Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1181-1201
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116132

Hans汉斯

三阶微分方程周期边值问题的正解

郑　欣

兰州理工大学，甘肃 兰州
Email: 15771801681@163.com

收稿日期：2021年5月12日；录用日期：2021年6月14日；发布日期：2021年6月21日

摘　要

微分方程正解的存在性在现实生活中有着重要的意义。对于一般的三阶线性周期边值问题，运用微分方程基本理论，求解出该齐次线性微分方程周期边值问题的特征函数，并用Cardano公式进行转换，将具体问题分成四种情况，求解出在不同情况下特征根的具体形式，再联立其周期边界条件得到该齐次线性周期边值问题的唯一解，并在满足一定的条件下使得该唯一解大于零。最后运用锥上的不动点指数理论，求解出下述三阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u''' + au'' + bu' + cu = f(t,u), & t \in [0,2\pi], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0,1,2 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $b - \frac{a^2}{3} < \frac{1}{16}$，$\left| c + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} \right| < 2\sqrt{\frac{1}{16} - b + \frac{a^2}{3}}\left(4 - b + \frac{a^2}{3}\right) \Big/ 3\sqrt{3}$，$c > 0$，$f \in C([0,2\pi] \times [0,+\infty))$，$a,b,c \in R$。

关键词

微分方程，周期边值问题，格林函数，正解，不动点指数理论

Positive Solutions to Periodic Boundary Value Problems of Third-Order Differential Equations

Xin Zheng

Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 15771801681@163.com

Received: May 12th, 2021; accepted: Jun. 14th, 2021; published: Jun. 21st, 2021

文章引用: 郑欣. 三阶微分方程周期边值问题的正解[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1181-1201.
DOI: 10.12677/pm.2021.116132

Abstract

The existence of positive solutions of differential equations is of great significance in real life. For general third-order linear periodic boundary value problems, the basic theory of differential equations is used to solve the characteristic function of the homogeneouslinear differential equation periodic boundary value problem, and the Cardano formula is used to transform the specific problem into four cases. The solution is: in different situations, the specific forms of the characteristic roots are combined with their periodic boundary conditions to obtain the unique solution of the homogeneous linear periodic boundary value problem, and it is concluded that the unique solution is greater than zero under certain conditions. Finally, using the fixed point index theory on the cone, solve the existence of positive solutions to the periodic boundary value problem of the following third-order differential equations

$$\begin{cases} u''' + au'' + bu' + cu = f(t,u), & t \in [0,2\pi], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0,1,2 \end{cases}$$

where $b - \frac{a^2}{3} < \frac{1}{16}$, $\left| c + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} \right| < 2\sqrt{\frac{1}{16} - b + \frac{a^2}{3}}\left(4 - b + \frac{a^2}{3}\right) \Big/ 3\sqrt{3}$, $c > 0$, **and satisfy** $f \in C([0,2\pi] \times [0,+\infty))$, $a,b,c \in R$.

Keywords

Differential Equation, Periodic Boundary Value Problem, Green's Function, Positive Solution, Fixed Point Index Theory

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

三阶微分方程边值问题的研究在近半个世纪里发展十分迅速。越来越多的学者利用一些著名的不动点定理和上下解方法等理论工具，研究了常微分方程边值问题正解的存在性和多重性。如：奇异边值问题，无穷区间上的边值问题，带 p-Laplace 算子的微分方程边值问题，常微分方程非局部边值问题，脉冲边值问题，时滞边值问题等。此外，还有许多有关三阶微分方程边值问题的研究[1]-[9]，这对数学物理、生物医学、工程、经济学等重要科学领域发展提供了基础。

值得一提的是，2001 年 Kong 等人[1]通过使用 Schauder 不动点定理和摄动技术，确定了三阶周期边值问题

$$\begin{cases} u''' + \rho^3 u = f(t,u), & 0 \le t \le 2\pi, \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0,1,2 \end{cases}$$

在满足

(A1)　$f(t,u)$ 是一个定义在 $[0,2\pi] \times [0,+\infty)$ 上的非负函数，并且对于任意一个不动点 $u \in (0,+\infty)$，$f(t,u)$ 在

$[0,2\pi]$上是可积的。

(A2) 对于任意的$t\in[0,2\pi]$，当$u>0$时，$f(t,u)$是非增函数，并且有

$$\lim_{u\to 0^+} f(t,u)=+\infty,\ \lim_{u\to+\infty} f(t,u)=0;$$

(A3) 对于每个固定的常数$\tau>0$，不等式$\int_0^{2\pi} f(t,\tau)\mathrm{d}t<+\infty$

都成立的条件下，只是存在一个正解，其中$\rho\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$是正实数。

在文献[2]中，Sun 和 Liu 利用不动点指数理论，去除了(A2)中$f(t,u)$的单调性条件，并求解出$f(t,u)$的适合条件下的多个正解。在文献[3]中，Chu 和 Zhou 主要运用了 Leray-Schauder 类型的非线性替代方案以及 Krasnoselskii 锥不动点定理研究了上述问题正解的存在性。

受上述文献启发，我们主要研究

$$\begin{cases} u'''+au''+bu'+cu=f(t,u),\ t\in[0,2\pi], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi),\ i=0,1,2 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中$b-\frac{a^2}{3}<\frac{1}{16}$，$\left|c+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}\right|<2\sqrt{\frac{1}{16}-b+\frac{a^2}{3}}\left(4-b+\frac{a^2}{3}\right)\Big/3\sqrt{3}$，$f\in C([0,2\pi]\times[0,+\infty))$, $a,b,c\in R$。

为了方便描述，接下来引入以下符号：

$$\underline{f_0}=\liminf_{u\to 0^+}\min_{t\in[0,2\pi]}\left(f(t,u)/u\right),\ \overline{f_0}=\limsup_{u\to 0^+}\max_{t\in[0,2\pi]}\left(f(t,u)/u\right),$$

$$\underline{f_\infty}=\liminf_{u\to +\infty}\min_{t\in[0,2\pi]}\left(f(t,u)/u\right),\ \overline{f_\infty}=\limsup_{u\to +\infty}\max_{t\in[0,2\pi]}\left(f(t,u)/u\right).$$

2. 准备工作与引理

首先考虑方程

$$u'''+au''+bu'+cu=f(t,u),\ t\in[0,2\pi] \tag{2}$$

的齐次方程为

$$u'''+au''+bu'+cu=0$$

它的特征方程为

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

令$\lambda=\mu-\frac{a}{3}$，则上式可转化为$\mu^3+p\mu+q=0$，其中$p=b-\frac{a^2}{3}$，$q=c+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}$，由(1)条件可知，$p<\frac{1}{16}$，$|q|<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}$，对于方程$\mu^3+p\mu+q=0$直接利用 Cardano 公式可得：

$$\mu_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\mu_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\mu_2=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ 是根的判别式：

情况 1：当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 时，若 $p=0$，则 $q=0$，此时 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\frac{a}{3}=-\frac{c}{a}=-\frac{3c}{b}$，$\lambda\in R$。

情况 2：当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 时，若 $p<0$，则 $0<|q|=2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$，此时 $\mu_1=-\sqrt[3]{4q}$，$\mu_2=\mu_3=\frac{\sqrt[3]{4q}}{2}$，$\mu_1,\mu_2,\mu_3\in R$，因此

(i) 若 $q>0$，则 $\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3>0$，

(ii) 若 $q<0$，则 $\mu_1>0,\ \mu_2=\mu_3<0$。

情况 3：当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时，有 $p<0$，且 $0<|q|<2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$，令 $s=-\frac{q}{2}$，$k_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$，$k_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$，则 k_1^3,k_2^3 均为虚数，从而 $k_1=\sqrt[3]{s+i\sqrt{-\Delta}}$，$k_2=\sqrt[3]{s-i\sqrt{-\Delta}}$，其中 $s,\sqrt{-\Delta}$，故 $k_1{}^3,k_2{}^3$ 的模均为

$$\left|k_1{}^3\right|=\left|k_2{}^3\right|=\sqrt{s^2+\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

所以

$$k_1^3=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left[\frac{s}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right]=-\frac{p\sqrt{-3p}}{9}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$k_2^3=-\frac{p\sqrt{-3p}}{9}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

其中 $\theta=\arccos\left(\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right)$，$0<\theta<\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2}$。

从而可以得出 k_1,k_2 的值，分别是

$$k_{1,1}=-\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\ k_{2,1}=-\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
k_{1,2} &= \omega \cdot k_{1,1} \\
&= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[-\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right] \\
&= \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left[-\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{2\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}\right),
\end{aligned}
$$

$$k_{2,2} = \omega^2 \cdot k_{2,1} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{4\pi+\theta}{3}-i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}\right),$$

$$k_{1,3} = \omega^2 \cdot k_{1,1} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{4\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}\right),$$

$$k_{2,3} = \omega \cdot k_{2,1} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{2\pi+\theta}{3}-i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}\right),$$

则

$$\mu_1 = k_{1,1}+k_{2,1} = -\frac{2\sqrt{-3p}}{3}\cos\frac{\theta}{3},$$

$$\mu_2 = k_{1,2}+k_{2,2} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$\mu_3 = k_{1,3}+k_{2,3} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

通过简单计算可知，当$\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\mu_1 < 0,\ \mu_2 > \mu_3 > 0$；当$\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$\mu_2 > 0$，$\mu_1 < \mu_3 < 0$。

情况 4： 当$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$时，

$$\mu_1 = k_1 + k_2,$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}(k_1+k_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(k_1-k_2)i,$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2}(k_1+k_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(k_1-k_2)i,$$

令$\alpha = -\frac{1}{2}(k_1+k_2)$，$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(k_1-k_2)$，则$\mu_1 = -2\alpha,\ \mu_2 = \alpha+\beta i,\ \mu_3 = \alpha-\beta i$，其中$\alpha,\beta \in R$。

下面考虑一般的线性边值问题

$$\begin{cases} L_n u(t) = u^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{(i)}(t) = h(t),\ t \in [0,2\pi], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi),\ i = 0,1,\cdots,n-2, \\ u^{(n-1)}(0) - u^{(n-1)}(2\pi) = \mu, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$n \ge 2,\ a_i,\ \mu \in R,\ h \in C[0,2\pi]$。因而有下述引理：

引理 1 [10]若线性边值问题

$$\begin{cases} L_n u(t)=0, \ \ t\in[0,2\pi], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), \ \ i=0,1,\cdots,n-2, \\ u^{(n-1)}(0)-u^{(n-1)}(2\pi)=1 \end{cases}$$

有唯一解 $r_n(t)\in C^{\infty}[0,2\pi]$，则线性问题(3)存在唯一解 $u\in C_n[0,2\pi]$，其表达式为

$$u(t)=\int_0^{2\pi} G_n(t,s)h(s)\mathrm{d}s+\mu r_n(t), \ t\in[0,2\pi]$$

其中，

$$G_n(t,s)=\begin{cases} r_n(t-s), & 0\le s\le t\le 2\pi, \\ r_n(2\pi+t-s), & 0\le t<s\le 2\pi. \end{cases}$$

因此，可以将周期边值问题问题(1)转化为求解下述的一般线性边值问题

$$\begin{cases} u'''+au''+bu'+cu=0, \ \ t\in[0,2\pi], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), \ \ i=0,\ 1,\ 2 \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性，其中 $b-\frac{a^2}{3}<\frac{1}{16}$，$\left|c+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}\right|<2\sqrt{\frac{1}{16}-b+\frac{a^2}{3}}\left(4-b+\frac{a^2}{3}\right)\Big/3\sqrt{3}$，$f\in C\left([0,2\pi]\times[0,+\infty)\right)$，$a,b,c\in R$。

根据上述引理，下面将上述线性边值问题分四种情况考虑：

引理 2 当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 时，若 $p=0$，周期边值问题(4)的唯一解为

$$r_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\mathrm{e}^{2\pi\lambda}(2\pi-t)+t\right)^2+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\right]}{2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)^3}, \ t\in[0,2\pi].$$

证明：若 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 且 $p=0$，有 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\frac{a}{3}=-\frac{c}{a}=-\frac{3c}{b}$，$\lambda\in R$，此时可以得到边值问题(4)通解为

$$r_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}C_1+\mathrm{e}^{\lambda t}tC_2+\mathrm{e}^{\lambda t}t^2C_3, \ t\in[0,2\pi],$$

根据线性边值问题(4)的边界条件可得

$$r_1(0)=C_1, \ r_1(2\pi)=\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_1+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi C_2+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2C_3,$$

由

$$r_1'(t)=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}C_1+(\lambda t+1)\mathrm{e}^{\lambda t}C_2+\left(\lambda t^2+2t\right)\mathrm{e}^{\lambda t}C_3, \ t\in[0,2\pi]$$

可得

$$r_1'(0)=\lambda C_1+C_2, \ r_1'(2\pi)=\lambda\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_1+(2\pi\lambda+1)\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_2+\left(4\pi^2\lambda+4\pi\right)\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_3,$$

由

$$r_1''(t)=\lambda^2e^{\lambda t}C_1+\left(\lambda t^2+2\lambda\right)\mathrm{e}^{\lambda t}C_2+\left(\lambda^2t^2+4\lambda t+2\right)\mathrm{e}^{\lambda t}C_3, \ t\in[0,2\pi],$$

可得

$$r_1''(0)=\lambda^2C_1+2\lambda C_2+2C_3,$$

$$r_1''(2\pi)=\lambda^2\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_1+\left(2\pi\lambda^2+2\lambda\right)\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_2+\left(4\pi^2\lambda^2+8\pi\lambda+2\right)\mathrm{e}^{2\pi\lambda}C_3,$$

由边界条件可得

$$\begin{cases}\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)C_1+\left(-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\right)C_2+\left(-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\right)C_3=0\\ \lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)C_1+\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda\right)C_2+\left(-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda\right)C_3=0\\ \lambda^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)C_1+\left[2\lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda^2\right]C_2+\left[2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi\lambda-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda^2\right]C_3=1,\end{cases}$$

因此，该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda} & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\\ \lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda\\ \lambda^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 2\lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda^2 & 2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi\lambda-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda^2\end{vmatrix}$$
$$=2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)^3,$$

故而

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\\ 0 & 1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda\\ 1 & 2\lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda^2 & 2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi\lambda-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda^2\end{vmatrix}$$
$$=e^{2\pi\lambda}4\pi^2\left(1+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right),$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda} & 0 & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\\ \lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 0 & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda\\ \lambda^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 1 & 2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi\lambda-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\lambda^2\end{vmatrix}$$
$$=\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right),$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda} & -\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi & 0\\ \lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda & 0\\ \lambda^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right) & 2\lambda\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}2\pi\lambda^2 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)^2,$$

故 $C_1=\dfrac{D_1}{D}, C_2=\dfrac{D_2}{D}, C_3=\dfrac{D_3}{D}$，因此

$$r_1(t)=\frac{D_1}{D}\mathrm{e}^{\lambda t}+\frac{D_2}{D}\mathrm{e}^{\lambda t}t+\frac{D_3}{D}\mathrm{e}^{\lambda t}t^2$$
$$=\frac{\left[e^{2\pi\lambda}(2\pi-t)+t\right]^2+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2}{2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)^3},\ t\in[0,2\pi].$$

证毕。

引理 3 当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 时，若 $p<0$，则 $\mu_1=-\sqrt[3]{4q}$，$\mu_2=\mu_3=\frac{\sqrt[3]{4q}}{2}$，$\mu_1,\mu_2,\mu_3\in R$，因此周期边值问题(4)的唯一解为

$$r_2(t)=\frac{e^{\mu_1 t}}{\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}+\frac{e^{\mu_2 t}\left[\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)\left(t\left(\mu_1-\mu_2\right)-1\right)-e^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]}{\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)^2\left(\mu_1-\mu_2\right)^2},\ t\in[0,2\pi].$$

证明：由于 $\mu_1\neq\mu_2=\mu_3$，此时周期边值问题(4)的通解为

$$r_2(t)=e^{\mu_1 t}C_1+e^{\mu_2 t}C_2+e^{\mu_2 t}tC_3,\ t\in[0,2\pi],$$

根据线性边值问题(4)可得

$$r_2(0)=C_1+C_2,\ r_2(2\pi)=e^{2\pi\mu_1}C_1+e^{2\pi\mu_2}C_2+e^{2\pi\mu_3}2\pi C_3,$$

由

$$r_2'(t)=\mu_1 e^{\mu_1 t}C_1+\mu_2 e^{\mu_2 t}C_2+\left(\mu_2 t+1\right)e^{\mu_2 t}C_3,\ t\in[0,2\pi]$$

可得

$$r_2'(0)=\mu_1 C_1+\mu_2 C_2+C_3,$$
$$r_2'(2\pi)=\mu_1 e^{2\pi\mu_1}C_1+\mu_2 e^{2\pi\mu_2}C_2+\left(2\pi\mu_2+1\right)e^{2\pi\mu_2}C_3,$$

由

$$r_2''(t)=\mu_1{}^2 e^{\mu_1 t}C_1+\mu_2{}^2 e^{\mu_2 t}C_2+\left(\mu_2{}^2 t+2\mu_2\right)e^{\mu_2 t}C_3,\ t\in[0,2\pi]$$

可得

$$r_2''(0)=\mu_1{}^2 C_1+\mu_2{}^2 C_2+2\mu_2 C_3,$$
$$r_2''(2\pi)=\mu_1{}^2 e^{2\pi\mu_1}C_1+\mu_2{}^2 e^{2\pi\mu_2}C_2+\left(2\pi\mu_2{}^2+2\mu_2\right)e^{2\pi\mu_2}C_3,$$

由边界条件可得

$$\begin{cases}\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\left(-2\pi e^{2\pi\mu_2}\right)C_3=0\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\left[\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)+\left(-2\pi\mu_2 e^{2\pi\mu_2}\right)\right]C_3=0\\ \mu_1{}^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\mu_2{}^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\left[2\mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)+\left(-2\pi\mu_2{}^2 e^{2\pi\mu_2}\right)\right]C_3=1\end{cases}$$

因此，该方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1-e^{2\pi\mu_1} & 1-e^{2\pi\mu_2} & -e^{2\pi\mu_2}2\pi\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & 1-e^{2\pi\mu_2}-e^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2\\ \mu_1{}^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2{}^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & 2\mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)-e^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2{}^2\end{vmatrix}\\ &=\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)^2\left(\mu_2-\mu_1\right)^2,\end{aligned}$$

故而

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2} & -\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi \\ 0 & \mu_2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right) & \left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2 \\ 1 & \mu_2^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right) & 2\mu_2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2^2\end{vmatrix}$$
$$=\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)^2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1} & 0 & -\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi \\ \mu_1\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right) & 0 & 1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2 \\ \mu_1^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right) & 1 & 2\mu_2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\mu_2^2\end{vmatrix}$$
$$=-\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)\left[1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}+\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)\right],$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1} & 1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2} & 0 \\ \mu_1\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right) & 0 \\ \mu_1^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2^2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right) & 1\end{vmatrix}$$
$$=\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)\left(\mu_2-\mu_1\right),$$

故 $C_1=\dfrac{D_1}{D},\ C_2=\dfrac{D_2}{D},\ C_3=\dfrac{D_3}{D}$，因此当 $t\in[0,2\pi]$ 时，

$$r_2(t)=\frac{D_1}{D}\mathrm{e}^{\mu_1 t}+\frac{D_2}{D}\mathrm{e}^{\mu_2 t}+\frac{D_3}{D}\mathrm{e}^{\mu_2 t}t$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{\mu_2 t}\left[\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)\left(t\left(\mu_1-\mu_2\right)-1\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)^2\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}+\frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}.$$

证毕。

引理 4 当 $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3<0$ 时，有 $p<0$，且 $0<|q|<2\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}\left(<\dfrac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$，此时周期边值问题(4)的唯一解为

$$r_3(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{\left(\mu_1-\mu_2\right)\left(\mu_1-\mu_3\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)}+\frac{\mathrm{e}^{\mu_2 t}}{\left(\mu_2-\mu_1\right)\left(\mu_2-\mu_3\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{\mu_3 t}}{\left(\mu_3-\mu_1\right)\left(\mu_3-\mu_1\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3}\right)},\ t\in[0,2\pi],$$

其中 $\mu_1=-\dfrac{2\sqrt{-3p}}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}$，$\mu_2=\dfrac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$，$\mu_3=\dfrac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$。

证明： 因为 $\mu_1\neq\mu_2,\ \mu_2\neq\mu_3,\ \mu_3\neq\mu_1$，此时得到周期边值问题(4)的通解为

$$r_3(t)=\mathrm{e}^{\mu_1 t}C_1+\mathrm{e}^{\mu_2 t}C_2+\mathrm{e}^{\mu_3 t}C_3,\ t\in[0,2\pi],$$

根据线性边值问题(4)可得

$$r_3(0)=C_1+C_2+C_3,\ r_3(2\pi)=\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}C_1+\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}C_2+\mathrm{e}^{2\pi\mu_3}C_3,$$

由

$$r_3'(t)=\mu_1 e^{\mu_1 t}C_1+\mu_2 e^{\mu_2 t}C_2+\mu_3 e^{\mu_3 t}C_3,\ t\in[0,2\pi]$$

可得

$$r_3'(0)=\mu_1C_1+\mu_2C_2+\mu_3C_3,\ r_3'(2\pi)=\mu_1 e^{2\pi\mu_1}C_1+\mu_2 e^{2\pi\mu_2}C_2+\mu_3 e^{2\pi\mu_3}C_3,$$

由

$$r_3''(t)=\mu_1^2 e^{\mu_1 t}C_1+\mu_2^2 e^{\mu_2 t}C_2+\mu_3^2 e^{\mu_3 t}C_3,\ t\in[0,2\pi]$$

可得

$$r_3''(0)=\mu_1^2C_1+\mu_2^2C_2+\mu_3^2C_3,\ r_3''(2\pi)=\mu_1^2 e^{2\pi\mu_1}C_1+\mu_2^2 e^{2\pi\mu_2}C_2+\mu_3^2 e^{2\pi\mu_3}C_3,$$

由边界条件可得

$$\begin{cases}\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)C_3=0\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\mu_3\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)C_3=0\\ \mu_1^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)C_1+\mu_2^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)C_2+\mu_3^2\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)C_3=1,\end{cases}$$

因此，该方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1-e^{2\pi\mu_1} & 1-e^{2\pi\mu_2} & 1-e^{2\pi\mu_3}\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & \mu_3\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\\ \mu_1^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & \mu_3^2\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\end{vmatrix}\\ &=\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)(\mu_2-\mu_1),\end{aligned}$$

故而

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1-e^{2\pi\mu_2} & 1-e^{2\pi\mu_3}\\ 0 & \mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & \mu_3\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\\ 1 & \mu_2^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & \mu_3^2\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\end{vmatrix}=\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)(\mu_3-\mu_2),$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1-e^{2\pi\mu_1} & 0 & 1-e^{2\pi\mu_3}\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & 0 & \mu_3\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\\ \mu_1^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & 1 & \mu_3^2\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)\end{vmatrix}=\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_3}\right)(\mu_1-\mu_3),$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1-e^{2\pi\mu_1} & 1-e^{2\pi\mu_2} & 0\\ \mu_1\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & 0\\ \mu_1^2\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right) & \mu_2^2\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right) & 1\end{vmatrix}=\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)(\mu_2-\mu_1),$$

故 $C_1=\dfrac{D_1}{D},\ C_2=\dfrac{D_2}{D},\ C_3=\dfrac{D_3}{D}$，因此

$$
\begin{aligned}
r_3(t) &= \frac{D_1}{D}\mathrm{e}^{\mu_1 t} + \frac{D_2}{D}\mathrm{e}^{\mu_2 t} + \frac{D_3}{D}\mathrm{e}^{\mu_2 t} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{\mathrm{e}^{\mu_2 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} \\
&\quad + \frac{\mathrm{e}^{\mu_3 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3}\right)(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_3)},\ t\in[0,2\pi].
\end{aligned}
$$

证毕。

引理 5 当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$ 时， $\mu_1=-2\alpha,\ \mu_2=\alpha+\beta i,\ \mu_3=\alpha-\beta i$ 时，周期边值问题(4)的唯一解为

$$
\begin{aligned}
r_4(t) &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}\left\{3\alpha\left[\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\sin(\beta(2\pi-t))+\sin(\beta t)\right]+\beta\left[\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\cos(\beta(2\pi-t))-\cos(\beta t)\right]\right\}}{\beta\left(9\alpha^2+\beta^2\right)\left(1+\mathrm{e}^{4\pi\alpha}-2\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\cos(2\pi\beta)\right)} \\
&\quad + \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{\left(1-\mathrm{e}^{-4\pi\alpha}\right)\left(9\alpha^2+\beta^2\right)},\ t\in[0,2\pi].
\end{aligned}
$$

证明：由于 $\mu_1=-2\alpha,\ \mu_2=\alpha+\beta i,\ \mu_3=\alpha-\beta i,\ \alpha,\beta\in R$，因此边值问题(4)的通解为

$$
r_4(t)=\mathrm{e}^{-2\alpha t}C_1+\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)C_2+\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)C_3,\ t\in[0,2\pi],
$$

根据线性边值问题(4)可得

$$
r_4(0)=C_1+C_3,\ r_4(2\pi)=\mathrm{e}^{-4\pi\alpha}C_1+\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\sin(2\pi\beta)C_2+\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\cos(2\pi\beta)C_3,
$$

当 $t\in[0,2\pi]$ 时，由

$$
r_4'(t)=-2\alpha\mathrm{e}^{-2\alpha t}C_1+\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t)\right)C_2+\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\alpha\cos(\beta t)-\beta\sin(\beta t)\right)C_3,
$$

可得

$$
\begin{aligned}
r_4'(0) &= -2\alpha C_1+\beta C_2+\alpha C_3, \\
r_4'(2\pi) &= -2\alpha\mathrm{e}^{-4\pi\alpha}C_1+\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\left(\alpha\sin(2\pi\beta)+\beta\cos(2\pi\beta)\right)C_2 \\
&\quad +\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\left(\alpha\cos(2\pi\beta)-\beta\sin(2\pi\beta)\right)C_3,
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{aligned}
r_4''(t) &= 4\alpha^2\mathrm{e}^{-2\alpha t}C_1+\mathrm{e}^{\alpha t}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\sin(\beta t)+2\alpha\beta\cos(\beta t)\right]C_2 \\
&\quad +\mathrm{e}^{\alpha t}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\cos(\beta t)-2\alpha\beta\sin(\beta t)\right]C_3,\ t\in[0,2\pi]
\end{aligned}
$$

可得

$$
r_4''(0)=4\alpha^2C_1+2\alpha\beta C_2+\left(\alpha^2-\beta^2\right)C_3,
$$

$$
\begin{aligned}
r_4''(2\pi) &= 4\alpha^2\mathrm{e}^{-4\pi\alpha}C_1+\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\sin(2\pi\beta)+2\alpha\beta\cos(2\pi\beta)\right]C_2 \\
&\quad +\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\cos(2\pi\beta)-2\alpha\beta\sin(2\pi\beta)\right]C_3,
\end{aligned}
$$

令 $P=1-\mathrm{e}^{-4\pi\alpha},\ Q=-\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\sin(2\pi\beta),\ K=1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha}\cos(2\pi\beta)$，由边界条件可得

$$\begin{cases} PC_1 + QC_2 + KC_3 = 0 \\ -2\alpha PC_1 + (\alpha Q + \beta K) C_2 + (\alpha K - \beta Q) C_3 = 0 \\ 4\alpha^2 PC_1 + \left[(\alpha^2 - \beta^2) Q + 2\alpha\beta K \right] C_2 + \left[(\alpha^2 - \beta^2) K + 2\alpha\beta Q \right] C_3 = 1, \end{cases}$$

因此，该方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned} D &= P \times \begin{vmatrix} 1 & Q & K \\ -2\alpha & \alpha Q + \beta K & \alpha K - \beta Q \\ 4\alpha^2 & (\alpha^2 - \beta^2) Q + 2\alpha\beta K & (\alpha^2 - \beta^2) K - 2\alpha\beta Q \end{vmatrix} \\ &= -\beta P (9\alpha^2 + \beta^2)\left(1 + \mathrm{e}^{4\pi\alpha} - 2\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \cos(2\pi\beta)\right), \end{aligned}$$

故而

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & Q & K \\ 0 & \alpha Q + \beta K & \alpha K - \beta Q \\ 1 & (\alpha^2 - \beta^2) Q + 2\alpha\beta K & (\alpha^2 - \beta^2) K - 2\alpha\beta Q \end{vmatrix} \\ &= -\beta\left(1 + \mathrm{e}^{4\pi\alpha} - 2\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \cos(2\pi\beta)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= P \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & K \\ -2\alpha & 0 & \alpha K - \beta Q \\ 4\alpha^2 & 1 & (\alpha^2 - \beta^2) K - 2\alpha\beta Q \end{vmatrix} \\ &= P(-3\alpha K + \beta Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= P \times \begin{vmatrix} 1 & Q & 0 \\ -2\alpha & \alpha Q + \beta K & 0 \\ 4\alpha^2 & (\alpha^2 - \beta^2) Q + 2\alpha\beta K & 1 \end{vmatrix} \\ &= P(\beta K + 3\alpha Q), \end{aligned}$$

故 $C_1 = \dfrac{D_1}{D}, C_2 = \dfrac{D_2}{D}, C_3 = \dfrac{D_3}{D}$，因此

$$\begin{aligned} r_4(t) &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}\left\{3\alpha\left[\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \sin(\beta(2\pi - t)) + \sin(\beta t)\right] + \beta\left[\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \cos(\beta(2\pi - t)) - \cos(\beta t)\right]\right\}}{\beta(9\alpha^2 + \beta^2)\left(1 + \mathrm{e}^{4\pi\alpha} - 2\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \cos(2\pi\beta)\right)} \\ &\quad + \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{(1 - \mathrm{e}^{-4\pi\alpha})(9\alpha^2 + \beta^2)}, \ t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

证毕。

3. 解的性质

接下来考虑每种情况下解的性质。

情况 1： 当 $\Delta = 0$ 时，若 $p = 0$，则 $q = 0$，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\dfrac{a}{3} = -\dfrac{c}{a} = -\dfrac{3c}{b}$，$\lambda \in R$。

引理 6 对于任意的 $t \in [0, 2\pi]$，由 $c > 0$，可得 $r_1(t) > 0$。

证明： 由于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\frac{a}{3}=-\frac{c}{a}=-\frac{3c}{b}$，且 $c>0$，因此 $a>0,\ b>0$，此时 $\lambda<0$，在 $r_1(t)$ 中，

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\mathrm{e}^{2\pi\lambda}(2\pi-t)+t\right)^2+\mathrm{e}^{2\pi\lambda}4\pi^2\right]>0,\ t\in[0,2\pi],$$

由 $\lambda<0$ 可得 $2\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\right)^3>0$。综上所述 $r_1(t)>0$。

证毕。

情况 2： 当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 时，若 $p<0$，则 $0<|q|=2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$，此时 $\mu_1=-\sqrt[3]{4q}$，$\mu_2=\mu_3=\frac{\sqrt[3]{4q}}{2}$，$\mu_1,\mu_2,\mu_3\in R$。

引理 7 若 $q>0$，则 $r_2(t)>0$，$t\in[0,2\pi]$。

证明： 由于 $\Delta=0$，且 $p<0$，则 $0<|q|=2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$，此时 $\mu_1=-\sqrt[3]{4q}$，$\mu_2=\mu_3=\frac{\sqrt[3]{4q}}{2}$，$\mu_1,\mu_2,\mu_3\in R$，因此，当 $0<p\left(<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$ 时，有 $\mu_1<0$，$\mu_2=\mu_3>0$ 成立。所以

$$\frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}>0,\ t\in[0,2\pi],$$

根据 $\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3>0$ 可得

$$1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}<0,\ -\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)>0, t\left(\mu_1-\mu_2\right)-1<0,\ t\in[0,2\pi],$$

因此

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)\left(t\left(\mu_1-\mu_2\right)-1\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)>0,\ t\in[0,2\pi].$$

综上所述

$$r_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu_2 t}\left[\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)\left(t\left(\mu_1-\mu_2\right)-1\right)-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}2\pi\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}\right)^2\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}$$

$$+\frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}\right)\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}>0,\ t\in[0,2\pi].$$

证毕。

情况 3： 当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时，有 $p<0$，且 $0<|q|<2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(<\frac{\sqrt{1-16p}(1-4p)}{24\sqrt{3}}\right)$，其中 $\mu_1=-\frac{2\sqrt{-3p}}{3}\cos\frac{\theta}{3}$，$\mu_2=\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)$，$\mu_3=\frac{\sqrt{-3p}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)$。通过简单计算可知，当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\mu_1<0,\ \mu_2>\mu_3>0$；当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\mu_2>0$，$\mu_1<\mu_3<0$。

为了方便描述，我们定义

$$g_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1})},$$

$$g_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu_2 t}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2})},$$

$$g_3(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu_3 t}}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3})},\ t\in[0,2\pi].$$

引理 8 若 $\Delta<0$，且 $\theta\in\left[\frac{29\pi}{64},\pi\right]$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$r_3(t)>0$，$t\in[0,2\pi]$。

证明： 若 $\Delta<0$，则一定有 $p<0$，由于 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\mu_2>0,\ \mu_1<\mu_3<0$，则

$$g_1'(t)=\frac{\mu_1\mathrm{e}^{\mu_1 t}}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1})}<0,$$

$$g_2'(t)=\frac{\mu_2\mathrm{e}^{\mu_2 t}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2})}<0,$$

$$g_3'(t)=\frac{\mu_3\mathrm{e}^{\mu_3 t}}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3})}>0,\ t\in[0,2\pi].$$

故 $g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t)$ 均为严格单调函数，且当 $t\in[0,2\pi]$ 时均无极值点，因此，$g_1(2\pi)\le g_1(t)$，$g_2(2\pi)\le g_2(t)$，$g_3(0)\le g_3(t)$ 成立。所以

$$g_1(2\pi)+g_2(2\pi)+g_3(0)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1})}+\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2})}$$
$$+\frac{1}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3})},$$

其中，合并之后的分母为

$$(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_{2<0}})<0,$$

分子为

$$3\mu_2\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}-3\mu_1\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}-\left[2(\mu_2-\mu_1)\mathrm{e}^{-2\pi\mu_3}+(\mu_2-\mu_3)\mathrm{e}^{-2\pi\mu_2}+(\mu_3-\mu_1)(1+\mathrm{e}^{-2\pi\mu_1})\right]<0$$

因此

$$0<g_1(2\pi)+g_2(2\pi)+g_3(0)\le r_3(t),\ t\in[0,2\pi].$$

由于当 $\theta\in\left[\frac{29\pi}{64},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\mu_1<0,\ \mu_2>\mu_3>0$，因此 $g_1'(t)<0,\ g_2'(t)<0,\ g_3'(t)<0,\ \ t\in[0,2\pi]$，故 $g_1(t),g_2(t),g_3(t)$ 均为单调函数，且当 $t\in[0,2\pi]$ 时无极值点，此时有 $g_1(2\pi)\le g_1(t)$，$g_2(2\pi)\le g_2(t)$，$g_3(0)\le g_3(t)$ 成立。所以

$$g_1(2\pi)+g_2(2\pi)+g_3(0)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mu_1}}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_1})}+\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mu_2}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_2})}$$
$$+\frac{1}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mu_3})},$$

合并之后的分母为

$$(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)\left(1-e^{2\pi\mu_1}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_2}\right)\left(1-e^{2\pi\mu_{2<0}}\right)>0,$$

分子为

$$3\mu_2e^{2\pi\mu_1}-3\mu_1e^{2\pi\mu_2}-\left[2(\mu_2-\mu_1)e^{-2\pi\mu_3}+(\mu_2-\mu_3)e^{-2\pi\mu_2}+(\mu_3-\mu_1)\left(1+e^{-2\pi\mu_1}\right)\right]>0$$

因此

$$0<g_1(2\pi)+g_2(2\pi)+g_3(0)\le r_3(t),\ t\in[0,2\pi].$$

证毕。

情况 4：当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$ 时，有 $\mu_1=-2\alpha,\ \mu_2=\alpha+\beta i,\ \mu_3=\alpha-\beta i$。

当 $\Delta>0$ 时，若 $0\le p<\frac{1}{16}$，考虑

$$\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

首先，令 $s=-\frac{q}{2}$，并且

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{s-\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\&=\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{s^2-s^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}{s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}\\&=\left(s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{p}{3}\left(s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

由上式可知 $\varphi(s)$ 是关于 s 的偶函数。下面考虑当 $s\ge0$ 时，$\varphi(s)$ 的性质。

当 $p\ge0$ 时，对于所有的 $s\ge0$ 来说，都有 $\varphi(s)\ge0$ 成。令

$$\delta=\left(s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

通过简单计算可知，δ 是严格关于 s 单调递增的，从而对于 φ 的研究可以转化为

$$\Psi(\delta)=\delta+\frac{p}{3\delta}$$

其中 $\delta\ge\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$。$\Psi$ 是双钩函数，并且在 $\delta\ge\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 是严格单调递增的，因此在 $\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 处取得最小值，即

$$\Psi(\delta)_{\min}=2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由于$0<p<\frac{1}{16}$，则由上式可得$3\left(\frac{\Psi(\delta)_{\min}}{2}\right)^2=p<\frac{1}{16}$，即$\beta<\frac{1}{4}$。

另外，$\varphi(s)\le\frac{1}{2\sqrt{3}}$等价于$\Psi(\delta)\le\frac{1}{2\sqrt{3}}$，因此$\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\le\delta<\frac{1+(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{3}}$，即$(0\le)s<\frac{(1-4p)(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{48\sqrt{3}}$，从而$|q|<\frac{(1-4p)(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{24\sqrt{3}}$。

同理，当$p<0$时，$|q|>2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$，此时，$\varphi$可以看作是关于$s\ge\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(>0)$的函数，设

$$\delta=\left(s+\sqrt{s^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}},\ s\ge\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

下面讨论$\Psi(\delta)=\delta+\frac{p}{3\delta},\ \delta\ge\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

由于$\delta\ge\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$时，$\Psi(\delta)$是严格单调递增，并且当$\delta=\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$时，$\Psi=0$，故

$$\Psi(\delta)\ge0,\ \delta\ge\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

因为$0<p<\frac{1}{16}$，则由上式可得，$3\left(\frac{\Psi(\delta)_{\min}}{2}\right)^2=p<\frac{1}{16}$，即$\beta<\frac{1}{4}$。

另外，$0\le\varphi(s)\le\frac{1}{2\sqrt{3}}$等价于$0\le\Psi(\delta)\le\frac{1}{2\sqrt{3}}$，因此$\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\le\delta<\frac{1+(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{3}}$，即$(0<)s<\frac{(1-4p)(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{48\sqrt{3}}$，从而$|q|<\frac{(1-4p)(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{24\sqrt{3}}$。

综上所述，当$\Delta>0$且$p<\frac{1}{16}$时，有$\beta<\frac{1}{4}$，$0<|q|<\frac{(1-4p)(1-16p)^{\frac{1}{2}}}{24\sqrt{3}}$成立。

引理 9 若$\alpha>0,\ 0<\beta<\frac{1}{4}$，则有$r_4(t)>0,\ t\in[0,2\pi]$。

证明： 由于$\mu_1=-2\alpha<0$，则$\frac{e^{-2\alpha t}}{(1-e^{-4\pi\alpha})(9\alpha^2+\beta^2)}>0,\ t\in[0,2\pi]$。

由于$\alpha>0,\ 0<\beta<\frac{1}{4}$，则

$$1+e^{4\pi\alpha}-2e^{2\pi\alpha}\cos(2\pi\beta)\ge1+e^{4\pi\alpha}-2e^{2\pi\alpha}=\left(1-e^{2\pi\alpha}\right)^2>0,$$

所以

$$\beta(9\alpha^2+\beta^2)\left(1+e^{4\pi\alpha}-2e^{2\pi\alpha}\cos(2\pi\beta)\right)>0,$$

因为$\alpha>0,\ 0<\beta<\frac{1}{4}$且$t\in[0,2\pi]$，所以有$0<\beta(2\pi-t)\le2\pi\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta t\le2\pi\beta<\frac{\pi}{2}$成立，因此，

$$e^{2\pi\alpha}\sin\left(\beta(2\pi-t)\right)+\sin(\beta t)>0,\ e^{2\pi\alpha}\cos\left(\beta(2\pi-t)\right)-\cos(\beta t)>0,$$

故

$$3\alpha\left[e^{2\pi\alpha}\sin\left(\beta(2\pi-t)\right)+\sin(\beta t)\right]+\beta\left[e^{2\pi\alpha}\cos\left(\beta(2\pi-t)\right)-\cos(\beta t)\right]>0,\ t\in[0,2\pi],$$

综上所述 $r_4(t)>0,\ t\in[0,2\pi]$。

证毕。

4. 主要结果

假设

$$G_i(t,s)=\begin{cases} r_i(t-s), & 0\le s\le t\le 2\pi, \\ r_i(2\pi+t-s), & 0\le t\le s\le 2\pi, \end{cases}$$

其中 $i=1,2,3,4$， $r_i(t)$ 是三阶线性问题(4)的唯一解。

根据引理 6~引理 9 有 $r_i(t)>0$， $i=1,2,3,4$， $t\in[0,2\pi]$，设

$$m_i=\min_{t\in[0,2\pi]} r_i(t), M_i=\max_{t\in[0,2\pi]} r_i(t),\ i=1,2,3,4,$$

则

$$m_i\le r_i(t)\le M_i, m_i\le G_i(t)\le M_i,\ t,s\in[0,2\pi]. \tag{5}$$

设 $h\in C[0,2\pi]$，由引理 1 可知，周期边值问题(1)的线性周期边值问题

$$\begin{cases} u'''+au''+bu'+cu=h(t), & t\in[0,2\pi], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), & i=0,1,2 \end{cases}$$

有唯一解 u，其中

$$u(t)=\int_0^{2\pi} G_i(t,s)h(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,2\pi],\ i=1,2,3,4.$$

接下来定义一个算子

$$Au(t)=\int_0^{2\pi} G_i(t,s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s,\ t\in[0,2\pi],\ i=1,2,3,4. \tag{6}$$

其中 $C^+[0,2\pi]$ 是 $C[0,2\pi]$ 中所有非负函数构成的锥，则非线性周期边值问题(1)的解等价于 A 的不动点，接下来，用锥上的不动点指数理论找到 A 的非零不动点，选择 $C^+[0,2\pi]$ 中的子锥

$K=\left\{u\in C^+[0,2\pi]\,\middle|\,u(t)\ge\sigma_i\|u\|,0\le t\le 2\pi\right\}$，其中 $\sigma_i=\dfrac{m_i}{M_i}>0$， $i=1,2,3,4$， $\|u\|$ 是 $C^+[0,2\pi]$ 中最大的范数，

则有下述引理：

引理 10 $A(K)\in K$，且 $A:K\to K$ 是全连续的。

证明：设 $u\in K$，由 $G_i(t,s)\le M_i,\ t\in[0,2\pi],\ i=1,2,3,4$ 可得

$$Au(t)=\int_0^{2\pi} G_i(t,s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\le M_i\int_0^{2\pi} f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s,\ t\in[0,2\pi],\ i=1,2,3,4,$$

且

$$\|Au(t)\|\le M_i\int_0^{2\pi} f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s,\ t\in[0,2\pi],$$

再由 $m_i\le G_i(t,s)$ 可得

$$Au(t)=\int_0^{2\pi}G_i(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\ge m_i\int_0^{2\pi}f(s,u(s))\mathrm{d}s\ge\frac{m_i}{M_i}\|Au\|=\sigma_i\|Au\|,$$

其中 $t\in[0,2\pi]$，$i=1,2,3,4$，这表明 $Au\in K$，因此 $A(K)\in K$，故 A 是全连续的。

假设 E 是一个 Banach 空间，并且 $K(\subset E)$ 是空间 E 的一个闭锥，假设 Ω 是 E 的一个有界开集，其边界为 $\partial\Omega$，并且 $K\cap\bar{\Omega}\ne\varnothing$。设 $A:K\cap\bar{\Omega}\to K$ 是一个全连续映射，如果对于任意的 $u\in K\cap\partial\Omega, Au\ne u$，此时可以定义不动点指数理论 $i(A,K\cap\Omega,K)$，最重要的是，如果 $i(A,K\cap\Omega,K)\ne 0$，则在 $K\cap\Omega$ 中 A 有一个不动点。

对于 $r>0$，令 $K_r=\{u\in K\,|\,\|u\|<r\}$, $\partial K_r=r$ 是 K_r 在 K 中的边界。因此，下文将用到下述的两个引理去证明问题(1)正解的存在性。

引理 11 [11]设 $A:K\to K$ 是一个全连续映射，如果对于任意的 $u\in\partial K_r$，当 $0<\mu\le 1$ 时，有 $\mu Au\ne u$，则 $i(A,K_r,K)=1$。

引理 12 [11]设 $A:K\to K$ 是一个全连续映射，假设下面两种情况成立：

(i) $\inf\limits_{u\in\partial K_r}\|Au\|>0$，

(ii) 对于任意的 $u\in\partial K_r$，当 $\mu\ge 1$，$\mu Au\ne u$，

则 $i(A,K_r,K)=0$。

接下来将证明三阶微分方程周期边值问题正解的存在性。

情况 1： 当 $\Delta=0$ 时，若 $p=0$，则 $q=0$，$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\frac{a}{3}=-\frac{c}{a}=-\frac{3c}{b}$，$\lambda\in R$。

定理 1 设 $f\in C([0,2\pi]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，且特征值 $\lambda<0$，则在下面每种情况下

(i) $\overline{f_0}<c, \underline{f_\infty}>c;$

(ii) $\underline{f_0}>c, \overline{f_\infty}<c,$

周期边值问题(1)至少存在一个正解。

证明： 由引理 10 和 K 的定义得，(6)式定义的算子 A 的非零不动点是周期边值问题(1)的正解，下面将分两种情况去证明 A 有一个非零不动点。

情况(i)：由于 $\overline{f_0}<c$，根据 $\overline{f_0}$ 的定义，取 $\varepsilon\in(0,c)$，$r_0>0$，使得

$$f(t,u)\le(c-\varepsilon)u,\ \forall t\in[0,2\pi],\ 0\le u\le r_0. \tag{7}$$

令 $r\in(0,r_0)$。

下面用反证法证明：对于任意的 $u\in\partial K_r$ 和 $0<\mu\le 1$，有 $\mu Au\ne u$。

假设存在 $u_0\in\partial K_r$ 和 $0<\mu_0\le 1$，使得 $\mu_0 Au_0=u_0$，则由 A 的定义得 $u_0(t)$ 满足微分方程

$$u_0'''(t)+au_0''(t)+bu_0'(t)+cu_0(t)=\mu_0 f(t,u_0(t)),\ t\in[0,2\pi] \tag{8}$$

和边界条件 $u_0^{(i)}(0)=u_0^{(i)}(2\pi)$, $i=0,1,2$，对上述微分方程从 0 到 2π 上积分，并且利用 $u_0(t)$ 的周期性和(7)式，可得

$$\begin{aligned}c\int_0^{2\pi}u_0(t)\mathrm{d}t&=\mu_0\int_0^{2\pi}f(t,u_0(t))\mathrm{d}t\\&\le\int_0^{2\pi}f(t,u_0(t))\mathrm{d}t\\&\le(c-\varepsilon)\int_0^{2\pi}u_0(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由 K 的定义，$u_0(t)\ge\sigma_1\|u_0\|=\sigma_1 r$，则有 $\int_0^{2\pi}u_0(t)\mathrm{d}t>0$。从上面不等式可得 $c\le c-\varepsilon$，矛盾。因此 A 满足

引理 11 的条件，故

$$i\left(A,K_r,K\right)=1 \tag{9}$$

另一方面，由于 $\underline{f_\infty}>c$，则存在 $\varepsilon>0$， $H>0$ 使得

$$f\left(t,u\right)\geq\left(c+\varepsilon\right)u,\ \forall t\in\left[0,2\pi\right],\ u\geq H. \tag{10}$$

令 $C=\max_{0\leq t\leq 2\pi,0\leq u\leq H}\left|f\left(t,u\right)-\left(c+\varepsilon\right)u\right|+1$，因此对于任意的 $t\in\left[0,2\pi\right]$ 和 $u\geq 0$，有

$$f\left(t,u\right)\geq\left(c+\varepsilon\right)u-C, \tag{11}$$

取 $R>R_0:=\max\left\{H/\sigma_1,r_0\right\}$，设 $u\in\partial K_R$。由于当 $s\in\left[0,2\pi\right]$ 时，有 $u\left(s\right)\geq\sigma_1\|u\|>H$，结合(5)式、(10)式和 K 的定义可得

$$\begin{aligned}\|Au\|\geq Au\left(t\right)&=\int_0^{2\pi}G_1\left(t,s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\\&\geq m\int_0^{2\pi}f\left(s,u\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\\&\geq m\left(c+\varepsilon\right)\int_0^{2\pi}u\left(s\right)\mathrm{d}s\\&\geq 2\pi m\left(c+\varepsilon\right)\sigma_1\|u\|,\end{aligned}$$

即

$$\|Au\|\geq 2\pi m\left(c+\varepsilon\right)\sigma_1\|u\| \tag{12}$$

因此 $\inf\limits_{u\in\partial K_R}\|Au\|>0$，即引理 12 的(i)成立。

下面用反证法证明：若 R 足够大，则对于任意的 $u\in\partial K_R$ 和 $\mu\geq 1$，有 $\mu Au\neq u$。

假设存在 $u_0\in\partial K_R$ 和 $\mu_0\geq 1$，使得 $\mu_0 Au_0=u_0$，则 $u_0\left(t\right)$ 满足微分方程(8)和边界条件 $u_0^{(i)}\left(0\right)=u_0^{(i)}\left(2\pi\right),\ i=0,1,2$，对方程(8)从 0 到 2π 上积分得

$$\begin{aligned}c\int_0^{2\pi}u_0\left(t\right)\mathrm{d}t&=\mu_0\int_0^{2\pi}f\left(t,u_0\left(t\right)\right)\mathrm{d}t\\&\geq\int_0^{2\pi}f\left(t,u_0\left(t\right)\right)\mathrm{d}t\\&\geq\left(c+\varepsilon\right)\int_0^{2\pi}u_0\left(t\right)\mathrm{d}t-C,\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{2\pi}u_0\left(t\right)\mathrm{d}t\leq\frac{C}{\varepsilon} \tag{13}$$

由 K 的定义， $\int_0^{2\pi}u_0\left(t\right)\mathrm{d}t\geq\sigma_1\|u_0\|$，再结合(13)式可得

$$\|u_0\|\leq\frac{1}{\sigma_1}\int_0^{2\pi}u_0\left(t\right)\mathrm{d}t\leq\frac{C}{\sigma_1\varepsilon}:=\overline{R} \tag{14}$$

令 $R>\max\left\{\overline{R},R_0\right\}$，则对任意的 $u\in\partial K_R$ 和 $\mu\geq 1$，有 $\mu Au\neq u$，即引理 12 的条件(ii)也成立，则由引理 12 可得

$$i\left(A,K_R,K\right)=0 \tag{15}$$

再由不动点指数的可加性、(9)式和(15)式可得

$$i\left(A,K_R\setminus\overline{K_r},K\right)=i\left(A,K_R,K\right)-i\left(A,K_r,K\right)=-1$$

因此 A 在 $K_R \setminus \overline{K_r}$ 中有一个不动点，并且它是周期边值问题(1)的正解。

情况(ii)：由于 $\underline{f_0} > c$，则存在 $\varepsilon > 0,\ \eta > 0$，使得

$$f(t,u) \ge (c+\varepsilon)u,\ \forall t \in [0,2\pi],\ 0 \le u \le \eta. \tag{16}$$

令 $r \in (0,\eta)$，则对任意的 $u \in \partial K_r$，由(12)式得 $\inf\limits_{u \in \partial K_r} \|Au\| > 0$，即引理 12 的条件(i)成立。

下面用反证法证明：对任意的 $u \in \partial K_r$ 和 $\mu \ge 1$，有 $\mu Au \ne u$。

假设存在 $u_0 \in \partial K_r$ 和 $\mu_0 \ge 1$，使得 $\mu_0 Au_0 = u_0$，则 $u_0(t)$ 满足微分方程(8)和边界条件 $u_0^{(i)}(0) = u_0^{(i)}(2\pi),\ i = 0,1,2$，由(8)式和(16)式可得

$$c\int_0^{2\pi} u_0(t)\mathrm{d}t \ge (c+\varepsilon)\int_0^{2\pi} u_0(t)\mathrm{d}t.$$

由 $\int_0^{2\pi} u_0(t)\mathrm{d}t \ge \sigma_1 \|u_0\| > 0$，得 $c \ge c+\varepsilon$，矛盾。即引理 12 的条件(ii)也成立，则由引理 12 得

$$i(A,K_r,K) = 0 \tag{17}$$

又由 $\overline{f}_\infty < c$，则存在 $\varepsilon \in (0,c)$，$H > 0$，使得

$$f(t,u) \le (\mathrm{c}-\varepsilon)u,\ \forall t \in [0,2\pi],\ u \ge H.$$

令 $C = \max_{0 \le t \le 2\pi, 0 \le u \le H} |f(t,u) - (\mathrm{c}-\varepsilon)u| + 1$，则可得

$$f(t,u) \le (\mathrm{c}-\varepsilon)u + C,\ \forall t \in [0,2\pi],\ u \ge 0 \tag{18}$$

下面用反证法证明：对任意的 $u \in \partial K_R$ 和 $0 < \mu \le 1$，有 $\mu Au \ne u$。

假设存在 $u_0 \in \partial K_R$ 和 $0 < \mu_0 \le 1$，使得 $\mu_0 Au_0 = u_0$，则 $u_0(t)$ 满足微分方程(8)和边界条件 $u_0^{(i)}(0) = u_0^{(i)}(2\pi),\ i = 0,1,2$，由(10)式和(18)式可得

$$c\int_0^{2\pi} u_0(t)\mathrm{d}t \le (c-\varepsilon)\int_0^{2\pi} u_0(t)\mathrm{d}t + C.$$

由(15)式得 $\|u_0\| \le \overline{R}$。令 $R > \max\{\overline{R},\eta\}$，则对任意的 $u \in \partial K_R$ 和 $0 < \mu \le 1$，有 $\mu Au \ne u$，则由引理 11 得

$$i(A,K_R,K) = 1 \tag{19}$$

再由不动点指数的可加性，(17)式和(19)式得到

$$i\left(A, K_R \setminus \overline{K_r}, K\right) = i(A,K_R,K) - i(A,K_r,K) = 1。$$

因此 A 在 $K_R \setminus \overline{K_r}$ 中有一个不动点，它是周期边值问题(1)的正解。

证毕。

根据定理 1，我们可以得出以下结论：

推论 1 设 $f \in C([0,2\pi]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，且特征值 $\lambda < 0$，则在下述任意条件中：

(i) $\overline{f}_0 = 0,\ \overline{f}_\infty = +\infty$ (超线性)；

(ii) $\underline{f}_0 = +\infty,\ \underline{f}_{+\infty} = 0$ (次线性)，

周期边值问题(1)存在一个正解。

其他三种情况的证明与定理 1 相似。

参考文献

[1] Kong, L.B., Wang, S.T. and Wang, J.Y. (2001) Positive Solution of a Singular Nonlinear Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **132**, 247-253. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00325-3

[2] Sun, J.X. and Liu, Y.S. (2005) Multiple Positive Solutions of Singular Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Acta Mathematica Scientia*, **25**, 81-88. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30263-1

[3] Chu, J.F. and Zhou, Z.C. (2006) Positive Solutions for Singular Non-Linear Third-Order Periodic Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **64**, 1528-1542. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.07.005

[4] Yu, H.X. and Pei, M.H. (2010) Solvability of a Nonlinear Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Applied Mathematics Letters*, **23**, 892-896. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.04.005

[5] Zhang, F., Wang, F. and Wang, F. (2011) Existence and Multiplicity of Positive Solutions to Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Annals of Applied Mathematics*, **27**, 248-252.

[6] Bai, J. and Li, Y.X. (2015) Existence and Uniqueness Result for Third-order Periodic Boundary Value Problem with the First Derivatives. *Journal of Sichuan Normal University* (*Natural Science*), **38**, 834-837.

[7] Bouteraa, N. and Benaicha, S. (2018) Existence of Solutions for Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Mathematica*, **60**, 12-22. https://doi.org/10.24193/mathcluj.2018.1.03

[8] Omari, P. and Trombetta, M. (1992) Remarks on the Lower and Upper Solutions Method for Second and Third-Order Periodic Boundary Value Problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **50**, 1-21. https://doi.org/10.1016/0096-3003(92)90007-N

[9] Cabada, A. (1994) The Method of Lower and Upper Solutions for Second, Third, Fourth and Higher-Order Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **185**, 302-320. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1250

[10] Cabada, A. (1995) The Method of Lower and Upper Solutions for Third-Order Periodic Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **195**, 568-589. https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1375

[11] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York.