Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1361-1368
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117153

Hans汉斯

凸体的 λ Entropy的Brunn-Minkowski不等式

张振坤

上海大学理学院，上海
Email: jizhu1945815@163.com

收稿日期：2021年6月11日；录用日期：2021年7月13日；发布日期：2021年7月21日

摘 要

在*The Gauss Image Problem*一文中Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang-Zhao提出了高斯像问题，并且在给定Borel测度 λ 绝对连续的假设下，证明了高斯像问题的解存在唯一性。在本文中，我们建立了凸体的 λ entropy的Brunn-Minkowski不等式。作为推论，我们给出高斯像问题唯一性的另一证明。注意到，即使测度 λ 不是绝对连续的，我们所得到的关于 λ entropy的Brunn-Minkowski不等式依旧成立。

关键词

Brunn-Minkowski不等式，高斯像测度，Aleksandrov积分曲率

The Brunn-Minkowski Inequalities of λ Entropy of Convex Body

Zhenkun Zhang

College of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: jizhu1945815@163.com

Received: Jun. 11th, 2021; accepted: Jul. 13th, 2021; published: Jul. 21st, 2021

Abstract

In the paper *Gauss Image Problem*, Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang-Zhao proposed the Gaussian image problem, and under the assumption that the Borel measure λ is absolutely continuous, they proved the existence and uniqueness of the solution of the Gaussian image problem. In this paper, we establish the Brunn-Minkowski type inequality of the λ entropy of convex body. As a corollary, we give another proof of the uniqueness of the Gaussian image problem. Note that even if the measure λ is not absolutely continuous, the Brunn-Minkowski inequality of the λ entropy still holds.

文章引用: 张振坤. 凸体的 λ Entropy 的 Brunn-Minkowski 不等式[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1361-1368.
DOI: 10.12677/pm.2021.117153

Keywords

Brunn-Minkowski Inequality, Gaussian Image Measure, Aleksandrov's Integral Curvature

1. 引言

Brunn-Minkowski 不等式始现于 19 世纪末期，它在如今蓬勃发展的凸几何分析中扮演着十分重要的角色。Brunn-Minkowski 不等式表明对于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K, L 它们的体积及其代数和具有下述关系：

$$V(K+L)^{\frac{1}{n}} \geq V(K)^{\frac{1}{n}} + V(L)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.1}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 位似，其中，V 表示体积。

Aleksandrov 在 20 世纪早期开创性的工作[1]表明在 Brunn-Minkowski 类型的不等式和混合表面积测度的唯一性之间存在着等价关系。在这里，“唯一性”意味着：如果 K 和 L 具有相同的混合表面积测度 $S_i(K,\cdot)=S_i(L,\cdot)$，其中 $1 \leq i \leq n-1$ [2]，那么 K 必是 L 的平移。

这一等价关系，对于 L_p Brunn-Minkowski 不等式以及 L_p 表面积测度[3]也同样成立。当 $p>1$ 时，关于 L_p Brunn-Minkowski 不等式的问题已经得到解决[4]，而 $P<1$ 的情况至今仍有待进一步的探索。[5] [6] [7]等解决了某些维度或者特殊 p 值的情形。

从对称性的观点出发，Lutwak [8]在 20 世纪 80 年代引入了对偶 Brunn-Minkowski 理论。将经典意义下的和替换成径向和后，Lutwak 建立了关于星体(详细定义参见第 2 节)的对偶 Brunn-Minkowsk 型不等式：

$$V(K \tilde{+} L)^{\frac{1}{n}} \leq V(K)^{\frac{1}{n}} + V(L)^{\frac{1}{n}} \tag{1.2}$$

该理论在解决著名的 Busemann-Petty 问题上取得的成果十分令人瞩目。参见 Lutwak [8]，Gardner [9]，Zhang [10]以及 Koldobsky [11]。

给定一个星体 K，在对偶 Brunn-Minkowski 理论中，最重要的概念之一就是对偶均质积分(dual quermassintegral) $\tilde{W}_{n-q}(K)$，它按如下方式定义

$$\tilde{W}_{n-q}(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^q(u)\,\mathrm{d}u, \quad q \neq 0,$$

其中，ρ_K 是 K 的径向函数(详细定义参见第 2 节)。当 $q=0$ 时，我们就得到了奇异的情形，此时，我们考虑对偶 entropy $\tilde{E}(K)$

$$\tilde{E}(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \log \rho_K(u)\,\mathrm{d}u$$

最近几年，Huang-Lutwak-Yang-Zhang [12]关于对偶均质积分有了令人惊讶的发现。他们发现对偶均质积分是“可微的”，对其微分后将得到一系列新的几何测度。这揭示出了古典 Brunn-Minkowski 理论和对偶 Brunn-Minkowsk 理论的新联系。对于凸体 K，这些新的几何测度统称为 (p,q)-次对偶曲率测度，其一般形式记为 $\tilde{C}_{p,q}(K,\cdot)$。当 $p=0$ 时，该测度就变成了对偶曲率测度[12]。当 $q=0$ 时，$n\tilde{C}_{p,q}(K^*,\cdot)$ 就变成了在[13]中引入的 L_p 积分曲率测度 $J_p(K,\cdot)$，其中 K^* 是 K 的极体(参见第 2 节)。特别地，$\tilde{C}_{0,0}(K^*,\cdot)$ 是 Alesandorv 积分曲率。

Brunn-Minkowski 类型的不等式与 Minkowski 问题存在紧密联系。然而，已知的关于径向和 $K\tilde{+}L$ 的对偶 Brunn-Minkowski 型不等式(1.2)式在测度 $\tilde{C}_{p,q}(K,\cdot)$ 的唯一性问题上没有帮助。在许多公开的学术讨论中，Huang-Lutwak-Yang-Zhang 关于对偶 Brunn-Minkowski 不等式曾猜测：

$$\tilde{W}_{n-q}(K+L)^{\frac{1}{q}} \geq \tilde{W}_{n-q}(K)^{\frac{1}{q}} + \tilde{W}_{n-q}(L)^{\frac{1}{q}} \tag{1.3}$$

以及当 $q>0$ 时，

$$\tilde{W}_{n-q}\left((1-t)\cdot K +_0 t\cdot L\right) \geq \tilde{W}_{n-q}(K)^{1-t}\tilde{W}(L)^{t} \tag{1.4}$$

其中，$(1-t)\cdot K +_0 t\cdot L$ 是关于函数 $h_K^{1-t}h_L^t$ 的 Wulff 形(详细定义参见第 2 节)，h_K 和 h_L 分别是 K 和 L 的支撑函数(详细定义参见第 2 节)。

在凸几何分析中，高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 可以将各种测度间接地联系起来。如通过径向高斯像，它将定义在 S^{n-1} 上的 Aleksandrov 积分曲率和球面 Lebesgue 测度联系起来，同时，也将经典的表面积测度与 Federer 的 $(n-1)$-次曲率测度联系起来([2]，定理 4.2.3 [12])。具体说来，在[12]中，Brunn-Minkowsk 理论和对 Brunn-Minkowski 理论的联系正是通过径向高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 建立的。在此基础上，Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang-Zhao 在[14]中引入了高斯像测度的概念，给出了测度唯一性的证明，并提出高斯像问题。下文中，我们用 $\mathcal{K}_o^n$ 表示内部包含原点的凸体类。

设 λ 是定义在 S^{n-1} 上的 Lebesgue 可测集类上的子测度(submeasure)。$K\in\mathcal{K}_o^n$，对任意的 Borel 集 $\omega\subset S^{n-1}$，λ 关于 K 的高斯像测度 $\lambda(K,\cdot)$ 可以定义为

$$\lambda(K,\omega)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)),$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}_K(\cdot)$ 是关于 K 的高斯像 (具体定义参见第 2 节)。

高斯像问题。设 λ 是一个定义在 S^{n-1} 上的 Lebesgue 可测集类上的子测度，μ 是定义在 S^{n-1} 上的 Borel 子测度。对 λ,μ 是否存在充分条件和必要条件，使得存在一个凸体 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 对 S^{n-1} 上的 Borel 集，满足

$$\lambda(K,\cdot)=\mu$$

若满足要求的凸体存在，那么在什么程度上是唯一的？

高斯像测度 λ 与我们已知的很多测度存在联系。当 λ 是 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度时，$\lambda(K,\cdot)$ 是凸体 K 的 Aleksandrov 积分曲率测度[15]，

$$\lambda(K,\cdot)=C_0(K,\cdot),$$

当 λ 是某个凸体 K 的曲率测度 $C_{n-1}(K,\cdot)$ 时，逆高斯像测度(详细定义参见第 2 节)就是表面积测度，即

$$\lambda^*(K,\cdot)=S_{n-1}(K,\cdot)$$

此外，Aleksandrov-Fenchel-Jessen 的经典的表面积测度[16]以及最近发现的对偶曲率测度都是高斯像测度[12]。这样，高斯像测度的引入就扩展了 Minkowski 问题的研究范围。

关于测度 λ 的对偶 Entropy $\tilde{E}_\lambda(K)$ 的定义为

$$\tilde{E}_\lambda(K)=\int_{S^{n-1}}\log\rho_K(v)\,\mathrm{d}\lambda(v).$$

Borel 测度 μ 是绝对连续的，指的是 μ 是关于球面 Lebesgue 测度绝对连续的。Böröczky-Lutwak-Yang-Zhang-Zhao [14]在 μ 是绝对连续的假设下，证明了高斯像问题的解存在唯一性。

本文通过几何的方法，建立了关于 $\tilde{E}_\lambda(K)$ 的不等式和等号条件。在此基础上，利用 $\tilde{E}_\lambda(K)$ 的凹性，结合变分公式，我们给出高斯像测度唯一性的另一种证明。我们得到的结果如下：

定理 A. 设 λ 是定义在 S^{n-1} 上的 Borel 测度。$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，$t\in[0,1]$，则

$$\tilde{E}_\lambda\left((1-t)\cdot K+_0 t\cdot L\right)\geq(1-t)\tilde{E}_\lambda(K)+t\tilde{E}_\lambda(L)$$

等号成立当且仅当 K,L 是膨胀的。

定理 B. 设 λ 是 S^{n-1} 上绝对连续的 Borel 测度。$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，则

$$\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$$

当且仅当 K,L 是膨胀的。

2. 预备知识

在本节中，我们将给出一些关于凸体的术语和记号。对于凸几何分析来说，Gardner [16]，Gruber [17] 以及 Schneider [2]的书都可以作为极好的参考。

对于 $x,y\in\mathbb{R}^n$，我们将其内积记为 $\langle x,y\rangle$。将 x 的模长记为 $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$。单位球面 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ 用 S^{n-1} 表示。以原点为中心的单位球 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq1\}$ 记为 B，ω_n 是 B 的体积，$n\omega_n$ 是 B 的表面积。V 是 n 维勒贝格测度。μ 是一个测度，$|\mu|=\mu\left(S^{n-1}\right)$。

凸体是 $\mathbb{R}^n$ 中内部非空的紧凸集。对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$，它的支撑函数 h_K 是

$$h_K(u)=\max\{\langle x,u\rangle:x\in K\}.$$

$\alpha>0$，$x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，凸体 K 的径向函数 ρ_K 的定义为

$$\rho_K(x)=\max\{\alpha:\alpha x\in K\}.$$

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，对于 $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$K$ 的以 v 为外法向量的支撑平面按如下方式定义

$$H_K(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,v\rangle=h_K(v)\right\}.$$

设 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$K\neq\varnothing$，若对于任意的 $x\in K$，线段 $[0,x]\subset K$，则称 K 是关于原点 o 的星集。当一个星集的径向函数为正的且连续时，称该星集为星体。$\mathbb{R}^n$ 中所有包含原点的星体组成一个星体类，记为 $\mathcal{S}_o^n$。

设 $C^+\left(S^{n-1}\right)$ 是定义在 S^{n-1} 上的正向函数类。对每一个 $f\in C^+\left(S^{n-1}\right)$，由 f 生成的 Wulff 形记为 $[f]$，其定义为

$$[f]=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,v\rangle\leq f(v),\forall v\in S^{n-1}\right\}.$$

对于任意的 $K\in\mathcal{K}_o^n$，易证 $h_{[f]}\leq f$ 以及 $[h_K]=K$。

设 $\Omega\subset S^{n-1}$ 是一个不包含 S^{n-1} 上任意闭半球面的闭集。若 $h:\Omega\to(0,\infty)$ 且 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的，$\delta>0$ 以及

$$\log h_t(v)=\log h(v)+tf(v)+o(t,v),$$

其中，对每一个 $t\in(-\delta,\delta)$，函数 $o(t,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim_{t\to0}o(t,\cdot)/t=0$ 在 Ω 上是一致。

对于函数 h_t 生成的 wulff 形 $[h_t]$，我们也称 $[h_t]$ 是由 (K,f) 生成的 Wulff 形。当 h 是某个凸体 K 的支撑函数时，我们也将 $[h_t]$ 写为 $[K,f]$ 或 $[K,f,t]$。

设 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的，$\delta>0$，对每一个 $t\in(-\delta,\delta)$，$\rho_t:\Omega\to(0,\infty)$ 是连续的，以及

$$\log\rho_t(u)=\log\rho(u)+tg(u)+o(t,u),$$

其中，函数 $o(t,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim_{t\to0}o(t,\cdot)/t=0$ 在 Ω 上是一致。

将由函数 ρ_t 生成的凸包定义为

$$\langle\rho_t\rangle = conv\left\{\rho_t(u)u : u\in S^{n-1}\right\},$$

称 $\langle\rho_t\rangle$ 是由 (ρ,g) 生成的对数族的凸包。如果 ρ 恰好是某个凸体的径向函数，就将 $\langle\rho_t\rangle$ 记为 $\langle K,g\rangle$，并称 $\langle K,g\rangle$ 是由 (K,g) 生成的对数族的凸包。

$\alpha\in(0,1)$，星体的 L_p 对偶组合 $(1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_p\alpha\cdot L$ (参见[14])按如下方式定义

$$(1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_p\alpha\cdot L = \left\{tu : 0\le t\le\left((1-\alpha)\rho_K^p(u)+\alpha\rho_L^p(u)\right)^{\frac{1}{p}}, u\in S^{n-1}\right\}, p\ne 0$$

在上式中，对括号中的不等式的最右边取极限就得到了 $p=0$ 的情形，此时上式函数变为 $\rho_K^{1-\alpha}\rho_L^{\alpha}$。

对任意 $K\in\mathcal{K}_o^n$， K^* 是 K 的极体，其定义为

$$K^* = \left\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,y\rangle\le 1,\forall y\in K\right\},$$

注意到 $K^*\in\mathcal{K}_o^n$，由 K^* 的定义，我们有

$$\rho_K = \frac{1}{h_{K^*}},\quad h_K = \frac{1}{\rho_{K^*}} \tag{2.1}$$

由此易得

$$K^{**} = K$$

对于 $K,L\in\mathcal{K}_o^n$，如果存在 $c>0$ 使得

$$K = cL$$

则称 K 和 L 是膨胀的。

$\sigma\subset\partial K$ 的球面像的定义为

$$\upsilon_K(\sigma) = \left\{v\in S^{n-1} : x\in H_K(v),\exists x\in\sigma\right\}\subset S^{n-1}$$

对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$， $u\in S^{n-1}$，将 K 的径向映射(radial map)定义为

$$r_K : S^{n-1}\to\partial K,\quad r_K(u) = \rho_K(u)u\in\partial K,$$

其中 ∂K 表示 K 的边界集。

对于 $\omega\subset S^{n-1}$，定义 ω 的径向高斯像为

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) = \upsilon_K\left(r_K(\omega)\right)\subset S^{n-1}.$$

类似地，对于 $\eta\subset S^{n-1}$， $\boldsymbol{\alpha}_K^*(\eta)$ 表示逆径向高斯像，它是所有径向方向 $u\in S^{n-1}$ 的集合，对于边界点 $\rho_K(u)u$ 可以在 η 中至少找到一个元素 v，作为边界点 $\rho_K(u)u$ 的外法向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_K^*(\eta) = \left\{u\in S^{n-1} : \boldsymbol{\alpha}_K(u)\cap\eta\ne\varnothing\right\}.$$

设 λ 是定义在 S^{n-1} 的 Lebesgue 可测子集的子测度， $K\in\mathcal{K}_o^n$。对任意的 Borel 集 $\omega\subset S^{n-1}$， λ 关于 K 的高斯像测度 $\lambda(K,\cdot)$ 可以定义为

$$\lambda(K,\omega) = \lambda\left(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\right).$$

对于每一个 Borel 集 $\omega\subset S^{n-1}$， $\lambda^*(K,\omega)$ 表示逆高斯像测度，其定义为

$$\lambda^*(K,\omega) = \lambda\left(\boldsymbol{\alpha}_K^*(\omega)\right) = \lambda\left(\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(\omega)\right).$$

对于任意的 $c>0$， $\lambda(K,\cdot)$ 和 $\lambda^*(K,\cdot)$ 都是膨胀不变的，即

$$\lambda(cK,\cdot)=\lambda(K,\cdot),\ \lambda^*(cK,\cdot)=\lambda^*(K,\cdot)$$

此外，关于$\lambda(K,\cdot)$和$\lambda^*(K,\cdot)$的关系，

$$\lambda^*(K,\cdot)=\lambda(K^*,\cdot) \tag{2.2}$$

$K\in\mathcal{K}_o^n$，[14]还给出了关于测度λ的K的对数体积$\lambda_0(K)$，

$$\lambda_0(K)=\exp\left\{\frac{1}{|\lambda|}\int_{S^{n-1}}\log\rho_K(u)\mathrm{d}\lambda(u)\right\}.$$

由对数体积$\lambda_0(K)$和关于λ的对偶 Entropy 的定义，有下式成立

$$\tilde{E}_\lambda(K)=|\lambda|\log\lambda_0(K) \tag{2.3}$$

引理 2.1 ([14]，引理 4.2) 设λ是S^{n-1}上绝对连续的 Borel 测度，$K\in\mathcal{K}_o^n$， $f,g:S^{n-1}\to\mathbb{R}$是连续的，若$\langle K,g\rangle$是一个由(K,g)生成的对数族的凸包，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\lambda_0\left(\langle K,f,t\rangle^*\right)\Big|_{t=0}=\frac{1}{|\lambda|}\int_{S^{n-1}}g(u)\mathrm{d}\lambda(K,u)$$

若$[K,f]$是由(K,f)生成的 Walff 形，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\lambda_0([K,f,t])\Big|_{t=0}=\frac{1}{|\lambda|}\int_{S^{n-1}}f(u)\mathrm{d}\lambda^*(K,u)$$

引理 2.2 设λ是S^{n-1}上绝对连续的 Borel 测度，$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，则

$$\lim_{t\to0}\frac{\tilde{E}_\lambda((1-t)\cdot K+_0t\cdot L)-\tilde{E}_\lambda(K)}{t}=\int_{S^{n-1}}\log\frac{h_L(u)}{h_K(u)}\mathrm{d}\lambda(K^*,v)$$

证明. 对充分小的$\delta>0$，$t\in(-\delta,\delta)$，令$h_t=h_K^{1-t}h_L^t$，所以$\log h_t=\log h_K+t(\log h_L-\log h_K)$，则$f=\log h_L-\log h_K$，由关于函数$h_t$的 Wulff 形的定义可知，

$$[K,f,t]=(1-t)\cdot K+_0t\cdot L,$$

f是连续的，结合引理 2.1，(2.2)式以及(2.3)式，立即得证。

3. 关于高斯像测度的 Brunn-Minkowski 不等式

引理 3.1 的证明我们已经在另一篇文章里给出了。在这里，考虑到文章的完整性，我们也给出证明。引理 3.1 给出的是一般的情形，取$p=0$立即就得到了我们想要的结果。在本节中，我们假设$K,L\in\mathcal{K}_o^n$。

引理 3.1 设$p\in\mathbb{R}$，$\alpha\in[0,1]$，则

$$(1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_p\alpha\cdot L\subset(1-\alpha)\cdot K+_p\alpha\cdot L, \tag{3.1}$$

等号成立当且仅当K和L是膨胀的。

证明. 第一步：不等式(3.1)。注意到$(1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_p\alpha\cdot L$是一个星体。为了证明(3.1)，只需要证明对任意的$v\in S^{n-1}$，有

$$\langle x,v\rangle\le h_{(1-\alpha)\cdot K+_p\alpha\cdot L}(v),\ \forall x\in\partial\left((1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_p\alpha\cdot L\right) \tag{3.2}$$

因为$\rho_K(u)u\in K$，$\rho_L(u)u\in L$，$\forall u\in S^{n-1}$，我们有

$$\langle\rho_K(u)u,v\rangle\le h_K(v),\ \langle\rho_L(u)u,v\rangle\le h_L(v),\ \forall v\in S^{n-1}$$

如果$\langle u,v\rangle \ge 0$，$p\ne 0$，我们有

$$\left((1-\alpha)\rho_K^p(u)+\alpha\rho_L^p(u)\right)^{\frac{1}{p}}\langle u,v\rangle \le \left((1-\alpha)h_K^p(u)+\alpha h_L^p(u)\right)^{\frac{1}{p}},$$

若$\langle u,v\rangle < 0$，则上面的不等式显然成立。由此可得，在$p\ne 0$时，对任意的$(1-\alpha)\cdot K\,\tilde{+}_p\,\alpha\cdot L$的边界点，(3.2)成立。

令上面不等式的$p\to 0$，我们得到

$$\rho_K^{1-\alpha}(u)\rho_L^{\alpha}(u)\langle u,v\rangle \le h_K^{1-\alpha}(v)h_L^{\alpha}(v),$$

即$p=0$时，(3.2)成立。

第二步：等号条件。现在我们假设在(3.1)中的等号成立。我们只给出$p\ne 0$时的证明，$p=0$的情况是类似的。对于任意的方向$u\in S^{n-1}$，边界点$\left((1-\alpha)\rho_K^p(u)+\alpha\rho_L^p(u)\right)^{\frac{1}{p}}u$必有一个外法向量$v$，则

$$\left((1-\alpha)\rho_K^p(u)+\alpha\rho_L^p(u)\right)^{\frac{1}{p}}\langle u,v\rangle = \left((1-\alpha)h_K^p(v)+\alpha h_L^p(v)\right)^{\frac{1}{p}},$$

由此可得

$$\rho_K(u)\langle u,v\rangle = h_K(v)\text{，以及 }\rho_L(u)\langle u,v\rangle = h_L(v)\text{。}$$

所以我们证明了对任意方向$u\in S^{n-1}$，边界点$\rho_K(u)u\in\partial K$和边界点$\rho_L(u)u\in\partial L$具有共同的法向量 v。所以K和L必是膨胀的。

反之，如果K和L是膨胀的，(3.1)的等号显然成立。

定理 3.2 设λ是S^{n-1}上的 Borel 测度，$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，$t\in[0,1]$，则

$$\tilde{E}_\lambda\left((1-t)\cdot K+_0 t\cdot L\right)\ge (1-t)\tilde{E}_\lambda(K)+t\tilde{E}_\lambda(L),$$

等号成立当且仅当K,L是膨胀的。

证明. 由引理 3.1 以及$\tilde{E}_\lambda(\cdot)$定义，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\lambda\left((1-t)\cdot K+_0 t\cdot L\right) &= \int_{S^{n-1}}\log\rho_{(1-t)\cdot K+_0 t\cdot L}(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)\\ &\ge \int_{S^{n-1}}\log\rho_{(1-t)\cdot K\tilde{+}_0 t\cdot L}(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)\\ &= \int_{S^{n-1}}\log\rho_K^{1-t}(u)\rho_L^t(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)\\ &= (1-t)\tilde{E}_\lambda(K)+t\tilde{E}_\lambda(L)\end{aligned}$$

由引理 3.1 的等号条件，等号成立当且仅当K,L是膨胀的。

4. 高斯像测度的唯一性

定理 4.1 设λ是S^{n-1}上绝对连续的 Borel 测度。$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，则

$$\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$$

当且仅当K,L是膨胀的。

证明. 对于$t\in[0,1]$，定义函数$F(t):=\tilde{E}_\lambda\left((1-t)\cdot K^*+_0 t\cdot L^*\right)$，由定理 3.2 可知，函数$F(t)$是凹的。由引理 2.2 可知，函数$F(t)$在$t=0$处是可微的。由函数$F(t)$的凹性，我们可以得到不等式

$$F'(0)\ge F(1)-F(0).$$

在$\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$时，如果$K$和$L$不是膨胀的，我们就得到严格的不等式

$$F'(0)> F(1)-F(0).$$

由上面得到的严格不等式，$K^{**}=K$ 以及引理 2.2，我们有

$$\int_{S^{n-1}}\log\frac{h_{L^*}(v)}{h_{K^*}(v)}\mathrm{d}\lambda(K,v)>\tilde{E}_\lambda(L^*)-\tilde{E}_\lambda(K^*) \tag{4.1}$$

$$\int_{S^{n-1}}\log\frac{h_{K^*}(v)}{h_{L^*}(v)}\mathrm{d}\lambda(L,v)>\tilde{E}_\lambda(K^*)-\tilde{E}_\lambda(L^*) \tag{4.2}$$

将(4.1)式和(4.2)式相加，我们可以得到 $0>0$，矛盾。

反过来，当 K 和 L 是膨胀的，即 $K=cL$ 时 $(c>0)$，由 $\lambda(K,\cdot)$ 的膨胀不变性，结果是显然的。

注：在另一文章中，我们已经得到了关于对偶均质积分 $\tilde{W}_{n-q}(K,\cdot)$ 的 Brunn-Minkowsk 不等式，并利用其刻画了 (p,q)-次对偶曲率测度 $\tilde{C}_{p,q}(K,\cdot)$ 的唯一性。

参考文献

[1] Alexandrov, A.D. (2006) A.D. Alexandrov Selected Works. Part II. Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Translated from the Russian by S. Vakhrameyev, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[2] Schneider, R. (2014) Convex Bodies: The Brunn-Minkowskim Theory, Volume 151 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Lutwak, E. (1993) The Brunn-Minkowski-Firey Theory. I. Mixed Volumes and the Minkowski Problem. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 131-150. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454097

[4] Firey, W.J. (1962) *p*-Means of Convex Bodies. *Mathematica Scandinavica*, **10**, 17-24. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10510

[5] Böröczky, K.J., Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2012) The Log-Brunn-Minkowski Inequality. *Advances in Mathematics*, **231**, 1974-1997. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.07.015

[6] Chen, S., Huang, Y., Li, Q. and Liu, J. (2020) The Lp-Brunn-Minkowski Inequality for P < 1. *Advances in Mathematics*, **368**, Article ID: 107166. https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107166

[7] Kolesnikov, A.V. and Milman, E. (2017) Local L^p-brunn-minkowski Inequalities for P < 1. https://arxiv.org/abs/1711.01089

[8] Lutwak, E. (1988) Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes. *Advances in Mathematics*, **71**, 232-261. https://doi.org/10.1016/0001-8708(88)90077-1

[9] Gardner, R.J. (1994) A Positive Answer to the Busemann-Petty Problem in Three Dimensions. *Annals of Mathematics*, **140**, 435-447. https://doi.org/10.2307/2118606

[10] Zhang, G. (1999) A Positive Solution to the Busemann-Petty Problem in R^4. *Annals of Mathematics*, **149**, 535-543. https://doi.org/10.2307/120974

[11] Koldobsky, A. (1998) Intersection Bodies, Positive Definite Distributions, and the Busemann-Petty Problem. *American Journal of Mathematics*, **120**, 827-840. https://doi.org/10.1353/ajm.1998.0030

[12] Huang, Y., Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2016) Geometric Measures in the Dual Brunn-Minkowski Theory and Their Associated Minkowski Problems. *Acta Mathematica*, **216**, 325-388. https://doi.org/10.1353/ajm.1998.0030

[13] Huang, Y., Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2018) The L^p-Aleksandrov Problem for L^p-Integral Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **110**, 1-29. https://doi.org/10.4310/jdg/1536285625

[14] Böröczky, K.J., Lutwak, E., Yang, D., Zhang, G. and Zhao, Y. (2020) The Gauss Image Problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **73**, 1406-1452. https://doi.org/10.1002/cpa.21898

[15] Alexandroff, A. (1942) Existence and Uniqueness of a Convex Surface with a Given Integral Curvature. *C. R.* (*Doklady*) *Acad. Sci. URSS* (*N.S.*), **35**, 131-134.

[16] Gardner, R.J. (2006) Geometric Tomography, Volume 58 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Second Edition, Cambridge University Press, New York.

[17] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry, Volume 336 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Berlin.