_j+\delta_{lj}p_i}{1+|p|^2}+\dfrac{2p_ip_jp_l}{\left(1+|p|^2\right)^2}$.

则

$$a_{ij}(log\varphi)_{ij}=-\frac{2u_k}{|Du|^2}a_{ij,p_l}u_{kl}u_{ij}+\frac{2}{|Du|^2}a_{ij}u_{ki}u_{kj}-\frac{4u_ku_l}{|Du|^4}a_{ij}u_{ki}u_{lj}+\frac{2u_k}{|Du|^2}\partial_k f+\beta f.$$

以下计算都在 x_0 点处，如下选取坐标标架，

$$|Du(x_0)|=(u_1(x_0),0,\cdots,0)$$

且对于 $2\le i\ne j\le n$ 时， $u_{ij}(x_0)=0$.

$$a_{ij}(\log\varphi)_{ij}=-\frac{2}{u_1}a_{ij,p_l}u_{1l}u_{ij}+\frac{2}{u_1^2}a_{ij}u_{ki}u_{kj}-\frac{4}{u_1^2}a_{ij}u_{1i}u_{1j}+\frac{2}{u_1}\partial_1 f+\beta f.$$

由 $(\log\varphi)_i=0$，有

$$u_{1i}=-\frac{1}{2}\beta u_1u_i$$

所以

$$u_{11}=-\frac{1}{2}\beta u_1^2, \tag{5}$$

$$u_{1i}=0,\ i\ge 2,$$

故 $(u_{ij}(x_0))$ 是对角矩阵。因此有

$$\begin{aligned}a_{ij}(\log\varphi)_{ij}&=-\frac{2}{u_1}a_{ii,p_1}u_{11}u_{ii}+\frac{2}{u_1^2}a_{ii}u_{ii}^2-\frac{4}{u_1^2}a_{11}u_{11}^2+\frac{2}{u_1}\partial_1 f+\beta f\\&=-\frac{2}{u_1}a_{ii,p_1}u_{11}u_{ii}-\frac{2}{u_1^2}a_{11}u_{11}^2+\sum_{i=2}^n\frac{2}{u_1^2}a_{ii}u_{ii}^2+\frac{2}{u_1}\partial_1 f+\beta f.\end{aligned}$$

由于 $i\ge 2$ 时，在 x_0 处有 $u_i(x_0)=0$，可得

$$a_{11}=\frac{1}{1+u_1^2}，\quad a_{11,p_1}=-\frac{2u_1}{\left(1+u_1^2\right)^2}$$

$$a_{ii}=1\ (i\geq 2)，\quad a_{ii,p_1}=0\ (i\geq 2)$$

所以

$$\begin{aligned} a_{ij}(\log\varphi)_{ij} &\geq \frac{4}{\left(1+u_1^2\right)^2}u_{11}^2-\frac{2}{u_1^2\left(1+u_1^2\right)}u_{11}^2+\frac{2}{u_1}\partial_1 f+\beta f \\ &=\frac{2\left(u_1^2-1\right)}{u_1^2\left(1+u_1^2\right)^2}u_{11}^2+\frac{2}{u_1}\partial_1 f+\beta f. \end{aligned}$$

由于

$$\partial_1 f=H_1\sqrt{1+u_1^2}+\frac{Hu_1u_{11}}{\sqrt{1+u_1^2}}+\alpha u_1$$

则

$$\begin{aligned} a_{ij}(\log\varphi)_{ij} &\geq \frac{2\left(u_1^2-1\right)}{u_1^2\left(1+u_1^2\right)^2}u_{11}^2+\frac{2H_1}{u_1}\sqrt{1+u_1^2}+\frac{2Hu_{11}}{\sqrt{1+u_1^2}}+2\alpha+\beta H\sqrt{1+u_1^2}+\beta\alpha u \\ &\geq \frac{2\left(u_1^2-1\right)}{u_1^2\left(1+u_1^2\right)^2}u_{11}^2+\frac{2H_1}{u_1}\sqrt{1+u_1^2}+\frac{2Hu_{11}}{\sqrt{1+u_1^2}}+\beta H\sqrt{1+u_1^2}. \end{aligned}$$

把(5)代入上式

$$a_{ij}(\log\varphi)_{ij}\geq\frac{\beta^2u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}+\frac{2H_1}{u_1}\sqrt{1+u_1^2}+\frac{-\beta Hu_1^2}{\sqrt{1+u_1^2}}+\frac{\beta H+\beta Hu_1^2}{\sqrt{1+u_1^2}}$$

由于 $a_{ij}(\log\varphi)_{ij}\leq 0$， 可得

$$\frac{\beta^2u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}+\frac{2H_1}{u_1}\sqrt{1+u_1^2}+\frac{\beta H}{\sqrt{1+u_1^2}}\leq 0$$

或者

$$\sqrt{1+u_1^2}\left(\frac{\beta^2u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}+\frac{2H_1}{u_1}\sqrt{1+u_1^2}\right)\leq-\beta H$$

若 $u_1^2\leq 3$， 则

$$\frac{u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+u_1^2}\right)\left(1-\frac{2}{1+u_1^2}\right)\leq\frac{3}{16}$$

$$\frac{1+u_1^2}{u_1^2}=1+\frac{1}{u_1^2}\geq\frac{4}{3}$$

$$\frac{\beta^2u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}\leq\frac{3}{16}\beta^2$$

$$|u_1|\left(\frac{3}{16}\beta^2+\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\right)\le\beta|H|$$

令 $\beta=c_0+\sup\limits_{\Omega}|\nabla H|$，则

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}\beta^2+\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|&=\frac{3}{16}\left(c_0+\sup_{\Omega}|\nabla H|\right)^2+\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\\&\ge\frac{3}{16}\left(c_0+\sup_{\Omega}|\nabla H|\right)^2,\end{aligned}$$

当 $\beta\ge\dfrac{16}{3}$ 时，就有

$$\frac{3}{16}\beta^2+\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\ge\beta\ge1$$

因此有

$$|\nabla u(x_0)|\le\sup_{\Omega}|H|$$

若 $u_1^2\ge3$，则

$$\frac{u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+u_1^2}\right)\left(1-\frac{2}{1+u_1^2}\right)\ge\frac{3}{16}$$

并且 $\dfrac{1+u_1^2}{u_1^2}=1+\dfrac{1}{u_1^2}\le\dfrac{4}{3}$，

所以 $\dfrac{\beta^2u_1^2\left(u_1^2-1\right)}{2\left(1+u_1^2\right)^2}\ge\dfrac{3}{16}\beta^2$，

这意味着 $|u_1|\left(\dfrac{3}{16}\beta^2-\dfrac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\right)\le\beta|H|$。

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}\beta^2-\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|&=\frac{3}{16}\left(c_0+\sup_{\Omega}|\nabla H|\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\\&=\frac{3}{16}\left(c_0{}^2+\sup_{\Omega}{}^2|\nabla H|+2c_0\sup_{\Omega}|\nabla H|\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\\&=\frac{3}{16}\left(c_0{}^2+\sup_{\Omega}{}^2|\nabla H|\right)+\frac{3}{8}c_0\sup_{\Omega}|\nabla H|-\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|,\end{aligned}$$

可知存在一个正常数 c_0，即 $c_0\ge6$， $\sup\limits_{\Omega}|\nabla H|\ge\dfrac{16}{3}$ 时 $\beta\ge\dfrac{34}{3}$，就有

$$\frac{3}{16}\beta^2-\frac{4}{\sqrt{3}}|\nabla H|\ge\beta\ge1$$

则

$$|u_1(x_0)|\le\sup_{\Omega}|H|$$

因此有

$$|\nabla u(x_0)|\le\sup_{\Omega}|H|$$

综上所述，当 $\beta \ge \frac{34}{3}$ 时有

$$\left|\nabla u\left(x_0\right)\right| \le \sup_{\Omega}|H| \tag{6}$$

则由(4) (6)可得

$$\left|\nabla u\left(x_0\right)\right| \le \sup_{\partial\Omega}|\nabla u| + \sup_{\Omega}|H| \tag{7}$$

由(3) (7)可得要证得不等式。

即：$\sup_{\Omega}|\nabla u| \le \left(\sup_{\partial\Omega}|\nabla u| + \sup_{\Omega}|H|\right)\exp\left\{\left(\sup_{\Omega}|\nabla H| + c_0\right)|u|_{C^0}\right\}$

定理证毕。

基金项目

新疆师范大学重点实验室(XJNUSYSO82018A02)国家自然科学基金项目(12061078)。

参考文献

[1] Bombieri, E., De Giorgi, E. and Miranda, M. (1969) Una maggiorazone a priori relativa alleipersuperfici minimali non parabolic. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **32**, 255-267. https://doi.org/10.1007/BF00281503

[2] Ladyzhenskaya, O.A. and Ural'Tseva, N.N. (1970) Local Estimates for Solution of Non-Uniformly Elliptic and Parabolic Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **23**, 677-703. https://doi.org/10.1002/cpa.3160230409

[3] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (2001) Elliptic Partial Differential Equation of Second Order. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61798-0

[4] Wang, X.J. (1998) Interior Gradient Estimates for Mean Curvature. *Mathematische Zeitschrift*, **1**, 73-81. https://doi.org/10.1007/PL00004604

[5] 王聪涵. 平均曲率型方程的内部梯度估计和 Liouville 型结果[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南师范大学, 2019.

[6] 奥列尼克. 偏微分方程讲义(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 124-135.