Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1335-1340
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117150

Hans汉斯

一维空间中极大值原理的条件研究

王　静，闫宝强

山东师范大学，山东 济南
Email: 1557204916@qq.com, yanbqcn@aliyun.com

收稿日期：2021年5月31日；录用日期：2021年7月1日；发布日期：2021年7月8日

摘　要

本文通过改变条件函数$c(t)$的取值范围，得到了条件函数$c(t)\geq 0$时极大值原理不成立的反例。同时，通过举反例的方法得到了条件函数$c(t)\geq 0$不是极大值原理成立的必要条件。

关键词

极大值原理，一维空间，反例，条件函数

Research on the Condition of Maximum Principle in One-Dimensional Space

Jing Wang, Baoqiang Yan

Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: 1557204916@qq.com, yanbqcn@aliyun.com

Received: May 31st, 2021; accepted: Jul. 1st, 2021; published: Jul. 8th, 2021

Abstract

In this paper, by changing the value range of the conditional function $c(t)$, counterexamples are obtained that the maximum value principle does not hold when the conditional function is $c(t)\geq 0$. At the same time, the conditional function $c(t)\geq 0$ is not a necessary condition for the maximum principle to be established through counterexamples.

Keywords

Maximum Principle, One-Dimensional Space, Counterexample, Conditional Function

文章引用: 王静, 闫宝强. 一维空间中极大值原理的条件研究[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1335-1340.
DOI: 10.12677/pm.2021.117150

1. 引言

极大值原理是苏联学者 Л.С.庞特里亚金在 20 世纪 50 年代中期提出来的。它的提出将经典变分学推进到了现代变分学，是对分析力学中古典变分法的推广。极大值原理可以解决工程领域中的一些最优控制问题，成为现代控制理论的重要基石，见参考文献[1]。因此，研究极大值原理有着极其重要的理论价值和现实意义。随着研究的深入，一系列极大值原理应运而生，比如：极值曲线的极大值原理、抛物型方程的极大值原理、椭圆型方程的极大值原理、关于泛函的极大值原理、拟线性抛物型方程的极大值原理，见参考文献[2]-[7]。首先，根据参考文献[8]，给出一维空间中的极大值定理。

定理[8] 假设 $u(t)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$，且满足在 $(0,1)$ 上 $-u''(t)+c(t)u(t)\le 0$，其中在 $(0,1)$ 上 $c(t)\ge 0$。如果 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上有非负的最大值，那么 $u(t)$ 不在 $(0,1)$ 内取到该最大值。

本篇论文针对一维空间中极大值原理的条件函数进行了讨论，研究了其条件函数 $c(t)\ge 0$ 的重要性。

2. 条件函数 $c(t)<0$ 时极大值原理不成立的反例

令 $c(t)=\dfrac{-6}{t-t^2+1}$， $t\in(0,1)$，满足在定义域范围内 $c(t)<0$。如图 1 所示。

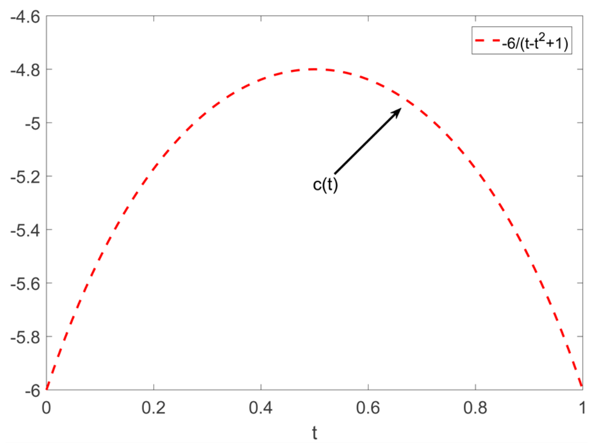

Figure 1. Image of conditional function $c(t)<0$

图 1. 条件函数 $c(t)<0$ 的图像

令

$$u(t)=t-t^2+1,\ \ t\in[0,1],$$

其中 $u(t)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内有非负的最大值， $u''(t)=-2$。如图 2 所示。

故

$$-u''(t)+c(t)u(t)=2+\left(-\frac{6}{t-t^2+1}\right)\times\left(t-t^2+1\right)=2-6=-4<0,\ \ t\in(0,1),$$

满足在 $(0,1)$ 内 $-u''(t)+c(t)u(t)\le 0$。

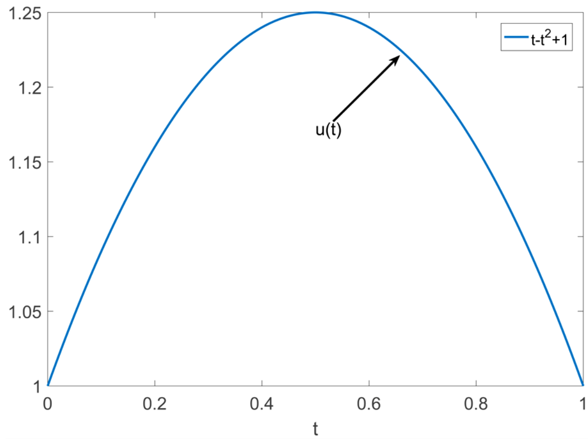

Figure 2. Image 1 where the function $u(t)$ does not meet the condition in the problem setting

图 2. 函数 $u(t)$ 不满足题设条件的图像 1

会发现，只要令 $c(t)=\dfrac{-k}{t-t^2+1}(k\geq 2)$，$t\in(0,1)$，对于 $u(t)=t-t^2+1$，$t\in[0,1]$，尽管在 $(0,1)$ 内都满足

$$-u''(t)+c(t)u(t)\leq 0,$$

但是 $u(t)$ 在 $(0,1)$ 内有非负的最大值。

因此，条件函数 $c(t)\geq 0$ 对于极大值原理的成立是非常重要的。

3. 条件函数 $c(t)$ 变号时极大值原理不成立的反例

令 $c(t)=(10-20t)^2-22$，$t\in(0,1)$，满足在定义域范围内 $c(t)$ 正负不定。如图 3 所示。

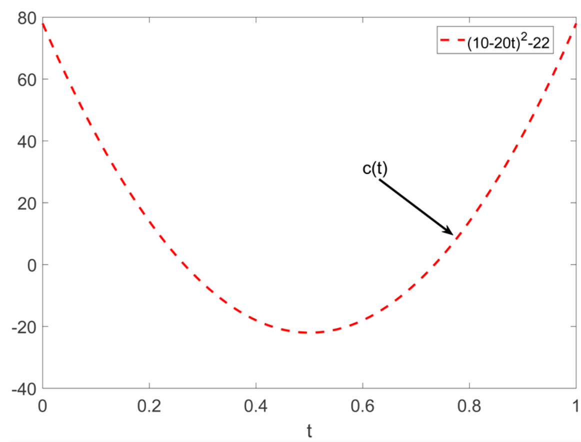

Figure 3. The image when the conditional function $c(t)$ changes sign

图 3. 条件函数 $c(t)$ 变号的图像

令

$$u(t)=\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2},\ t\in[0,1],$$

其中 $u(t)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内有非负的最大值，

$$u''(t)=-20\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}+(10-20t)^2\,\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}.$$

如图 4 所示。

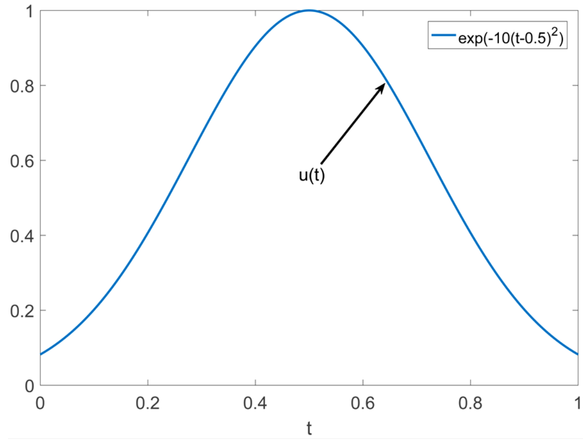

Figure 4. Image 2 where the function $u(t)$ does not meet the condition in the problem setting

图 4. 函数 $u(t)$ 不满足题设条件的图像 2

故

$$\begin{aligned}-u''(t)+c(t)u(t)&=20\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}-(10-20t)^2\,\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}+\left[(10-20t)^2-22\right]\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}\\&=-2\mathrm{e}^{-10(t-0.5)^2}\end{aligned},\quad t\in(0,1),$$

满足在 $(0,1)$ 内 $-u''(t)+c(t)u(t)\le 0$。如图 5 所示。

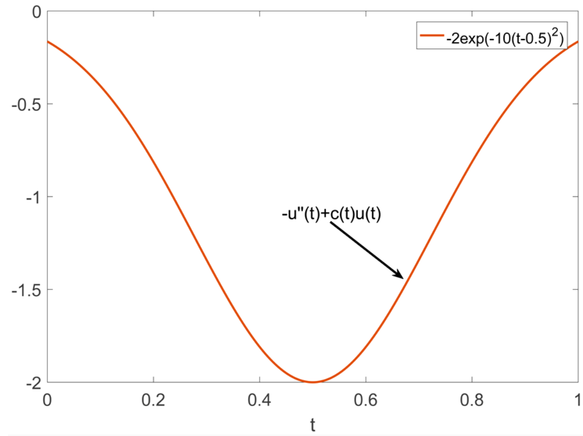

Figure 5. Image where the function $-u''(t)+c(t)u(t)$ meets the condition in the problem setting

图 5. $-u''(t)+c(t)u(t)$ 满足题设条件的图像

因此，条件函数 $c(t)\ge 0$ 对于极大值原理的成立是非常重要的。

4. 条件函数 $c(t)\ge 0$ 不是极大值原理成立的必要条件

1) 令 $u(t)=t^2-t+0.1$，$t\in[0,1]$，其中 $u''(t)=2$，可知 $u(t)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内没有非负的最大值。如图 6 所示。

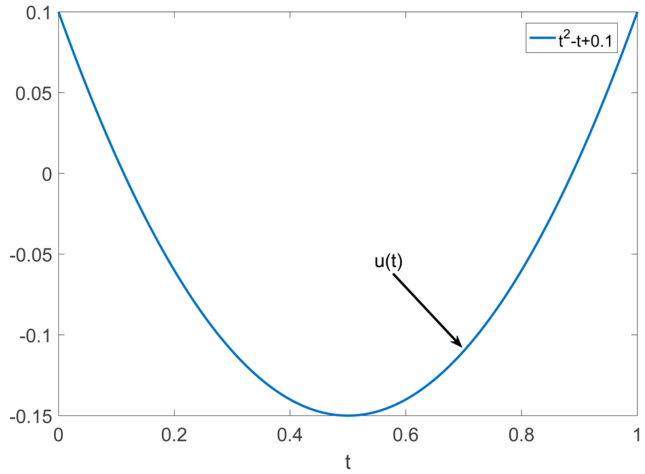

Figure 6. The function $u(t)$ satisfies the image 1 of the problem setting condition

图 6. 函数 $u(t)$ 满足题设条件的图像 1

令 $c(t) = -\sin t - 1$，$t \in (0,1)$，其中在定义域范围内 $c(t) < 0$。所以

$$-u''(t) + c(t)u(t) = -2 - (\sin t + 1) \times (t^2 - t + 0.1), \quad t \in (0,1),$$

满足在 $(0,1)$ 内 $-u''(t) + c(t)u(t) \le 0$。如图 7 所示。

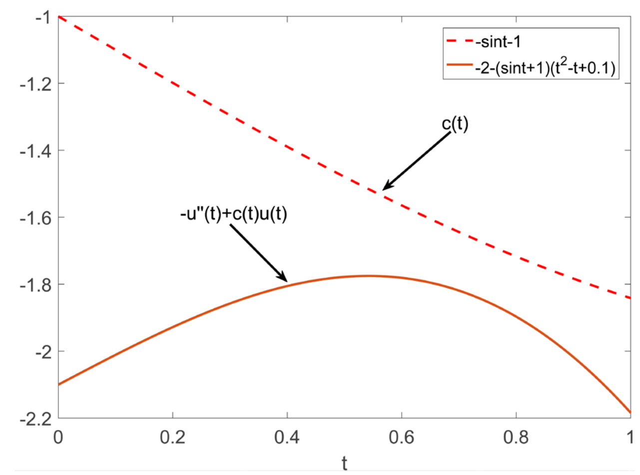

Figure 7. The image where the maximum principle holds when the conditional function $c(t) < 0$

图 7. 条件函数 $c(t) < 0$ 时极大值原理成立的图像

2) 令 $u(t) = t^2 - t + 0.5$，$t \in [0,1]$，其中 $u''(t) = 2$，可知 $u(t) \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内没有非负的最大值。如图 8 所示。

令 $c(t) = \sin t - 0.5$，$t \in (0,1)$，其中在定义域范围内 $c(t)$ 变号。所以

$$-u''(t) + c(t)u(t) = -2 + (\sin t - 0.5) \times (t^2 - t + 0.5), \quad t \in (0,1),$$

满足在 $(0,1)$ 内 $-u''(t) + c(t)u(t) \le 0$。如图 9 所示。

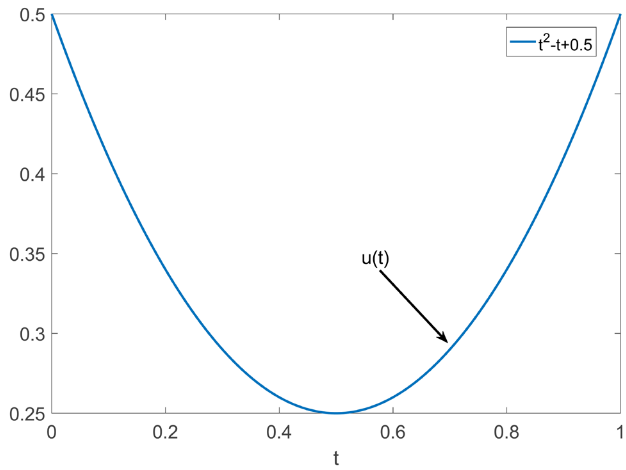

Figure 8. The function $u(t)$ satisfies the image 2 of the problem setting condition

图 8. 3 函数 $u(t)$ 满足题设条件的图像 2

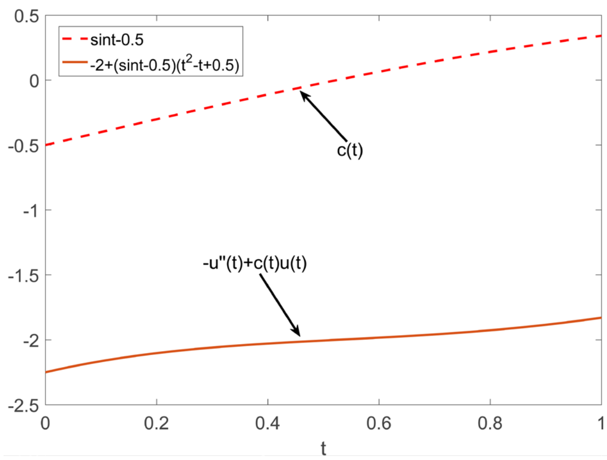

Figure 9. The image where the maximum principle holds when the conditional function $c(t)$ changes sign

图 9. 条件函数 $c(t)$ 变号时极大值原理成立的图像

综上所述，当条件函数 $c(t)<0$ 和 $c(t)$ 变号时都可以找到相应的 $u(t)$ 满足题设条件，故条件函数 $c(t)\geq 0$ 是上述极大值原理成立的充分不必要条件。

参考文献

[1] 陶炳治. 极大值原理在最优控制系统设计中的应用[J]. 战术导弹技术, 1987(2): 16-26.

[2] 阎仰奎. 极值曲线的极大值原理[J]. 山西大学学报(自然科学版), 1981(3): 57-59+56.

[3] 陈宁, 陈继乾, 朱秉林. 某些高阶抛物方程解的极值原理与爆破[J]. 四川建材学院学报, 1992(1): 48-55.

[4] 保继光. 几类非线性椭圆方程的极大值原理[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2003, 39(6): 711-715.

[5] 焦云芳. 关于泛函的极大值原理[J]. 吉林省教育学院学报, 2010, 26(11): 153-154.

[6] 焦云芳. 拟线性抛物型方程在 Neumann 边值条件下的极大值原理[J]. 赤峰学院学报(科学教育版), 2011, 3(11): 155-156.

[7] 焦云芳. 拟线性抛物型方程在第三边值条件下的极大值原理[J]. 晋城职业技术学院学报, 2012, 5(1): 68-70.

[8] Han, Q. and Lin, F.H. (2011) Elliptic Partial Differential Equations. Springer, New York.