Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1121-1129
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116126

p-Laplacian 混合边值问题径向凸解的存在性

赵亚丽，陈天兰*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: zylZYL19970807@163.com, *chentianlan511@126.com

收稿日期：2021年5月8日；录用日期：2021年6月10日；发布日期：2021年6月17日

摘 要

运用 Krasnoselskii 不动点定理, 本文考虑 p-Laplacian 混合边值问题

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u)) = f(|x|, -u) & x \in B_1, \\ u = 0 & x \in \partial B_1 \end{cases}$$

负的径向凸解的存在性, 其中 $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, $N \geq 1$, $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 连续.

关键词

p-Laplacian 算子，凹解，Krasnoselskii不动点定理，径向凸解

Existence of Radial Convex Solutions for Mixed Boundary Value Problem of p-Laplacian

Yali Zhao, Tianlan Chen*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: zylZYL19970807@163.com, *chentianlan511@126.com

* 通讯作者。

文章引用: 赵亚丽, 陈天兰. p-Laplacian 混合边值问题径向凸解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1121-1129. DOI: 10.12677/pm.2021.116126

Received: May 8^{th}, 2021; accepted: Jun. 10^{th}, 2021; published: Jun. 17^{th}, 2021

Abstract

In this paper, by using Krasnoselskii fixed point throrem, we consider the existence of negative radial convex solutions for mixed boundary value problem of p-Laplacian

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u)) = f(|x|, -u) & x \in B_1, \\ u = 0 & x \in \partial B_1, \end{cases}$$

where $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, $N \geq 1$, $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ is continuous.

Keywords

p-Laplacian Operator, Concave Solutions, Krasnoselskii Fixed Point Theorem, Radial Convex Solutions

1. 介绍

p-Laplacian 问题来源于物理学, 在流体力学、电磁学、天体物理学、非线性弹性力学和非线性偏微分方程径向解领域有着广泛的应用, 参见文 [1–3], 其解的存在性和多重性受到了许多学者的关注, 并取得了一系列研究成果, 参见文 [4–7]. 目前大多数文献运用的主要工具有上下解方法、不动点指数理论、Schauder 不动点定理、Leray-Schauder 非线性抉择原理、单调迭代法以及比较定理等方法.

文 [1]运用 Leray-Schauder 原理和上下解方法研究了 p-Laplacian 两点边值问题

$$[\varphi_p(u'(t))]' + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

正解存在的充要条件, 其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续.

文 [7]运用分歧理论研究了 p-Laplacian 方程 Robin 边值问题

$$\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u))+\lambda h(x)f(u)=0 \quad x\in B,$$

$$u=0 \qquad\qquad x\in\partial B$$

三个解的存在性, 其中 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续, 参数 $\lambda>0$, 且 h 是变权函数.

文 [8]运用锥上的不动点定理研究了一类 Minkowski 空间中带有平均曲率算子的奇异 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right)=f(|x|,-v) & x\in B_1,\\ v=0 & x\in\partial B_1\end{cases}$$

非平凡径向凸解的存在性, 其中 $f:[0,1]\times[0,1)\to[0,\infty)$ 连续, 且在 $u=1$ 处允许具有奇异性.

受以上文献的启发, 本文主要运用 Krasnoselskii 不动点定理研究 p-Laplacian 方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u))=f(|x|,-u) & x\in B_1,\\ u=0 & x\in\partial B_1\end{cases}\tag{1}$$

径向凸解的存在性. 为了求径向对称解, 不妨令 $u(x)=\omega(r)$ 且 $r=|x|$, 则问题 (1) 等价于 Robin 边值问题

$$\begin{cases}(r^{N-1}\varphi_p(\omega'))'=r^{N-1}f(r,-\omega), & r\in(0,1),\\ \omega'(0)=0, \quad \omega(1)=0.\end{cases}\tag{2}$$

若 $\omega(r)$ 满足问题 (2), 且对任意 $r\in[0,1]$, 有 $\omega(r)\le 0$, $\omega''(r)\ge 0$, 则 $\omega(r)$ 是问题 (2) 负的径向凸解. 运用变量代换 $v(r)=-\omega(r)$, 则问题 (2) 转化为 Robin 边值问题

$$\begin{cases}(r^{N-1}\varphi_p(-v'))'=r^{N-1}f(r,v), & r\in(0,1),\\ v'(0)=0, \quad v(1)=0.\end{cases}\tag{3}$$

显然, 问题 (3) 正凹解对应问题 (2) 的径向凸解, 因此, 我们只需研究问题 (3) 正凹解的存在性, 进而获得问题 (1) 负的径向凸解的存在性.

本文总假定：

(H_0) $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续.

(H_1) 存在非减函数 $\psi_1\in\mathbb{C}([0,\infty),[0,\infty))$ 和常数 $c>0$, $\alpha>0$, 使得

$$f(r,v)\le\alpha\psi_1(v), \quad (r,v)\in[0,1]\times[0,c],$$

且 $\alpha\psi_1(c) \le N\varphi_p(c)$.

(H_2) 存在非减函数 $\psi_2 \in \mathbb{C}([0,\infty),[0,\infty))$ 和常数 $d>0$, $\beta>0$, 使得

$$f(r,\upsilon) \ge \beta\psi_2(\upsilon), \quad (r,\upsilon) \in [0,1]\times[\sigma d, d],$$

且 $\varphi_p^{-1}(\psi_2(\sigma d))\cdot(\frac{\beta}{N})^{\frac{1}{p-1}}(1-\frac{1}{p})(1-(1-\sigma)^{\frac{p}{p-1}}) \ge \sigma d$. 其中 $0<\sigma<\frac{1}{2}$.

(H_3) 存在函数 $l_1,\ l_2:[0,1]\to[0,+\infty)$, 满足

$$\limsup_{\upsilon\to 0}\frac{f(r,\upsilon)}{\varphi_p(\upsilon)} = l_1(r), \quad \liminf_{\upsilon\to\infty}\frac{f(r,\upsilon)}{\varphi_p(\upsilon)} = l_2(r), \quad \text{在 } [0,1] \text{ 上一致成立},$$

(H_4) 存在函数 $l_3,\ l_4:[0,1]\to[0,+\infty)$, 满足

$$\limsup_{\upsilon\to \infty}\frac{f(r,\upsilon)}{\varphi_p(\upsilon)} = l_3(r), \quad \liminf_{\upsilon\to 0}\frac{f(r,\upsilon)}{\varphi_p(\upsilon)} = l_4(r), \quad \text{在 } [0,1] \text{ 上一致成立}.$$

本文的主要结果如下.

定理 1 假定 (H_0), (H_1) 和 (H_2) 成立. 则以下结论成立.

(i) 若 $c<\sigma d$, 则问题 (3) 至少存在一个正凹解 υ 且满足

$$d \ge \|\upsilon\| \ge c, \qquad \sigma d \ge \min_{r\in[\sigma,1-\sigma]}\upsilon(r) \ge \sigma c. \tag{4}$$

(ii) 若 $c>d$, 则问题 (3) 至少存在一个正凹解 υ 且满足

$$c \ge \|\upsilon\| \ge \sigma d, \qquad \min_{r\in[\sigma,1-\sigma]}\upsilon(r) \ge \sigma d. \tag{5}$$

定理 2 假定 (H_0) 和 (H_3) 成立, 且

$$0 \le l_1(r) < N, \qquad N\rho < l_2(r) \le +\infty,$$

其中 $\rho>0$ 是一个常数, 且满足 $(\rho)^{\frac{1}{p-1}}\cdot(1-\frac{1}{p})(1-(1-\sigma)^{\frac{p}{p-1}}) \ge 1$. 则问题 (1) 至少存在一个负的径向凸解.

定理 3 假定 (H_0) 和 (H_4) 成立, 且

$$0 \le l_3(r) < N, \qquad N\rho < l_4(r) \le +\infty,$$

其中 $\rho>0$ 是一个常数, 且满足 $(\rho)^{\frac{1}{p-1}}\cdot(1-\frac{1}{p})(1-(1-\sigma)^{\frac{p}{p-1}}) \ge 1$. 则问题 (1) 至少存在一个负的径向凸解.

2. 预备知识

本文使用的主要工具如下.

引理 1 [9] 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 的非空闭子集, Ω 是 X 的一个子集, 记

$$\Omega_K = \Omega \cap K, \quad \partial_K \Omega = (\partial \Omega) \cap K,$$

K 是 X 中的一个锥, Ω^a 和 Ω^b 是 X 的有界开子集, $\overline{\Omega^a}_K \subset \Omega^b_K$, $\Omega^a_K \neq \emptyset$. 若全连续算子 $T : \overline{\Omega^b}_K \to K$ 满足

(i) $\|T\upsilon\| \leq \|\upsilon\|$, $\upsilon \in \partial_K \Omega^a$;

(ii) 存在 $e \in K \backslash \{0\}$, 使得 $\upsilon \neq T\upsilon + \lambda e$, $\upsilon \in \partial_K \Omega^b$ 且 $\lambda > 0$,

则 T 在 $\overline{\Omega^b}_K \setminus \Omega^a_K$ 上至少有一个不动点.

下面给出本文使用的空间. 记

$$X = \mathbb{C}[0, 1],$$

其范数为 $\|\upsilon\| = \max\limits_{r \in [0,1]} |\upsilon(r)|$. 定义锥 K,

$$K = \{\upsilon \in X : \upsilon(r) \geq 0,\ r \in [0, 1] \text{ 且 } \min_{r \in [\sigma, 1-\sigma]} \upsilon(r) \geq \sigma \|\upsilon\|\},$$

其中 $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. 记

$$\Omega^a = \{\upsilon \in X : \min_{r \in [\sigma, 1-\sigma]} \upsilon(r) < \sigma a\}, \quad B^a = \{\upsilon \in X : \|\upsilon\| < a\}.$$

引理 2 [10,11] Ω^a 和 B^a 具有以下性质：

(i) Ω^a_K 和 B^a_K 相对 K 是开集;

(ii) $B^{\sigma a}_K \subset \Omega^a_K \subset B^a_K$;

(iii) $\upsilon \in \partial_K \Omega^a$ 当且仅当 $\min\limits_{r \in [\sigma, 1-\sigma]} \upsilon(r) = \sigma a$;

(iv) 若 $\upsilon \in \partial_K \Omega^a$, 则 $a \geq \upsilon(r) \geq \sigma a$, $r \in [\sigma, 1 - \sigma]$.

显然, 对每个 $a > 0$, 集合 Ω^a 是无界的, 所以不能对 Ω^a 直接应用引理 1. 因此, 对任意 $b > a$, 令

$$\Omega^a_K = (\Omega^a \cap B^b)_K, \quad \overline{\Omega^a}_K = (\overline{\Omega^a \cap B^b})_K,$$

由引理 2 的性质 (ii) 可知, 第一个等式成立. 不难看出, $(\overline{\Omega^a \cap B^b})_K \subseteq \overline{\Omega^a}_K$. 由引理 2 的性质 (iii) 可知, 对任意 $\upsilon \in \overline{\Omega^a}_K$, 有

$$\sigma \|\upsilon\| \leq \min_{r \in [\sigma, 1-\sigma]} \upsilon(r) \leq \sigma a < \sigma b,$$

DOI: 10.12677/pm.2021.116126

这就意味着 $\upsilon \in (\overline{\Omega^a} \cap B^b)_K$, 由于 Ω^a 和 B^b 是开集, 所以, $\overline{\Omega^a} \cap B^b \subset \overline{\Omega^a \cap B^b}$, 从而 $\upsilon \in (\overline{\Omega^a \cap B^b})_K$, $\overline{\Omega^a}_K \subseteq (\overline{\Omega^a \cap B^b})_K$. 因此, $\overline{\Omega^a}_K = (\overline{\Omega^a \cap B^b})_K$.

引理 3 [12]　设函数 $\upsilon \in \mathbb{C}([0,1],[0,\infty))$, $\upsilon'(r)$ 在 $[0,1]$ 上递减, 则

$$\min_{r\in[\sigma,1-\sigma]} \upsilon(r) \geq \sigma\|\upsilon\|.$$

引理 4　设 $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s,\ p > 1$, 则

$$\varphi_p^{-1}(s_1 s_2) = \varphi_p^{-1}(s_1)\varphi_p^{-1}(s_2), \qquad s_1, s_2 \in [0,\infty). \tag{6}$$

证明. 由 φ_p 的定义容易得到该引理成立, 故证明省略.

3. 主要结果的证明

定义 K 上的非线性算子 T,

$$T\upsilon(r) = \int_r^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(s,\upsilon(s))ds\right)dt, \qquad \upsilon \in K.$$

显然, 若 $\upsilon \in K$ 是 T 的一个不动点, 则 υ 是问题 (3) 的一个正凹解, 易证 $T\upsilon \in X$. 对任意 $\upsilon \in K$,

$$(T\upsilon)'(r) = -\varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1} f(s,\upsilon(s))ds\right) \leq 0,$$

故 $T\upsilon(r)$ 在 $[0,1]$ 上递减, 则

$$T\upsilon(r) \geq T\upsilon(1) = 0, \qquad r \in [0,1]. \tag{7}$$

注意到

$$r^{N-1}\varphi_p((T\upsilon)'(r)) = -\int_0^r s^{N-1} f(s,\upsilon(s))ds$$

在 $[0,1]$ 上是递减的, 又因 φ_p 是递增的, 故 $(T\upsilon)'(r)$ 在 $[0,1]$ 上递减. 由引理 3 可知,

$$\min_{r\in[\sigma,1-\sigma]} T\upsilon(r) \geq \sigma\|T\upsilon\|. \tag{8}$$

从而由 (7) 和 (8) 可得, $T(K) \subset K$. 显然, T 是全连续算子.

定理 1 的证明. 由 (6) 和 (H_1) 可知, 设 $\upsilon \in \partial_K B^c$, 对任意 $r \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}
Tv(r) &= \int_0^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}f(s,v(s))ds\right)dt \\
&\le \int_0^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}\alpha\psi_1(c)ds\right)dt \\
&= \int_0^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{\alpha\psi_1(c)}{N}t\right)dt = \int_0^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{\alpha\psi_1(c)}{N}\right)\cdot\varphi_p^{-1}(t)dt \\
&\le \varphi_p^{-1}\left(\frac{\alpha\psi_1(c)}{N}\right) \\
&\le c = \|v\|,
\end{aligned}$$

故 $\|Tv\| \le \|v\|$. 因此, 引理 1 中 (i) 成立.

令 $e \equiv 1 \in K\backslash\{0\}$, 下证

$$v \ne Tv + \lambda,\ v \in \partial_K\Omega^d \text{ 且 } \lambda > 0.$$

反设存在 $v_0 \in \partial_K\Omega^d$ 且 $\lambda_0 > 0$, 使得 $v_0 = Tv_0 + \lambda_0$, 由引理 2 的性质 (iv) 可知,

$$\sigma d = \sigma\|v_0\| \le v_0(r) \le d, \quad r \in [\sigma, 1-\sigma].$$

由 (6) 和 (H_2) 可知, 对任意 $r \in [\sigma, 1-\sigma]$, 我们有

$$\begin{aligned}
v_0(r) &= Tv_0(r) + \lambda_0 \\
&= \int_r^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}f(s,v(s))ds\right)dt + \lambda_0 \\
&\ge \int_{1-\sigma}^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}\beta\psi_2(\sigma d)ds\right)dt + \lambda_0 \\
&= \int_{1-\sigma}^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{\beta\psi_2(\sigma d)}{N}t\right)dt + \lambda_0 \\
&= \int_{1-\sigma}^1 \varphi_p^{-1}(\psi_2(\sigma d))\cdot\varphi_p^{-1}(\frac{\beta t}{N})dt + \lambda_0 \\
&= \varphi_p^{-1}(\psi_2(\sigma d))\cdot\int_{1-\sigma}^1 \varphi_p^{-1}\left(\frac{\beta t}{N}\right)dt + \lambda_0 \\
&= \varphi_p^{-1}(\psi_2(\sigma d))\cdot(\frac{\beta}{N})^{\frac{1}{p-1}}(1-\frac{1}{p})(1-(1-\sigma)^{\frac{p}{p-1}}) + \lambda_0 \\
&\ge \sigma d + \lambda_0,
\end{aligned}$$

这就意味着

$$\min_{r\in[\sigma,1-\sigma]} v_0(r) \ge \sigma d + \lambda_0 > \sigma d,$$

这与引理 2 的性质 (iii) 矛盾, 故引理 1 中 (ii) 成立.

若 $c < \sigma d$, 由引理 2 的性质 (ii) 可知,

$$\overline{B^c}_K \subset B_K^{\sigma d} \subset \Omega_K^d,$$

由引理 1 可知, T 至少有一个不动点 $\upsilon \in \overline{\Omega^d}_K \setminus B_K^c$, 满足 $\sigma d \geq \min\limits_{r\in[\sigma,1-\sigma]} \upsilon(r) \geq \sigma c$ 且 $\|\upsilon\| \geq c$, 因此, $\sigma d \geq \min\limits_{r\in[\sigma,1-\sigma]} \upsilon(r) \geq \sigma\|\upsilon\|$, $\|\upsilon\| \leq d$. 故 (4) 成立.

若 $d < c$, 则 $\overline{\Omega^d}_K \subset B_K^c$, 由引理 1 可知, T 至少有一个不动点 $\upsilon \in \overline{B_K^c} \setminus \Omega_K^d$. 因此, $c \geq \|\upsilon\| \geq \sigma d$, $\min\limits_{r\in[\sigma,1-\sigma]} \upsilon(r) \geq \sigma d$. 故 (5) 成立.

定理 2 的证明. 由 $0 \leq l_1(r) < N$ 可知, 存在一个常数 $c > 0$, 使得

$$f(r,\upsilon) \leq N\varphi_p(\upsilon), \quad (r,\upsilon) \in [0,1]\times[0,c],$$

取 $\alpha = N$, $\psi_1(\upsilon) = \varphi_p(\upsilon)$, 则

$$f(r,\upsilon) \leq \alpha\psi_1(\upsilon), \quad (r,\upsilon) \in [0,1]\times[0,c],$$

且

$$\alpha\psi_1(c) \leq N\varphi_p(c).$$

故 (H_1) 成立.

由 $N\rho < l_2(r) \leq +\infty$ 可知, 存在一个常数 $d > 0$, 使得 $\sigma d > c$,

$$f(r,\upsilon) \geq N\rho\varphi_p(\upsilon), \quad r \in [0,1], \quad \upsilon \geq \sigma d,$$

取 $\beta = N\rho$, $\psi_2(\upsilon) = \varphi_p(\upsilon)$, 则

$$f(r,\upsilon) \geq \beta\psi_2(\upsilon), \quad r \in [0,1], \quad \upsilon \geq \sigma d,$$

且

$$\varphi_p^{-1}(\psi_2(\sigma d)) \cdot \left(\frac{\beta}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} (1-\frac{1}{p})(1-(1-\sigma)^{\frac{p}{p-1}}) \geq \sigma d.$$

故 (H_2) 成立. 由定理 1 可知, 问题 (3) 至少存在一个正凹解, 则问题 (1) 至少存在一个负的径向凸解.

定理 3 的证明. 类同定理 2 的证明.

基金项目

国家自然科学基金青年基金资助项目(11801453, 11901464), 甘肃省青年科技基金计划资助(20JR10RA100).

参考文献

[1] Lv, H.S. and Bai, Z.B. (2004) A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of Positive Solutions to the Singular p-Laplacian. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, **6**, 289-296.

[2] 张晓燕, 孙经先. 一维奇异p-Laplacian方程多解的存在性[J]. 数学物理学报, 2006, 26(1): 143-149.

[3] Cossio, J., Herrón, S. and Vélez, C. (2011) Infinitely Many Radial Solutions for a p-Laplacian Problem p-Superlinear at the Origin. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **376**, 741-749. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.075

[4] Jin, C.H., Yin, J.X. and Wang, Z.J. (2007) Positive Radial Solutions of p-Laplacian Equation with Sign Changing Nonlinear Sources. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 1-14. https://doi.org/10.1002/mma.771

[5] Grey, E. and Antônio, Z. (2001) Existence of Positive Radial Solutions for the n-Dimensional p-Laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **44**, 355-360. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00269-2

[6] 金春花, 尹景学, 王泽佳. 具奇异源p-Laplace方程的多重径向正解[J]. 数学年刊A辑(中文版), 2008, 29(4): 471-478.

[7] Chen, T.L. and Ma, R.Y. (2019) Three Positive Solutions of N-Dimensional p-Laplacian with Indefinite Weight. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 19, 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.19

[8] Liang, Z.T. and Yang, Y.J. (2019) Radial Convex Solutions of a Singular Dirichlet Problem with the Mean Curvature Operator in Minkowski Space. *Acta Mathematica Scientia*, **39**, 395-402. https://doi.org/10.1007/s10473-019-0205-7

[9] Krasnoselskii, M.A. (1964) Positive Solutions of Operator Equations Noordhoff, Groningen.

[10] Lan, K.Q. (2001) Multiple Positive Solutions of Semilinear Differential Equations with Singularities. *Journal of the London Mathematical Society*, **63**, 690-704. https://doi.org/10.1112/S002461070100206X

[11] Infante, G. and Webb, J.R.L. (2002) Nonzero Solutions of Hammerstein Integral Equations with Discontinuous Kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **272**, 30-42. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00125-7

[12] Wang, H.Y. (2006) Convex Solutions of Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **318**, 246-252. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.05.067