Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1570-1584
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118175

一类 Riemann-Liouville 分数阶中立型发展方程的近似可控性

王集宏*, 杨 和†

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: 1940358711@qq.com, †yanghe@nwnu.edu.cn

收稿日期：2021年7月18日；录用日期：2021年8月19日；发布日期：2021年8月26日

摘 要

本文运用 **Krasnoselskii** 不动点定理证明了 **Hilbert** 空间中一类 **Riemann-Liouville** 分数阶中立型发展方程的近似可控性, 并给出了抽象结果的应用例子。

关键词

Riemann-Liouville 分数阶导数，中立型发展方程，**Krasnoselskii** 不动点定理，近似可控性

Approximate Controllability for a Class of Riemann-Liouville Fractional Neutral Evolution Equations

Jihong Wang*, He Yang†

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1940358711@qq.com, †yanghe@nwnu.edu.cn

Received: Jul. 18^{th}, 2021; accepted: Aug. 19^{th}, 2021; published: Aug. 26^{th}, 2021

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 王集宏, 杨和. 一类 Riemann-Liouville 分数阶中立型发展方程的近似可控性[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1570-1584. DOI: 10.12677/pm.2021.118175

Abstract

In this paper, by using the Krasnoselskii fixed point theorem, the approximate controllability for a class of nonlinear Riemann-Liouville fractional neutral evolution equations is investigated in Hilbert spaces. An example is given to illustrate the application of the abstract conclusions.

Keywords

Riemann-Liouville Fractional Derivative, Neutral Evolution Equations, Krasnoselskii Fixed Point Theorem, Approximately Controllability

1. 引言

1963 年, Kalman [1] 首次提出可控性的概念, 由于其在物理学领域的广泛应用而成为一个活跃的研究领域, 其中精确可控性已被许多学者所研究 [2–4]. 但是精确可控性是一个较强的概念, 它要求系统能够达到事先任意给定的一个终止状态, 而近似可控则要求系统无限趋近于该终止状态, 因此在实际应用中近似可控性具有更加广泛的应用背景. 文献 [5] 研究了 Caputo 分数阶中立型泛函微分方程控制系统的近似可控性. 2005 年, Heymans 和 Podlubny [6] 指出, 可以将物理意义归因于粘弹性场中的 Riemann-Liouville 分数阶导数或积分表示的初始条件, 这样的初始条件更合适解释某些物理现象. 2014 年, 文献 [7] 利用 Darbo-Sadovskii 不动点定理证明了 Banach 空间 E 中当算子半群 $T(t)$ 紧或非紧情况下 Riemann-Liouville 分数阶中立型发展方程

$$\begin{cases} {}^LD^q[x(t)-h(t,x(t))] = -Ax(t)+f(t,x(t)), \ \ t\in J':=(0,b], \qquad 0<q<1 \\ \\ I_t^{1-q}[x(t)-h(t,x(t))]|_{t=0} = x_0 \in E \end{cases}$$

mild 解的存在性, 其中 ${}^LD^q$ 为 q 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数算子, I^{1-q} 为 $1-q$ 阶Riemann-Liouville 型分数阶积分, $-A: D(A)\subset E\to E$ 是解析半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元.

2015年, 文献 [8] 证明了 Banach 空间 E 中 Riemann-Liouville 分数阶发展方程

$$\begin{cases} {}^{L}D^{q}x(t)=Ax(t)+Bu(t)+f(t,x(t)), \quad t\in J', \quad 0<q\leqslant 1 \\ I_t^{1-q}x(t)|_{t=0}=x_0\in E \end{cases}$$

的近似可控性, 其中 $A:D(A)\subset E\to E$ 是 C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元, 控制函数 $u\in V:=L^p([0,b],\mathcal{U})$, $p>\frac{1}{q}$, $\mathcal{U}$ 为另一个 Banach 空间.

受上述文献的启发, 本文研究可分的 Hilbert 空间 X 中非线性分数阶中立型发展方程

$$\begin{cases} {}^{L}D^{q}[x(t)-h(t,x(t))]=Ax(t)+f(t,x(t))+Bu(t), \ \ t\in J', \\ I_t^{1-q}[x(t)-h(t,x(t))]|_{t=0}=x_0\in X \end{cases} \tag{1.1}$$

的近似可控性, 其中 $A:D(A)\subset X\to X$ 是稠定闭线性算子, 生成 X 中的解析半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, 控制函数 $u\in L^p(J,U)$, $p>\frac{1}{q}$, U 为另一个可分自反的 Hilbert 空间, $B:U\to X$ 为有界线性算子, 函数 f, h 将在后文中具体给出.

本文在算子半群 $T(t)$ 是紧半群的情况下, 运用 Krasnoselskii 不动点定理证明当函数 f, h 满足某些较弱条件时控制系统 (1.1) mild 解的存在性. 在函数 f, h 一致有界且控制系统 (1.1) 对应的线性控制系统近似可控的条件下, 证明控制系统 (1.1) 的近似可控性.

2. 预备知识

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为可分的 Hilbert 空间, $J=[0,b]$. 记 $C(J,X)$ 是从 J 到 X 上的连续函数全体按范数 $\|x\|_{C(J,X)}=\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|$ 构成的 Banach 空间, $L^p(J,X)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 是 J 上的 X 值 p-方 Bochner 可积函数全体构成的 Banach 空间, 其范数为 $\|x\|_{L^p}=(\int_0^b\|f(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}$. 记

$$C_{1-q}(J,X)=\{x\in C(J',X):t^{1-q}x(t)\in C(J,X),\ 0<q<1,t\in J\},$$

则 $C_{1-q}(J,X)$ 按范数 $\|x\|_{C_{1-q}}=\sup\limits_{t\in J}\{t^{1-q}\|x(t)\|\}$ 构成 Banach 空间. $X_\beta:=(D(A^\beta),\|\cdot\|_\beta)$ 是 X 中的内插空间, 其中 $\|\cdot\|_\beta=\|A^\beta\cdot\|$. 不失一般性, 假设 $\exists\, N\geqslant 1$, 使得

$$N:=\sup_{t\in J}\|T(t)\|<\infty.$$

定义 2.1 [8,9] 函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的 q 阶 Riemann-Liouville 型分数阶积分定义为

$$I_t^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s)ds, \quad t>0, \quad q>0,$$

其中 Γ 表示 gamma 函数.

定义 2.2 [8,9] 函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的 q 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义为

$$ {}^{L}D_t^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-q-1}f(s)ds\,,\quad t>0,\quad n-1<q\leqslant n. $$

其中 $n=[q]+1$, $[q]$ 表示 q 的整数部分.

类似于文献 [7,8] 利用 Laplace 变换得出如下定义.

定义 2.3 称 $x\in C_{1-q}(J,X)$ 是系统 (1.1) 的 mild 解, 当且仅当 x 满足积分方程

$$ \begin{cases} x(t)=t^{q-1}T_q(t)x_0+h(t,x(t))+\displaystyle\int_0^t (t-s)^{q-1}AT_q(t-s)h(s,x(s))ds \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)f(s,x(s))ds+\int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)Bu(s)ds,\quad t\in J', \\ I_t^{1-q}[x(t)-h(t,x(t))]|_{t=0}=x_0, \end{cases} \tag{2.1} $$

其中

$$ T_q(t)=q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, $$

$$ \xi_q(\theta)=\frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}W_q(\theta^{-\frac{1}{q}}), $$

$$ W_q(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(1+nq)}{n!}sin(n\pi q)\,,\ \theta\in(0,\infty). $$

$\xi_q(\theta)$ 表示定义在 $(0,\infty)$ 上的概率密度函数, 满足

$$ \int_0^\infty \xi_q(\theta)d\theta=1,\qquad \int_0^\infty \theta^\zeta\xi_q(\theta)d\theta=\frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1+q\zeta)},\ \ \zeta\in[0,1]. $$

设 u 是给定的控制函数, $x(b,u)$ 为系统 (1.1) 相应于控制函数 u 的 mild 解在终止时刻 $t=b$ 的值. 称集合

$$ K_b(f)=\{x(b,u)\in X: u\in L^p(J,U),\ x \text{ 是系统 (1.1) 相应于 } u \text{ 的 mild 解}\} $$

为系统 (1.1) 的可达集.

定义 2.4 [10] (近似可控性) 如果 $\overline{K_b(f)}=X$, 其中 $\overline{K_b(f)}$ 表示 $K_b(f)$ 的闭包, 则称系统 (1.1) 在区间 J 上是近似可控的.

引理 2.1 [7,11] 对 $\forall\,\eta\in(0,1]$, 存在正常数 C_η, 使得

$$ \|A^\eta T(t)\|\leqslant\frac{C_\eta}{t^\eta},\quad t\in J'. $$

引理 2.2 [7] 线性算子族 $\{T_q(t)\}_{t\geqslant0}$ 具有以下性质:

1) 对任意给定的 $t \geqslant 0$ 和 $\forall\, x \in X$, 有

$$\|T_q(t)x\| \leqslant \frac{N}{\Gamma(q)}\|x\|.$$

2) 对 $\forall\, t \geqslant 0$, 算子 $T_q(t)$ 是强连续的, 即对 $\forall\, x \in X$ 和 $0 < t' < t'' \leqslant b$, 有

$$\|T_q(t'')x - T_q(t')x\| \to 0 \quad (t'' \to t').$$

引理 2.3 [8] 对 $\forall\, x \in X$, $\beta \in (0,1)$, $\eta \in (0,1]$, 有

$$AT_q(t)x = A^{1-\beta}T_q(t)A^{\beta}x, \quad t \in J$$

和

$$\|A^{\eta}T_q(t)x\| \leqslant \frac{qC_\eta\Gamma(2-\eta)}{t^{q\eta}\Gamma(1+q(1-\eta))}\|x\|, \quad t \in J'.$$

定理 2.1 [12] (Krasnoselskii 不动点定理) 设 D 为 Banach 空间 X 中的一个非空闭凸子集. 若算子 Q_1, $Q_2 : D \to X$ 满足

1) 对 $\forall\, x,\ y \in D$, 有 $Q_1x + Q_2y \in D$;

2) Q_1 是压缩算子;

3) Q_2 是全连续算子,

则 $Q_1 + Q_2$ 在 D 内至少有一个不动点.

3. 主要结果

为证明本文的主要结论, 给出如下假设:

$(H1)$ A 生成 X 中的紧解析半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.

$(H2)$ 函数 $f : J \times X \to X$ 满足如下条件:

1) 对 $\forall\, t \in J$, 函数 $f(t,\cdot) : X \to X$ 连续, 对每个 $x \in X$, 函数 $f(\cdot,x) : J \to X$ 强可测.

2) 存在函数 $\phi(t) \in L^p(J,\mathbb{R}^+)$, $p > \frac{1}{q}$, 使得对 $a.e.\ t \in J$, $\forall\, x \in C_{1-q}(J,X)$, 有

$$\|f(t,x(t))\| \leqslant \phi(t),$$

其中 $\phi(t)$ 满足 $\liminf\limits_{k\to+\infty} \frac{\|\phi\|_{L^p}}{k} := \rho < \infty$.

$(H3)$ $\exists\, \beta \in (0,1)$, 函数 $h : J \times X \to X_\beta$ 连续, 且对 $\forall\, x,\ y \in C_{1-q}(J,X)$, $\exists\, H > 0$ 为常数, 使得

$$\|A^{\beta}h(t,x(t)) - A^{\beta}h(t,y(t))\| \leqslant Ht^{1-q}\|x(t) - y(t)\|, \quad \forall\, t \in J.$$

$(H4)$ $B : U \to X$ 为线性有界算子, 且存在常数 M_B 使得 $\|B\| \leqslant M_B$.

考虑控制系统 (1.1) 相应的线性分数阶控制系统

$$\begin{cases} {}^L D^q[x(t)-h(t,x(t))]=Ax(t)+f(t)+Bu(t), & t\in J',\\ I_t^{1-q}[x(t)-h(t,x(t))]|_{t=0}=x_0\in X \end{cases} \tag{3.1}$$

定义算子如下:

$$\Lambda_b=\int_0^b (b-s)^{2q-2}T_q(b-s)BB^*T_q^*(b-s)ds,$$

$$R(\lambda,\Lambda_b)=(\lambda I+\Lambda_b)^{-1},\quad \lambda>0,$$

其中 B^*, $T_q^*(b-s)$ 分别表示 B, $T_q(b-s)$ 的共轭算子. 显然 Λ_b 是有界线性算子.

引理 3.1 分数阶线性控制系统 (3.1) 近似可控当且仅当在强算子拓扑中, 当$\lambda\to 0^+$, $\lambda R(\lambda,\Lambda_b)\to 0$.

由引理 3.1 可得, 对 $\forall\,\lambda>0$, 有

$$\|R(\lambda,\Lambda_b)\|\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

定义函数

$$u(t)=(b-t)^{q-1}B^*T_q^*(b-t)R(\lambda,\Lambda_b)p(x),\quad t\in J$$

$$p(x)=x_1-b^{q-1}T_q(b)x_0-h(b,x(b))-\int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)f(s,x(s))ds$$
$$-\int_0^b (b-s)^{q-1}AT_q(b-s)h(s,x(s))ds.$$

设 $\forall\,k>0$, $B_k=\{x\in C_{1-q}(J,X):\|x\|_{C_{1-q}}\leqslant k\}$, 对应于上述控制函数 u, 定义算子 $F=F_1+F_2: B_k\to C_{1-q}(J,X)$, 其中

$$(F_1x)(t)=\int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)f(s,x(s))ds+\int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)Bu(s)ds,\quad t\in J'. \tag{3.2}$$

$$(F_2x)(t)=t^{q-1}T_q(t)x_0+h(t,x(t))+\int_0^t (t-s)^{q-1}AT_q(t-s)h(s,x(s))ds,\quad t\in J'. \tag{3.3}$$

定理 3.1 设条件 $(H1)-(H4)$ 成立. 如果 $\ell<1$, 且当 $\lambda\to 0^+$, $\lambda R(\lambda,\Lambda_b)\to 0$, 则系统 (1.1) 至少有一个不动点, 其中

$$\begin{aligned}\ell\ :=\ & b^{1-q}\|A^{-\beta}\|H+\frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H+\frac{N\rho}{\Gamma(q)}\Big(\frac{p-1}{pq-1}b\Big)^{1-\frac{1}{p}}+\frac{N^2M_B^2b^q}{\lambda\Gamma^2(q)(2q-1)}\\ &\left[\|A^{-\beta}\|H+\frac{N\rho}{\Gamma(q)}\Big(\frac{p-1}{pq-1}\Big)^{1-\frac{1}{p}}b^{\frac{pq-1}{p}}+\frac{b^{q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+q\beta)\beta}H\right]<1\end{aligned} \tag{3.4}$$

证明: 易验证 B_k 是 $C_{1-q}(J,X)$ 中的有界闭凸集. 下面分四步证明 F 在 B_k 中至少有一个不动点:

第一步: 证明存在 $k>0$ 使得 $F(B_k)\subseteq B_k$.

假设对 $\forall\, k>0$, 都存在 $x\in B_k$, 使得对 $\forall\, t\in J$, 有 $k\leqslant \|Fx\|_{C_{1-q}}$. 由 F 的定义和条件 $(H2)-(H4)$, 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} k \ \leqslant\ t^{1-q}\|(Fx)(t)\| \ \leqslant\ & \frac{N}{\Gamma(q)}\|x_0\|+b^{1-q}[\|A^{-\beta}\|Hk+\sup_{t\in J}\|A^{-\beta}\|\|h(t,0)\|_\beta] \\ & +\frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}\big[Hk+\sup_{s\in J}\|h(s,0)\|_\beta\big]+\frac{N}{\Gamma(q)}(\frac{p-1}{pq-1}b)^{1-\frac{1}{p}}\|\phi\|_{L^p} \\ & +\frac{N^2M_B^2b^q}{\lambda\Gamma^2(q)(2q-1)}\Bigg[\|x_1\|+\frac{Nb^{q-1}}{\Gamma(q)}\|x_0\|+\|A^{-\beta}\|Hk+\|A^{-\beta}\|\|h(b,0)\|_\beta \\ & +\frac{N}{\Gamma(q)}(\frac{p-1}{pq-1})^{1-\frac{1}{p}}b^{\frac{pq-1}{p}}\|\phi\|_{L^p}+\frac{b^{q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}(Hk+\sup_{s\in J}\|h(s,0)\|_\beta)\Bigg]. \end{aligned}$$

在上述不等式两边取上确界并同时除以 k, 令 $k\to+\infty$, 有 $\ell\geqslant 1$. 这与 (3.4) 式矛盾, 所以 $\exists\, k>0$, 使得 $F(B_k)\subseteq B_k$.

第二步: 证明 $F: B_k\to B_k$ 连续.

设 $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}\subset B_k$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}\|x^m-x\|_{C_{1-q}}=0$. 根据 f 的连续性, 当 $m\to\infty$ 时有

$$\|f(s,x^m(s))-f(s,x(s))\|\to 0,\qquad s\in J.$$

且

$$\|f(s,x^m(s))-f(s,x(s))\|\leqslant 2\phi(s)\in L^p(J,\mathbb{R}^+)$$

因此由条件 $(H3)$ 和 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned} & t^{1-q}\|(Fx^m)(t)-(Fx)(t)\| \\ \leqslant\ & b^{1-q}\frac{N}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\|f(s,x^m(s))-f(s,x(s))\|ds \\ & +b^{1-q}\|A^{-\beta}\|H\|x^m-x\|_{C_{1-q}}+\frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H\|x^m-x\|_{C_{1-q}} \\ & +b^{1-q}\frac{N^2M_B^2}{\lambda\Gamma^2(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}(b-s)^{q-1}\|p(x^m)-p(x)\|ds \\ \leqslant\ & b^{1-q}\frac{N}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\|f(s,x^m(s))-f(s,x(s))\|ds \\ & +b^{1-q}\|A^{-\beta}\|H\|x^m-x\|_{C_{1-q}}+\frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H\|x^m-x\|_{C_{1-q}} \\ & +\frac{N^2M_B^2b^q}{\lambda\Gamma^2(q)(2q-1)}\Bigg[\frac{N}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\|f(s,x^m(s))-f(s,x(s))\|ds \\ & +\|A^{-\beta}\|H\|x^m-x\|_{C_{1-q}}+\frac{b^{q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H\|x^m-x\|_{C_{1-q}}\Bigg], \end{aligned}$$

即

$$\|Fx^m - Fx\|_{C_{1-q}} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

故 F 在 B_k 中连续.

第三步: 算子 F_2 是压缩的.

对 $\forall\, x,\ y \in B_k,\ t \in J$, 由 (3.3) 式和条件 $(H3)$ 可得

$$\begin{aligned}
& t^{1-q}\|(F_2x)(t) - (F_2y)(t)\| \\
\leqslant\ & b^{1-q}\|A^{-\beta}\|\|A^{\beta}h(t,x(t)) - A^{\beta}h(t,y(t))\| \\
& + b^{1-q}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A^{1-\beta}T_q(t-s)A^{\beta}[h(s,x(s)) - h(s,y(s))]\|ds \\
\leqslant\ & b^{1-q}\|A^{-\beta}\|H\|x-y\|_{C_{1-q}} + \frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H\|x-y\|_{C_{1-q}}.
\end{aligned}$$

上式两边取上确界, 有

$$\|F_2x - F_2y\|_{C_{1-q}} \leqslant \left[b^{1-q}H\|A^{-\beta}\| + \frac{b^{1-q+q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}H\right]\|x-y\|_{C_{1-q}}.$$

结合 (3.4) 式可得, $\|F_2x - F_2y\|_{C_{1-q}} < \|x-y\|_{C_{1-q}}$, 故 F_2 是压缩的.

设 $\Omega = \{y \in C(J,X) : y(t) = t^{1-q}(F_1x)(t), x \in B_k\}$.

第四步: 证明 Ω 在 $C(J,X)$ 中相对紧.

首先证明 Ω 是等度连续的.

设 $0 = t_1 < t_2 \leqslant b$, 对 $\forall\, y \in \Omega$, 由条件 $(H2)$ 2) 可得

$$\begin{aligned}
& \|y(t_2) - y(0)\| \\
\leqslant\ & t_2^{1-q}\int_0^{t_2} \|(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)f(s,x(s))\|ds \\
& + t_2^{1-q}\int_0^{t_2} \|(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)Bu(s)\|ds \\
\leqslant\ & \frac{N}{\Gamma(q)}(\frac{p-1}{pq-1}t_2)^{1-\frac{1}{p}}\|\phi\|_{L^p} + \frac{t_2^q N^2 M_B^2}{\lambda\Gamma^2(q)(2q-1)}\Big[\|x_1\| + \frac{Nb^{q-1}}{\Gamma(q)}\|x_0\| \\
& + \|A^{-\beta}\|Hk + \|A^{-\beta}\|\|h(b,0)\|_{\beta} + \frac{N}{\Gamma(q)}(\frac{p-1}{pq-1})^{1-\frac{1}{p}}b^{\frac{pq-1}{p}}\|\phi\|_{L^p} \\
& + \frac{b^{q\beta}C_{1-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\beta\Gamma(1+q\beta)}(Hk + \|h(s,0)\|_{\beta})\Big] \\
\to\ & 0 \quad (t_2 \to 0).
\end{aligned}$$

当 $0 < t_1 < t_2 \leqslant b$, $\epsilon > 0$ 充分小时, 有

$$
\begin{aligned}
& \|y(t_2) - y(t_1)\| \\
\leqslant\ & \frac{Nb^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
& + \frac{N}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \|t_2^{1-q}(t_2 - s)^{q-1} - t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1}\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
& + \int_0^{t_1-\epsilon} t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1} \|T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s)\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
& + \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1} \|T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s)\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
:=\ & \sum_{i=1}^{4} I_i.
\end{aligned}
$$

对于 I_1 和 I_4, 按照引理 2.2 1), 当 $t_2 - t_1 \to 0$, $\epsilon \to 0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{Nb^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1} \|T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s)\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds. \\
&\leqslant \frac{2Nb^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds. \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

对于 I_2, 当 $t_2 - t_1 \to 0$ 时, 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{N}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \|t_2^{1-q}(t_2 - s)^{q-1} - t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1}\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

对于 I_3, 由假设条件 $(H1)$ 可知, 当 $t > 0$ 时 $T_q(t)$ 是等度连续的, 所以当 $t_2 - t_1 \to 0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{t_1-\epsilon} t_1^{1-q}(t_1 - s)^{q-1} \|T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s)\| \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
&\leqslant b^{1-q} \sup_{s \in [0, t_1-\epsilon]} \|T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s)\| \int_0^{t_1-\epsilon} (t_1 - s)^{q-1} \|f(s, x(s)) + Bu(s)\| ds \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

因此, 对 $\forall\, x \in B_k$, 当 $t_2 - t_1 \to 0,\ \epsilon \to 0$ 时, 有

$$\|y(t_2) - y(t_1)\| \leqslant \sum_{i=1}^{4} I_i \to 0.$$

所以, 集合 Ω 是等度连续的.

其次证明对 $\forall\, t \in J$, 集合 $\Omega(t) = \{y(t) : y \in \Omega\}$ 在 X 中相对紧.

显然, $\Omega(0)$ 在 X 中相对紧.

当 $t \in J'$ 时, 对 $\forall\, 0 < \epsilon < t,\ \forall\, \delta > 0$ 作

$$\begin{aligned} y^{\epsilon,\delta}(t) &= qt^{1-q}\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)T((t-s)^q\theta)[f(s,x(s))+Bu(s)]d\theta ds \\ &= qt^{1-q}T(\epsilon^q\delta)\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)T((t-s)^q\theta-\epsilon^q\delta)[f(s,x(s))+Bu(s)]d\theta ds \end{aligned}$$

由 $T(\epsilon^q\delta)$ 的紧性, 得出 $\forall\, 0 < \epsilon < t,\ \forall\, \delta > 0$ 集合 $\Omega^{(\epsilon,\delta)}(t) = \{y^{\epsilon,\delta}(t),\ y \in \Omega\}$ 在 X 中相对紧.

对 $\forall\, x \in B_k$ 有

$$\begin{aligned} & \|y(t) - y^{\epsilon,\delta}(t)\| \\ \leqslant\ & qb^{1-q}\|\int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)T((t-s)^q\theta)[f(s,x(s))+Bu(s)]d\theta ds\| \\ & +qb^{1-q}\|\int_0^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)T((t-s)^q\theta)[f(s,x(s))+Bu(s)]d\theta ds \\ & -\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)T((t-s)^q\theta)[f(s,x(s))+Bu(s)]d\theta ds\| \\ \leqslant\ & qb^{1-q}N\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))+Bu(s)\|ds\int_0^\delta \theta\xi_q(\theta)d\theta \\ & +qb^{1-q}N\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))+Bu(s)\|ds\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)d\theta \\ \leqslant\ & qb^{1-q}N\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))+Bu(s)\|ds\int_0^\delta \theta\xi_q(\theta)d\theta \\ & +\frac{b^{1-q}N}{\Gamma(q)}\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))+Bu(s)\|ds \\ \to\ & 0 \quad (\epsilon \to 0,\ \delta \to 0). \end{aligned}$$

即当 $t \in J'$ 时, 存在一个相对紧集 $\Omega^{(\epsilon,\delta)}(t)$ 任意逼近 $\Omega(t)$, 故 $\Omega(t)$ 在 X 中相对紧. 由 Ascoli-Arzela 定理知集合 Ω 是 $C(J,X)$ 中的相对紧集. 所以 $F_1 : B_k \to B_k$ 是全连续算子, 因此由定理 2.1 知, F 在 B_k 上至少有一个不动点 $x \in B_k$, 此不动点即为系统 (1.1) 的 mild 解.

$\square$

定理 3.2 设条件 $(H1)-(H4)$ 成立, f 和 $A^\beta h$ 一致有界. 如果相应的线性系统 (3.1) 在 J 上近似可控, 则分数阶控制系统 (1.1) 在 J 上近似可控.

证明： 由定理 3.1 知, $\forall\, \lambda > 0,\ x_1 \in X$, 存在系统 (1.1) 的 mild 解 $x_\lambda \in C_{1-q}(J, X)$ 使得

$$\begin{aligned} x_\lambda(t) &= t^{q-1}T_q(t)x_0 + h(t, x_\lambda(t)) + \int_0^t (t-s)^{q-1}AT_q(t-s)h(s, x_\lambda(s))ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)[f(s, x_\lambda(s)) + Bu(s)]ds \end{aligned}$$

其中

$$u(t) = (b-t)^{q-1}B^*T_q^*(b-t)R(\lambda, \Lambda_b)p(x_\lambda), \quad t \in J$$

$$\begin{aligned} p(x_\lambda) &= x_1 - b^{q-1}T_q(b)x_0 - h(b, x_\lambda(b)) - \int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)f(s, x_\lambda(s))ds \\ &\quad - \int_0^b (b-s)^{q-1}AT_q(b-s)h(s, x_\lambda(s))ds \end{aligned}$$

由

$$I - \Lambda_b R(\lambda, \Lambda_b) = \lambda R(\lambda, \Lambda_b)$$

得到

$$\begin{aligned} x_\lambda(b) &= b^{q-1}T_q(b)x_0 + h(b, x_\lambda(b)) + \int_0^b (b-s)^{q-1}AT_q(b-s)h(s, x_\lambda(s))ds \\ &\quad + \int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)f(s, x_\lambda(s))ds \\ &\quad + \int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)(b-s)^{q-1}BB^*T_q^*(b-s)R(\lambda, \Lambda_b) \\ &\quad \Big[x_1 - b^{q-1}T_q(b)x_0 - h(b, x_\lambda(b)) - \int_0^b (b-\tau)^{q-1}T_q(b-\tau)f(\tau, x_\lambda(\tau))d\tau \\ &\quad - \int_0^b (b-\tau)^{q-1}AT_q(b-\tau)h(\tau, x_\lambda(\tau))d\tau\Big]ds \\ &= x_1 - p(x_\lambda(b)) + \Lambda_b R(\lambda, \Lambda_b)p(x_\lambda(b)) \\ &= x_1 - \lambda R(\lambda, \Lambda_b)p(x_\lambda(b)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

由 f 和 $A^\beta h$ 一致有界性可知, $\{f(\cdot, x_\lambda(\cdot)) : \lambda > 0\}$ 和 $\{h(\cdot, x_\lambda(\cdot)) : \lambda > 0\}$ 在 $L^2(J, X)$ 中有界, 故存在子序列, 不妨设为 $\{f(\cdot, x_\lambda(\cdot)) : \lambda > 0\}$ 和 $\{h(\cdot, x_\lambda(\cdot)) : \lambda > 0\}$, 在 $L^2(J, X)$ 中分别弱收敛到 $\{\omega(\cdot)\}$ 和 $\{h(\cdot)\}$. 因此,由 $T_q(t)$ 的紧性可知, 当 $\lambda \to 0^+$ 时, 有

$$\int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)[f(s, x_\lambda(s)) - \omega(s)]ds \to 0$$

$$\int_0^b (b-s)^{q-1}A^{1-\beta}T_q(b-s)A^\beta[h(s, x_\lambda(s)) - h(s)]ds \to 0$$

令

$$\eta = x_1 - b^{q-1}T_q(b)x_0 - h(b) - \int_0^b (b-s)^{q-1}AT_q(b-s)h(s)ds - \int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)\omega(s)ds$$

则有

$$\begin{aligned} & \|p(x_\lambda(b)) - \eta\| \\ \leqslant\ & \|A^{-\beta}\|\|A^\beta h(b, x_\lambda(b)) - A^\beta h(b)\| + \int_0^b (b-s)^{q-1}A^{1-\beta}T_q(b-s)A^\beta\|h(s, x_\lambda(s)) - h(s)\|ds \\ & + \int_0^b (b-s)^{q-1}T_q(b-s)\|f(s, x_\lambda(s)) - \omega(s)\|ds \\ \to\ & 0 \quad (\lambda \to 0^+) \end{aligned}$$

结合 (3.5) 式和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} \|x_\lambda(b) - x_1\| &\leqslant \|\lambda R(\lambda, \Lambda_b)p(x_\lambda(b))\| \\ &\leqslant \|\lambda R(\lambda, \Lambda_b)\|\|p(x_\lambda(b)) - \eta\| + \|\lambda R(\lambda, \Lambda_b)\eta\| \\ &\to 0 \quad (\lambda \to 0^+) \end{aligned}$$

故分数阶控制系统 (1.1) 在区间 J 上近似可控. □

4. 应用

例 设 $X = U := L^2([0,\pi], \mathbb{R})$, 考虑分数阶中立型偏微分方程

$$\begin{cases} {}^LD_{0^+}^{\frac{1}{2}}[x(t,z) - \int_0^\pi \nu(z,\tau)x(t,\tau)d\tau] = \partial_z^2 x(t,z) + u(t,z) + e^{-t}sinx(t,z),\ (t,z) \in (0,b] \times [0,\pi], \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,b], \\ I_{0^+}^{\frac{1}{2}}[x(t,z) - \int_0^\pi \nu(z,\tau)x(t,\tau)d\tau]|_{t=0} = x_0(z), \quad z \in [0,\pi], \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $0 < q < 1$, 取 $q = \beta = \frac{1}{2}$, $J := [0,b]$, $b > 0$ 是常数, $u \in L^p(J,U)$ 为控制函数.

由文献 [7] 可知, 定义算子 $A : D(A) \subset X \to X$ 如下:

$$Ax = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2},$$

其中 $D(A) = \{x \in X :\ x',\ x'' \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0\}$, 则 A 是紧的解析半群 $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ 的无穷小生成元, 且存在 $N > 1$ 使得 $\|T(t)\| \leqslant N$. 于是

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle x, e_n\rangle e_n,$$

其中

$$e_n(z) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} sin(nz).$$

算子 $A^{\frac{1}{2}} : D(A^{\frac{1}{2}}) \subset X \to X$ 定义为:

$$A^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=1}^{\infty} n\langle x, e_n\rangle e_n,$$

其中 $D(A^{\frac{1}{2}}) := \{x(\cdot) \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n\langle x, e_n\rangle e_n \in X\}$. 故条件 $(H1)$ 满足.

为证明系统 (4.1) 的近似可控, 引入如下的假设条件:

(P) 函数 ν 满足如下条件:

1) 函数 ν 可测, $\nu(0,\theta) = \nu(\pi,\theta) = 0$, 且

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \nu^2(z,\tau) d\tau dz < \infty.$$

2) 函数 $\partial_z \nu(\theta, z)$ 可测, 且

$$H := \Big[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (\partial_z \nu(z,\tau))^2 d\tau dz\Big]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

对 $\forall\, t \in J$, 令

$$x(t)(z) = x(t,z),$$

$$f(t,x(t))(z) = f(t,x(t,z)) = e^{-t} sin x(t,z),$$

$$h(t,x(t))(z) = \int_0^{\pi} \nu(z,\tau) x(t,\tau) d\tau,$$

$$(\nu x)(z) = \int_0^{\pi} \nu(z,\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$Bu(t)(z) = u(t,z),$$

由 f 的表达式可得

$$\|f(t,x(t,z))\| \leqslant e^{-t},$$

条件 $(H2)$ 成立. 又因为

$$\langle \nu(x), e_n\rangle = \langle \int_0^{\pi} \nu(z,\tau)x(\tau)d\tau, e_n\rangle = \int_0^{\pi} e_n(z)(\int_0^{\pi} \nu(z,\tau)x(\tau)d\tau)dz,$$

则由算子 $A^{\frac{1}{2}}$ 的定义可得

$$\|A^{\frac{1}{2}}\nu(x)\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} n\langle \nu(x), e_n\rangle e_n\|.$$

容易验证得条件 $(H3)$ 成立且 $A^{\frac{1}{2}}\nu$ 一致有界. 由 $Bu(t)(z) = u(t,z)$, $\|Bu(t)(z)\| \leqslant \|u(t,z)\|$ 可得 B

为单位算子 I, 故条件 $(H4)$ 满足. 如果 $\lambda R(\lambda, \Lambda_b) \to 0(\lambda \to 0^+)$, 则由引理 3.1 知系统 (4.1) 相应的线性系统在区间 J 上近似可控. 因此, 由定理 3.2 可知, 控制系统 (4.1) 近似可控.

基金项目

国家基金委青年科学资助项目(No.12061062)。

参考文献

[1] Kalman, R.E., Ho, Y.C. and Narendra, K. (1963) Controllability of Linear Dynamical Systems. *Contributions to Differential Equations*, **1**, 189-213.

[2] Sakthivel, R., Mahmudov, N.I. and Nieto, J.J. (2012) Controllability of a Class of Fractional Order Nonlinear Neutral Functional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10334-10340. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.093

[3] Balachandran, K. and Park, J.Y. (2009) Controllability of Fractional Integro-Differential Systems in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*, **3**, 363-367.

[4] Liu, M.J., Lv, Y. and Lv, X.R. (2007) Controllability of Nonlinear Neutral Evolution Equations with Nonlocal Conditions. *Northeastern Mathematical Journal*, **23**, 115-122.

[5] Yan, Z.M. (2012) Approximate Controllability of Partial Neutral Functional Differential Systems of Fractional Order with State-Dependent Delay. *International Journal of Control*, **85**, 1051-1062. https://doi.org/10.1080/00207179.2012.675518

[6] Heymans, N. and Podlubny, I. (2006) Physical Interpretation of Initial Conditions for Fractional Differential Equations with Riemann-Liouville Fractional Derivatives. *Rheologica Acta*, **45**, 765-771. https://doi.org/10.1007/s00397-005-0043-5

[7] Liu, Y.L. and Lv, J.Y. (2014) Existence Result for Riemann-Liouville Fractional Neutral Evolution Equations. *Advances in Difference Equations*, **2014**, Article No. 83.

[8] Liu, Z.X. and Li, X.W. (2015) Approximate Controllability of Fractional Evolution Systems with Riemann-Liouville Fractional Derivatives. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **53**, 1920-1933. https://doi.org/10.1137/120903853

[9] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam.

[10] Fan, Z.B. (2014) Approximate Controllability of Fractional Differential Equations via Resolvent Operators. *Advances in Difference Equations*, **2014**, Article No. 54.

[11] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, New York.

[12] Zhou, Y. and Feng, J. (2010) Existence of Mild Solutions for Fractional Neutral Evolution Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 1063-1077.
https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.026