Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1451-1463
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118163

模糊数差的存在性扩展

汪　帆，杨　宏*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: *ysin888@163.com

收稿日期：2021年6月20日；录用日期：2021年7月23日；发布日期：2021年7月30日

摘　要

模糊数差的存在性问题一直是困扰模糊数空间、模糊数值函数分析学研究的瓶颈问题之一。之所以模糊数的差存在性很弱，是因为模糊数的减法并不是模糊数加法的逆运算。本文对模糊数差的存在性扩展作了系统分析与研究，并列举了各种相应的算例对其进行详细说明。

关键词

模糊数，模糊数的差，存在性

Expansion of the Existence Range of the Difference between Two Fuzzy Numbers

Fan Wang, Hong Yang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: *ysin888@163.com

Received: Jun. 20th, 2021; accepted: Jul. 23rd, 2021; published: Jul. 30th, 2021

Abstract

The existence of the difference between two fuzzy numbers has always been one of the bottlenecks in the research of fuzzy number space and fuzzy numerical function analysis. The reason why the difference of fuzzy numbers is weak is that the subtraction of fuzzy numbers is not the inverse operation of the addition of fuzzy numbers. In this paper, the existence and extension of fuzzy number difference are systematically analyzed and studied, and various corresponding examples are given to illustrate it in detail.

*通讯作者。

文章引用: 汪帆, 杨宏. 模糊数差的存在性扩展[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1451-1463.
DOI: 10.12677/pm.2021.118163

Keywords

Fuzzy Number, The Difference of Fuzzy Numbers, Existence

1. 引言

1972 年，Chang 和 Zadeh 在文献[1]中提出了模糊数的概念，结合概率分布函数的性质，将 $\mathbb{R}$ 上一族具有特殊性质的模糊集称作模糊数。在文献[2]中模糊数有严格的定义如下：

记 $E^1=\{\tilde{u}\,|\,\tilde{u}:\mathbb{R}\to[0,1]\text{满足以下性质1)-4)}\}$，

1) $\tilde{u}$ 是一个正规的模糊集，既有 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\tilde{u}(x_0)=1$；

2) $\tilde{u}$ 是一个凸模糊集，即对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$， $\mu\in[0,1]$，

$$\tilde{u}(\mu x+(1-\mu)y)\geq\min\{\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\};$$

3) $\tilde{u}$ 是上半连续函数，即 $[\tilde{u}]^{\mu}=\{x\in\mathbb{R}:\tilde{u}(x)\geq\mu\}$ 是闭集，其中 $\mu\in[0,1]$；

4) $\tilde{u}$ 的支集 $\operatorname{supp}\tilde{u}$ 的闭包 $[\tilde{u}]^0=\{x\in\mathbb{R}:\tilde{u}(x)>0\}$ 是紧集。

对 $\tilde{u}\in E^1$ 称为模糊数，而 E^1 称为模糊数空间。

在模糊分析学的研究过程中，由于两个模糊数差的存在性很弱，并且模糊数的减法并不是模糊数加法的逆运算，这对其研究与应用造成了极大困难。最早提出是基于 Zadeh 扩张原理定义的模糊减法，究其本质而言，Zadeh 扩张原理定义的模糊减法是区间数减法运算的扩展，根据模糊数的加法和数乘运算来定义模糊数的减法，使得两个模糊数的差存在。但是此定义下的模糊减法并不是模糊加法的逆运算，并且丢失了 $\tilde{u}\ominus\tilde{u}=0$ 的性质。随后，1967 年，Hukuhara 在文献[3]中首次定义了集值函数的 Hukuhara 差(简称 H 差)。紧接着，1983 年，Puri 和 Ralescu 受到启发，进而在文献[4]中，将集值函数的 H 差推广到模糊情况下的 H 差。这对于模糊减法的研究是一个新的开始，并且克服了基于 Zadeh 扩张原理定义下模糊减法的缺陷。但是在模糊情况下，只有满足非常严格的条件时，两个模糊数的 H 差才会存在[5]，而且存在性很弱。同时将模糊数的 H 差应用到实际问题的研究中时，会伴随着不稳定的现象发生。自此之后，直到 2008 年，模糊减法有了新的突破，Stefanini 在文献[6]中将 H 差进行推广，称作广义 Hukuhara 差(简称 gH 差)。gH 差相比 H 差而言，定义更加严格，可两个模糊数差的存在性还是较弱，并不总是存在。Stefanini 发现了此缺陷，2010 年，Stefanini 在文献[7]中将 gH 差进行推广，称作广义差(简称 g 差)。g 差解决了 gH 差的缺点。两个模糊数的 gH 差不存在时，其 g 差总是存在。至此，在模糊数的减法运算中，g 差的定义和性质比较完善和适用。但 g 差的运算相对复杂。最近，Mazandarani，Pariz 和 Kamyad 在 2018 年文献[8]中提出了一种新的模糊减法，称作粒差，简称 gr 差。相比于其他差，两个模糊数的 gr 差总是存在，并且 gr 差的提出对于模糊减法而言是一个彻底性的改革，提供了计算的便利性。本文系统地分析和研究了上述几类模糊数差的存在性及其之间存在性的扩展，算例与图形的结合使其对于模糊数的差有一个深入的理解。

2. 模糊数差的存在性扩展分析

本文所遇到的符号说明，“$-$”表示实数意义下的减法，“$+$”表示实数意义下的加法，“$\ominus$”表示

模糊意义下的减法，“$\oplus$”表示模糊意义下的加法，“$\otimes$”表示模糊意义下的数乘运算。

开始介绍模糊数的差之前，首先明确区间数的加法与减法运算，对于经典集合

$$A=[a,b]，\quad B=[c,d]，$$

$$A+B=[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]，$$

$$A-B=A+(-B)=[a,b]+(-[c,d])=[a,b]+[-d,-c]=[a-d,b-c]；$$

例如 $A=[1,2]$，$B=[3,4]$，则

$$A-B=[1,2]-[3,4]=[-3,-1]，$$

$$C=A+B=[1+3,2+4]=[4,6]，$$

反之，

$$C-A=C+(-A)=[4,6]+[-2,-1]=[2,5]\neq B，$$

由区间数减法运算可知，集合的加法运算与减法运算不是互逆的。同样，有

$$A-A=A+(-A)=[1,2]+[-2,-1]=[-1,1]\neq 0，$$

因此，区间数的减法运算不具备 $A-A=0$ 的性质，这个性质的缺失对于区间数的理论结果和应用始终是一个缺陷。

2.1. 基于 Zadeh 扩张原理定义的模糊差

定义 2.1.1 [2] (Zadeh 扩张原理)设 f 是从非空集 X 到非空集 Y 的点映射，则由下式可定义从 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{F}(Y)$ 和 $\mathcal{F}(Y)$ 到 $\mathcal{F}(X)$ 的集映射 f 及 f^{-1}，

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup\limits_{f(x)=y} A(x), & y\in f(X)\\ 0, & y\notin f(X)\end{cases}$$

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)),\quad x\in X$$

另外，若 $A\in\mathcal{F}(X)$，$B\in\mathcal{F}(Y)$，则 $A\times B\in\mathcal{F}(X\times Y)$ 由下式定义，

$$(A\times B)(x,y)=\min(A(x),B(y))。$$

基于 Zadeh 扩张原理定义的关于模糊集更多性质和定理请参考文献[2]。

性质 2.1.1 对 $\tilde{u}=(u_1,u_2)$，$\tilde{v}=(v_1,v_2)\in E^1$，基于 Zadeh 扩张原理定义的加法，减法及数乘运算如下：

1) $\tilde{u}\oplus\tilde{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$；

2) $\tilde{u}\ominus\tilde{v}=(u_1-v_2,u_2-v_1)$；

3) $k\tilde{u}=\begin{cases}(ku_1,ku_2), & k\geq 0\\ (ku_2,ku_1), & k<0\end{cases}$。

基于 Zadeh 扩张原理定义的算法被称为标准模糊算法，是区间数算法的一个扩展。在此讨论两个简单模糊数的运算性质，即三角模糊数和梯形模糊数：

1) 对于三角模糊数 $\tilde{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\tilde{v}=(v_1,v_2,v_3)$，由性质 2.1.1 可得

$$\tilde{u}\oplus\tilde{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)，$$

$$\tilde{u}\ominus\tilde{v}=(u_1-v_3,u_2-v_2,u_3-v_1)。$$

2) 对于梯形模糊数 $\tilde{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$， $\tilde{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$，由性质 2.1.1 可得

$$\tilde{u}\oplus\tilde{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,u_4+v_4),$$

$$\tilde{u}\ominus\tilde{v}=(u_1-v_4,u_2-v_3,u_3-v_2,u_4-v_1)。$$

例 2.1.1 三角模糊数 $\tilde{u}=(1,2,3)$， $\tilde{v}=(3,4,5)$，有

$$\tilde{w}=\tilde{u}\oplus\tilde{v}=(1,2,3)\oplus(3,4,5)=(4,6,8),$$

反之，

$$\tilde{w}\ominus\tilde{v}=\tilde{w}\oplus(\ominus\tilde{v})=(4,6,8)\oplus(-5,-4,-3)=(-1,2,5)\neq\tilde{u},$$

即标准模糊算法中的加法运算和减法运算是不可逆的。同样，$\tilde{u}\ominus\tilde{u}=\tilde{u}\oplus(\ominus\tilde{u})=(1,2,3)\oplus(-3,-2,-1)=(-2,0,2)\neq 0$，故标准模糊减法同样丢失了 $\tilde{u}\ominus\tilde{u}=0$ 的性质，这个性质的缺失对于模糊数的理论结果和应用始终是一个缺陷。

为了克服基于 Zadeh 扩张原理定义的标准模糊算法中 $\tilde{u}\ominus\tilde{u}\neq 0$ 与模糊减法始终不是模糊数加法的逆运算的缺陷，Puri 和 Ralescu 提出将集值函数的 Hukuhara 差扩展到模糊情况下，目的是对模糊数的差有一个定义并使得模糊数的差存在。

2.2. H 差

定义 2.2.1 [4]设 $\tilde{u},\tilde{v}\in E^1$，若存在 $\tilde{w}\in E^1$，使得 $\tilde{u}=\tilde{v}\oplus\tilde{w}$，则 $\tilde{w}$ 称为是 $\tilde{u},\tilde{v}$ 的 Hukuhara 差(H 差)，简记为 $\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}$。

注 2.2.1 对于 H 差，有以下几点需注意：

1) $\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}=\tilde{w}\Leftrightarrow\tilde{u}=\tilde{v}\oplus\tilde{w}$ （“ $\oplus$ ”表示标准模糊加法)；

2) 因为有加法的性质 $\tilde{u}\oplus 0=0\oplus\tilde{u}=\tilde{u}$，所以必有 $\tilde{u}\ominus_H\tilde{u}=0$ 的性质。H 差的定义很好地克服了基于 Zadeh 扩张原理定义的标准模糊减法中 $\tilde{u}\ominus\tilde{u}\neq 0$ 的缺陷；(这儿的 0 表示 $\{0\}$)；

3) 如果 H 差存在，则它的 α -水平截集为

$$[\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}]^\alpha=[u_\alpha^- - v_\alpha^-,u_\alpha^+ - v_\alpha^+],\quad \alpha\in[0,1];$$

4) 记 $\tilde{u}=(u_1,u_2)$， $\tilde{v}=(v_1,v_2)\in E^1$，则 $\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2)$；

5) 梯形模糊数 $\tilde{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$， $\tilde{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$， 则 $\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3,u_4-v_4)$，当 $u_2=u_3$， $v_2=v_3$ 为三角模糊数；

6) H 差最开始定义是对于集值区间而言的，经典集合 A 与 B 的 H 差存在的必要条件是 $A\supseteq B+\{c\}$；

7) 通过定义 2.1.1 和上述 6)可知，模糊减法为模糊加法的逆运算，但是两个模糊数的 H 差不总是存在的，存在性很弱。

例 2.2.1 梯形模糊数 $\tilde{u}=(2,3,5,8)$，三角模糊数 $\tilde{v}=(1,4,5)$，有

$$\tilde{u}\ominus_H\tilde{v}=(2,3,5,8)\ominus_H(1,4,4,5)=(1,1,2,3),$$

$$\tilde{u}\ominus_H\tilde{u}=(2,3,5,8)\ominus_H(2,3,5,8)=0。$$

分别取 $\alpha=0,0.5,1$，对应的 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的水平截集如下，

$$[\tilde{u}]^0=[2,8],\quad[\tilde{v}]^0=[1,5],$$

$$[\tilde{u}]^{0.5}=[3.5,7],\quad[\tilde{v}]^{0.5}=[2.5,4.5],$$

$$[\tilde{u}]^1=[5,6],\quad[\tilde{v}]^1=[4,4],$$

因此，

$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^0 = [\tilde{u}]^0 \ominus_H [\tilde{v}]^0 = [1,3],$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^{0.5} = [\tilde{u}]^{0.5} \ominus_H [\tilde{v}]^{0.5} = [1,2.5],$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^1 = [\tilde{u}]^1 \ominus_H [\tilde{v}]^1 = [1,2],$$

故对于 $\alpha \in [0,1]$，都有 $u_\alpha^- - v_\alpha^- \le u_\alpha^+ - v_\alpha^+$。以上可知 $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}$ 差存在。

例 2.2.2 三角模糊数 $\tilde{u} = (1,2,3)$， $\tilde{v} = (1,3,5)$，有

$$\tilde{u} \ominus_H \tilde{v} = (1,2,3) \ominus_H (1,3,5) = (0,-1,-2)$$

显然，$(0,-1,-2)$ 不是三角模糊数，因为规定三角模糊数 $\tilde{u} = (u_1,u_2,u_3)$，并且 $u_1 \le u_2 \le u_3$。

分别取 $\alpha = 0,0.5,1$，对应的 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的水平截集如下，

$$[\tilde{u}]^0 = [1,3]，\ [\tilde{v}]^0 = [1,5],$$

$$[\tilde{u}]^{0.5} = [1.5,2.5]，\ [\tilde{v}]^{0.5} = [2,4],$$

$$[\tilde{u}]^1 = [2,2]，\ [\tilde{v}]^1 = [3,3],$$

因此，

$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^0 = [\tilde{u}]^0 \ominus_H [\tilde{v}]^0 = [0,-2],$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^{0.5} = [\tilde{u}]^{0.5} \ominus_H [\tilde{v}]^{0.5} = [-0.5,-1.5],$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}]^1 = [\tilde{u}]^1 \ominus_H [\tilde{v}]^1 = [-1,-1],$$

明显看出区间 $[0,-2]$ 和区间 $[-0.5,-1.5]$ 不存在，则 $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}$ 差不存在。

由上述例 2.2.1 和例 2.2.2 可知，两个模糊数的 H 差很有局限性，存在范围小，比如例 2.2.2。下面定义了一种新的减法——H 差推广情况，即广义的 H 差，简称 gH 差，使得两个模糊数差的存在范围扩大。

2.3. gH 差

定义 2.3.1 [6]设 $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w} \in E^1$，则 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的 gH 差被定义如下

$$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = \tilde{w} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \tilde{u} = \tilde{v} \oplus \tilde{w} \\ \text{or} \\ (2)\ \tilde{v} = \tilde{u} \ominus \tilde{w} \end{cases} \tag{1.1}$$

值得注意的是“ $\oplus$ ”，“ $\ominus$ ”指的是标准模糊运算。

则 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的 gH 差的 α -水平截集为：

$$[\tilde{w}]^\alpha = [\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}]^\alpha = \left[\min\left\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\right\}, \max\left\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\right\}\right]$$

同样，当 $\tilde{w} = \tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}$ 存在时，并且 $[\tilde{w}]^\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+]$，有以下两种情况([9])：

情况 1)：$\begin{cases} w_\alpha^- = u_\alpha^+ - v_\alpha^+,\ w_\alpha^+ = u_\alpha^- - v_\alpha^-, \\ w_\alpha^- \text{递增},\ w_\alpha^+ \text{递减},\ \text{且} w_\alpha^- \le w_\alpha^+. \end{cases}$ $\alpha \in [0,1]$

情况 2)：$\begin{cases} w_\alpha^- = u_\alpha^- - v_\alpha^-,\ w_\alpha^+ = u_\alpha^+ - v_\alpha^+, \\ w_\alpha^- \text{递增},\ w_\alpha^+ \text{递减},\ \text{且} w_\alpha^- \le w_\alpha^+. \end{cases}$ $\alpha \in [0,1]$

注意情况 1)与情况 2)两者只能满足其一，不可同时满足。对于 gH 差，有如下性质。

性质 2.3.1 **[10]**设 $\tilde{u},\tilde{v} \in E^1$，则

1) 若 gH 差存在，则唯一；

2) 只要 $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v}$ 存在，则 $\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}$ 一定存在，即 $\tilde{u} \ominus_H \tilde{v} = \tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}$，但反之不成立。特别注意的是，$\tilde{u} \ominus_H \tilde{u} = \tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{u} = 0$。

3) 若 $\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}$ 在情况 1)中存在，则 $\tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u}$ 在情况 2)中存在。反之亦然；

4) $(\tilde{u} \oplus \tilde{v}) \ominus_{gH} \tilde{v} = \tilde{u}$；

5) $0 \ominus_{gH} (\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}) = \tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u}$；

6) $\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = \tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u} = \tilde{w}$ 当且仅当 $\tilde{w} = -\tilde{w}$；而且，$\tilde{w} = 0$ 当且仅当 $\tilde{u} = \tilde{v}$。

例 2.2.2 中 H 差是不存在的，下面讨论一下例 2.2.2 中的 gH 差的情况。

三角模糊数 $\tilde{u} = (1,2,3)$，$\tilde{v} = (1,3,5)$，有

$$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = (1,2,3) \ominus_H (1,3,5) = (0,-1,-2)$$

明显看到 H 差不存在，也相当于定义 2.3.1 中的(1.1)式的(1)式不成立。对于 2.3.1 中的(1.1)式的(2)式有：

$$\tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u} = (1,3,5) \ominus_{gH} (1,2,3) = (0,1,2)$$

$$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = -(\tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u}) = (-2,-1,0)$$

则

$$[\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}]^0 = [\tilde{u}]^0 \ominus_{gH} [\tilde{v}]^0 = [-2,0]$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}]^{0.5} = [\tilde{u}]^{0.5} \ominus_{gH} [\tilde{v}]^{0.5} = [-1.5,-0.5]$$
$$\vdots$$
$$[\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}]^1 = [\tilde{u}]^1 \ominus_{gH} [\tilde{v}]^1 = [-1,-1]$$

其中 $\alpha \in [0,1]$。有 $w_\alpha^- = u_\alpha^+ - v_\alpha^+$，$w_\alpha^+ = u_\alpha^- - v_\alpha^-$，$w_\alpha^-$ 递增，w_α^+ 递减，且 $w_\alpha^- \le w_\alpha^+$。通过定义 2.3.1 中的(1.1)式的(2)式和情况 2)可知，$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v}$ 存在。

下面举反例说明 gH 差不存在的情况。

例 1.3.1 三角模糊数 $\tilde{u} = (0,2,4)$，梯形模糊数 $\tilde{v} = (0,1,2,3)$，则

$$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = (0,2,2,4) \ominus_H (0,1,2,3) = (0,1,0,1)$$

$$\tilde{u} \ominus_{gH} \tilde{v} = -(\tilde{v} \ominus_{gH} \tilde{u}) = (1,0,1,0)$$

有

$$[\tilde{u}]^0 = [0,4],\ [\tilde{v}]^0 = [0,3],$$

$$[\tilde{u}]^{0.5} = [1,3],\ [\tilde{v}]^{0.5} = [0.5,2.5],$$

$$[\tilde{u}]^1 = [2,2],\ [\tilde{v}]^1 = [1,2],$$

进而有

$$\left[\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}\right]^{0}=\left[\tilde{u}\right]^{0}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0}=\left[0,1\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}\right]^{0.5}=\left[\tilde{u}\right]^{0.5}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0.5}=\left[0.5,0.5\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}\right]^{1}=\left[\tilde{u}\right]^{1}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{1}=\left[0,1\right]$$

在本例中，归纳可得

1) 当 $\alpha\in\left[0,0.5\right]$ 时，$w_\alpha^-=u_\alpha^--v_\alpha^-$，$w_\alpha^+=u_\alpha^+-v_\alpha^+$，$w_\alpha^-$ 递增，w_α^+ 递减，且 $w_\alpha^-\le w_\alpha^+$。

2) 当 $\alpha\in\left[0.5,1\right]$ 时，$w_\alpha^-=u_\alpha^+-v_\alpha^+$，$w_\alpha^+=u_\alpha^--v_\alpha^-$，$w_\alpha^-$ 递减，w_α^+ 递增，且 $w_\alpha^-\le w_\alpha^+$。

显然，1)和 2)同时存在情况 1)和情况 2)，但是单调性产生了矛盾。故 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}$ 不存在。

下面的例子同样说明 gH 差不存在的情况。

例 1.3.2 考虑梯形模糊数 $\tilde{u}=\left(2,3,5,6\right)$，三角模糊数 $\tilde{v}=\left(0,4,8\right)$，则

$$\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}=\left(2,3,5,6\right)\ominus_{H}\left(0,4,4,8\right)=\left(2,-1,1,-2\right)$$

$$\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}=-\left(\tilde{v}\ominus_{gH}\tilde{u}\right)=\left(-2,1,-1,2\right)$$

对于 $\alpha\in\left[0,1\right]$，有

$$2=u_0^--v_0^-\ge u_0^+-v_0^+=-2$$

$$-1=u_1^--v_1^-\ge u_1^+-v_1^+=1$$

对于每个 $\alpha\in\left[0,1\right]$ 都必须有同样方向的不等式成立，因此我们得到了一个矛盾。故 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}$ 不存在。

两个三角模糊数的 gH 差一定存在。gH 差解决了 H 差不能解决的缺陷，值得我们特别注意的的是，gH 差存在，则 H 差一定存在。但是，H 差存在，gH 差不一定存在。换句话说，gH 差比 H 差存在的范围更广。如例 2.2.2。但是 gH 差并不是对所有模糊数的差都存在，如例 2.3.1 和例 2.3.2，其定义也有不可避免的缺陷。故将 gH 差进行了推广，又提出了一种新的模糊差，即 g 差。

2.4. g 差

定义 2.4.1 ([9] [10] [11]) 设 $\tilde{u},\tilde{v}\in E^1$，则 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的 g 差通过 α -水平截集被定义如下，

$$\left[\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}\right]^{\alpha}=\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\beta\ge\alpha}\left(\left[\tilde{u}\right]^{\beta}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{\beta}\right)\right),\quad\alpha\in\left[0,1\right]$$

其中 gH 差“$\ominus_{gH}$”表示 $\left[\tilde{u}\right]^{\beta}$ 和 $\left[\tilde{v}\right]^{\beta}$ 的区间运算，“cl”表示集合的闭包。

性质 2.4.1 [10] g 差同样也可以被定义如下，

$$\left[\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}\right]^{\alpha}=\left[\inf_{\beta\ge\alpha}\min\left\{u_\beta^--v_\beta^-,u_\beta^+-v_\beta^+\right\},\sup_{\beta\ge\alpha}\max\left\{u_\beta^--v_\beta^-,u_\beta^+-v_\beta^+\right\}\right]。$$

性质 2.4.2 [9] 设 $\tilde{u},\tilde{v}\in E^1$，则

1) 只要 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}$ 存在，则 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 一定存在，即 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}=\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$，但反之不成立。特别注意的是，$\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{u}=0$；

2) $\left(\tilde{u}\oplus\tilde{v}\right)\ominus_{g}\tilde{v}=\tilde{u}$；

3) $0\ominus_{g}\left(\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}\right)=\tilde{v}\ominus_{g}\tilde{u}$；

4) $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}=\tilde{v}\ominus_{g}\tilde{u}$ 当且仅当 $\tilde{w}=-\tilde{w}$，同样的有，$\tilde{w}=0$ 当且仅当 $\tilde{u}=\tilde{v}$。

注 2.4.1 设 $\tilde{u},\tilde{v}\in E^1$，有

1) $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的 g 差一直存在并且为一个模糊数。

2) 两个模糊数的 g 差体现了最小模糊数的性质。

在例 2.3.1 中 gH 差不存在时，能否用 g 差的定义来解决，即

$$\left[\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}\right]^{\alpha}=\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\beta\ge\alpha}\left(\left[\tilde{u}\right]^{\beta}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{\beta}\right)\right),\quad \alpha\in\left[0,1\right]$$

当 $\alpha=0$，将上述式子展开得，

$$\begin{aligned}\left[\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}\right]^{0}&=\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\beta\ge 0}\left(\left[\tilde{u}\right]^{\beta}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{\beta}\right)\right)\\&=\overbrace{\left(\left[\tilde{u}\right]^{0}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0}\right)\cup\cdots\cup\left(\left[\tilde{u}\right]^{0.1}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0.1}\right)\cup\cdots\cup\left(\left[\tilde{u}\right]^{0.5}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0.5}\right)}^{\text{情况1)}}\\&\quad\underbrace{\cup\cdots\cup\left(\left[\tilde{u}\right]^{0.6}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0.6}\right)\cup\cdots\cup\left(\left[\tilde{u}\right]^{0.9}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{0.9}\right)\cup\cdots\cup\left(\left[\tilde{u}\right]^{1}\ominus_{gH}\left[\tilde{v}\right]^{1}\right)}_{\text{情况2)}}\\&=\left(\left[0,1\right]\right)\cup\cdots\cup\left(\left[0.5,0.5\right]\right)\cup\cdots\cup\left(\left[0,1\right]\right)\\&=\left[0,1\right]\end{aligned}$$

显然，观察上述展开式得，g 差包含了 gH 差的两种情况，通过取并运算和集合的闭包，同时考虑了定义 2.3.1 中的情况 1)和情况 2)，进而避免情况 1)与情况 2)同时出现时，产生矛盾。在 $\alpha\in\left[0,1\right]$ 中取特殊值分别计算相应的 g 差如下(如图 1)：

$$\left[\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}\right]^{0.1}=\left[0,1\right],$$
$$\vdots$$
$$\left[\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}\right]^{0.5}=\left[0,1\right],$$
$$\vdots$$
$$\left[\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}\right]^{1}=\left[0,1\right]。$$

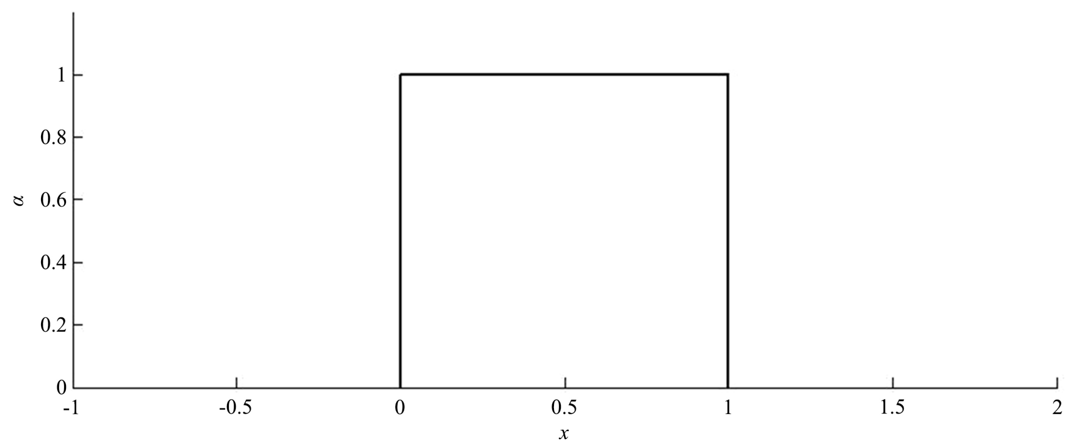

Figure 1. The g difference $\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}$ between the triangular fuzzy number $\tilde{u}=(0,2,4)$ and the trapezoidal fuzzy number $\tilde{v}=(0,1,2,3)$

图 1. 三角模糊数 $\tilde{u}=(0,2,4)$ 和梯形模糊数 $\tilde{v}=(0,1,2,3)$ 的 g 差 $\tilde{u}\ominus_g\tilde{v}$

同样对于例 2.3.2 中 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}$ 不存在时，$\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 存在。如图 2。

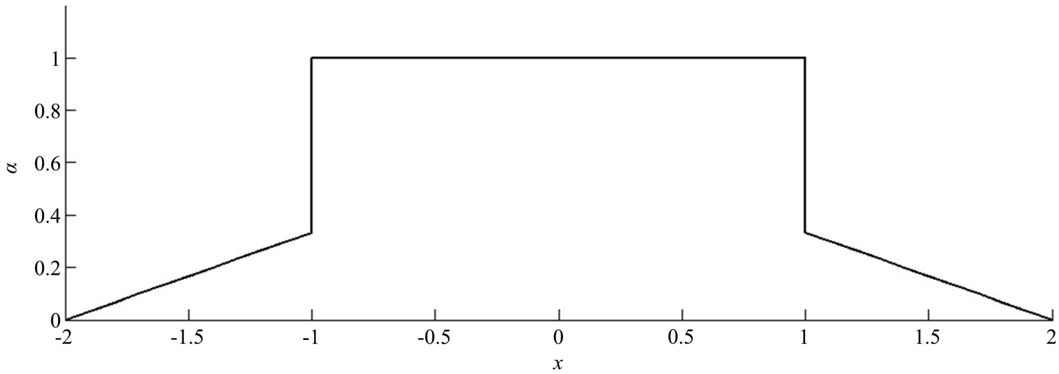

Figure 2. The g difference $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ between the trapezoidal fuzzy number $\tilde{u}=(2,3,5,6)$ and the triangular fuzzy number $\tilde{v}=(0,4,8)$

图 2. 梯形模糊数 $\tilde{u}=(2,3,5,6)$ 和三角模糊数 $\tilde{v}=(0,4,8)$ 的 g 差 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$

例 2.4.1 梯形模糊数 $\tilde{u}=(4,5,6,8)$，三角模糊数 $\tilde{v}=(0,5,10)$，很显然，我们可以看到 $\tilde{u}\ominus_{gH}\tilde{v}$ 是不存在的，因为情况 1) 与情况 2) 会导致矛盾。但是 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 总是存在的，如图 3。

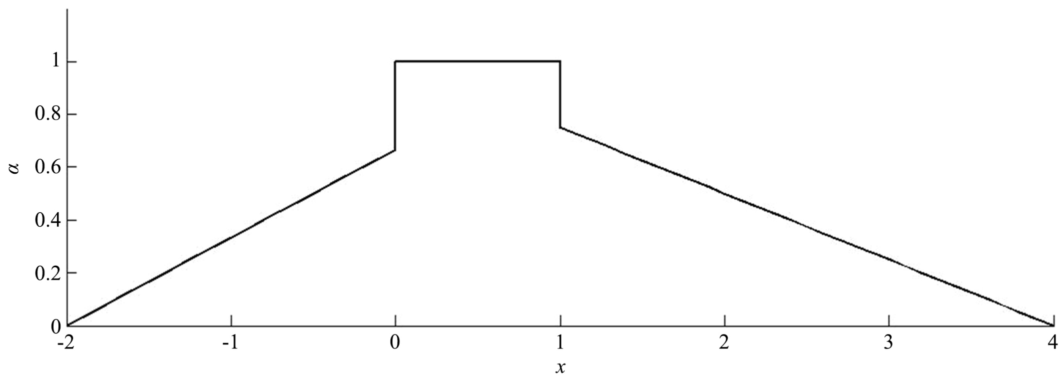

Figure 3. The g difference $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ between the trapezoidal fuzzy number $\tilde{u}=(4,5,6,8)$ and the triangular fuzzy number $\tilde{v}=(0,5,10)$

图 3. 梯形模糊数 $\tilde{u}=(4,5,6,8)$ 和三角模糊数 $\tilde{v}=(0,5,10)$ 的 g 差 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$

两个模糊数的 g 差总是存在并且是一个模糊数，从定义 2.4.1 下面的展开式可知，在计算 g 差时比较复杂。但是相比于 gH 差，g 差存在范围扩大，扩展了两个模糊数的 gH 差不存在的情况。

2.5. gr 差

本小节中为了区分隶属度与相对距离测度变量(RDM)，将隶属度记为 μ。

定义 2.5.1 [8] 设模糊数 $\tilde{u}:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to[0,1]$，$\tilde{u}(x)$ 的水平隶属函数 $u^{gr}:[0,1]\times[0,1]\to[a,b]$，即 $u^{gr}(\mu,\alpha_x)=x$，其中“gr”表示 $x\in[a,b]$ 的信息粒，$\mu\in[0,1]$ 表示 x 在 $\tilde{u}(x)$ 中的隶属度，$\alpha_u\in[0,1]$ 表示 RDM 变量(相对距离测度变量)，并且 $u^{gr}(\mu,\alpha_u)=\underline{u}^{\mu}+\left(\overline{u}^{\mu}-\underline{u}^{\mu}\right)\alpha_u$。

注 2.5.1 [8] $\tilde{u}(x)\in E^1$ 的水平隶属函数被定义为 $\mathcal{H}(\tilde{u}(x))=u^{gr}(\mu,\alpha_u)$，而且，使用

$$\mathcal{H}^{-1}\left(u^{gr}\left(\mu,\alpha_u\right)\right)=\left[\tilde{u}\right]^{\mu}=\left[\inf_{\beta\ge\alpha}\min_{\alpha_u}u^{gr}\left(\beta,\alpha_u\right),\sup_{\beta\ge\alpha}\max_{\alpha_u}u^{gr}\left(\beta,\alpha_u\right)\right]。$$

表示 $\tilde{u}(x)\in E^1$ 的垂直隶属函数的 μ -水平截集，实际上可以得到信息粒的生成跨度。

在定义 2.5.1 中提到了水平隶属函数[12]，但垂直隶属函数的映射为 $x\to\mu$，即 $[a,b]\to[0,1]$。也就是说，给定一个 x，对应一个 μ，但给定一个 μ，则会有不确定的 x 对应。反之，水平隶属函数的定义通过引入一个 RDM 变量“α_u”，使得对于一个给定的 μ，则会有唯一确定的 x 对应，即 $[0,1]\times[0,1]\to[a,b]$。通过水平隶属函数取的每一个 x 被我们称作“信息粒”。用以下例子来说明。

例 2.5.1 三角模糊数 $\tilde{u}=(1,2,3)$，垂直隶属函数表示如下：

$$\mu(x)=\begin{cases}x-1, & \text{if } x\in[1,2)\\ 1, & \text{if } x=2\\ x+3, & \text{if } x\in(2,3]\\ 0, & \text{if } x\in\text{otherwise}\end{cases}$$

当 $\mu=0.5$ 时，则 $[u]^{0.5}=[1.5,2.5]$。通过定义 2.5.1，关于 $\tilde{u}$ 的水平隶属函数表示为

$$\mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}\left(\mu,\alpha_u\right)=1+\mu+2\alpha_u(1-\mu)，\quad \mu\in[0,1]，\quad \alpha_u\in[0,1]\ (\text{如图 4})。$$

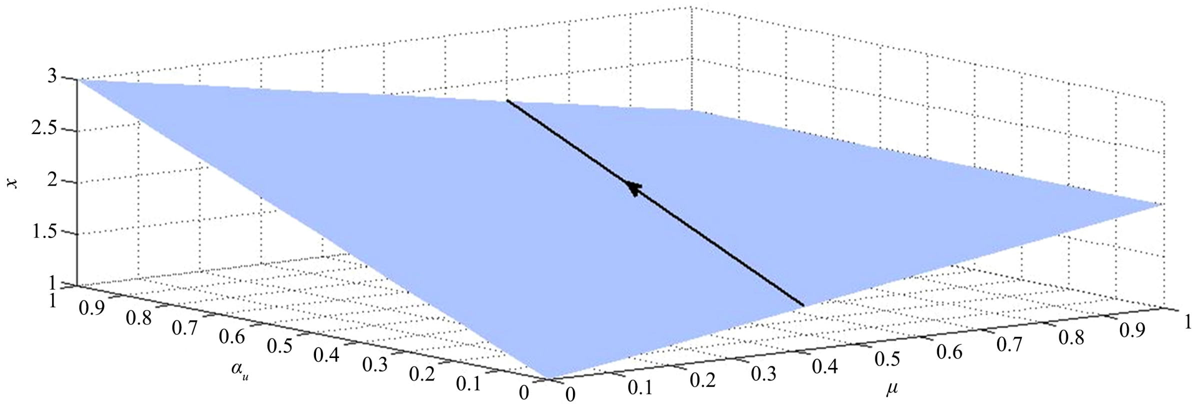

Figure 4. The blue area represents the horizontal membership function of $\tilde{u}=(1,2,3)$, and the black arrow represents the direction in which α_u changes

图 4. 蓝色区域表示 $\tilde{u}=(1,2,3)$ 的水平隶属函数，黑色箭头表示其 α_u 变化方向

对于 $\mathcal{H}(\tilde{u})$，当 $\mu=0.5$ 时，$\mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,\alpha_u)=1.5+\alpha_u$，将 $\alpha_u\in[0,1]$ 中的值都取到可得，

$$\alpha_u=0,\ \mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,0)=1.5,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_u=0.1,\ \mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,0.1)=1.6,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_u=0.2,\ \mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,0.2)=1.7,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_u=0.5,\ \mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,0.5)=2,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_u=1,\ \mathcal{H}(\tilde{u})=u^{gr}(0.5,1)=2.5。$$

仔细观察上述每一个式子，随着α_u从 0 逐渐变化到 1 的过程中，$\mathcal{H}(\tilde{u})$同样在逐渐变化。换句话说，当α_u将$[0,1]$中的每个值都取到时，对应的$\mathcal{H}(\tilde{u})$是带有隶属度$\mu = 0.5$时的水平截集$[1.5, 2.5]$中每一个值。则将每一个$\mathcal{H}(\tilde{u})$可以被称作“信息粒”(图 5 表示α_u从 0 逐渐变化到 1 的过程)。

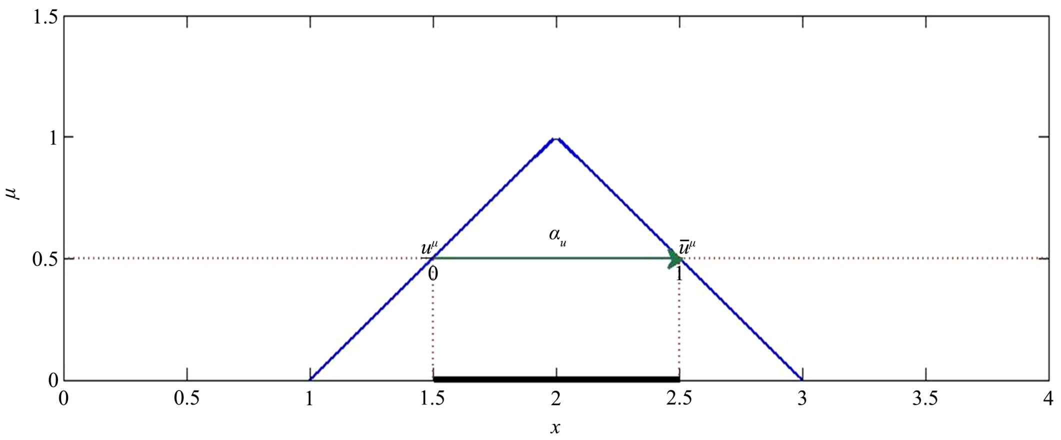

Figure 5. The green solid line indicates the process that α_u gradually changes from 0 to 1, and the arrow indicates its direction. The black solid line indicates the level cut-set [1.5, 2.5] composed of a plurality of “information granular” $\mathcal{H}(\tilde{u})$

图 5. 绿色实线表示α_u从 0 逐渐变化到 1 的过程，箭头表示其方向。黑色实线表示多个“信息粒”$\mathcal{H}(\tilde{u})$构成的水平截集[1.5, 2.5]

定义 2.5.2 [8]设$\tilde{u}, \tilde{v} \in E^1$，分别对应的水平隶属度函数[12]为$u^{gr}(\mu, \alpha_u)$和$v^{gr}(\mu, \alpha_v)$，并且，“$\odot$”表示四则运算，即加法，减法，乘法和除法。因此，$\tilde{u} \odot \tilde{v}$是模糊数使得$\mathcal{H}(\tilde{m}) = u^{gr}(\mu, \alpha_u) \odot_{gr} v^{gr}(\mu, \alpha_v)$。值得注意的是当“$\odot$”表示除法时，$0 \notin v^{gr}(\mu, \alpha_v)$。

定义 2.5.3 [8]在定义 2.5.2 中定义的两个模糊数的差被称作粒差，简称 gr 差。有以下运算性质：

1) $\tilde{u} \odot_{gr} \tilde{v} = -(\tilde{v} \odot_{gr} \tilde{u})$；
2) $\tilde{u} \ominus_{gr} \tilde{u} = 0$。

例 2.5.2 模糊数$\tilde{u} = (2,3,5,6)$，$\tilde{v} = (0,4,8)$，则其分别对应的水平隶属度函数为

$$\mathcal{H}(\tilde{u}) = u^{gr}(\mu, \alpha_u) = 2 + \mu + (4 - 2\mu)\alpha_u,$$

$$\mathcal{H}(\tilde{v}) = u^{gr}(\mu, \alpha_v) = 4\mu + 8(1 - \mu)\alpha_v,$$

则

$$\begin{aligned}[\tilde{w}] &= \mathcal{H}^{-1}\left(w^{gr}(\mu, \alpha_u, \alpha_v)\right) \\ &= \mathcal{H}^{-1}\left[2 + \mu + (4 - 2\mu)\alpha_u - 4\mu - 8(1 - \mu)\alpha_v\right] \\ &= \Big[\inf_{\beta \ge \alpha} \min_{\alpha_u, \alpha_v}\left(2 - 3\mu + (4 - 2\mu)\alpha_u - 8(1 - \mu)\alpha_v\right), \\ &\qquad \sup_{\beta \ge \alpha} \max_{\alpha_u, \alpha_v}\left(2 - 3\mu + (4 - 2\mu)\alpha_u - 8(1 - \mu)\alpha_v\right)\Big] \\ &= [-6 + 5\mu, -5\mu + 6]\end{aligned}$$

被算出的粒差如图 6 所示。

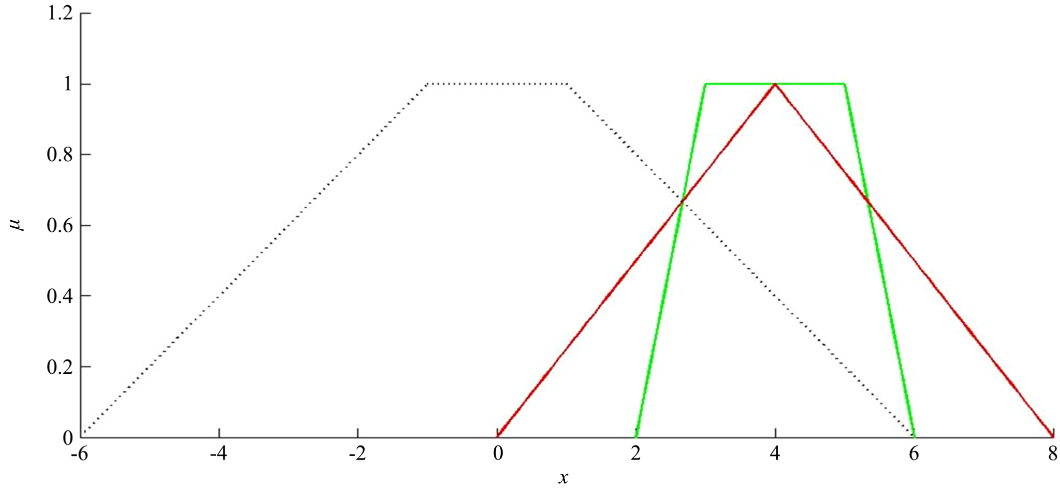

Figure 6. The gr difference $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ (black dotted line) between trapezoidal fuzzy number $\tilde{u}=(2,3,5,6)$ (green solid line) and triangular fuzzy number $\tilde{v}=(0,4,8)$ (red solid line)

图 6. 梯形模糊数 $\tilde{u}=(2,3,5,6)$ (绿色实线)和三角模糊数 $\tilde{v}=(0,4,8)$ (红色实线)的 gr 差 $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ (黑色虚线)

将例 2.5.2 中的 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 与 $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ 在图 7 中进行比较。可以清楚看到 g 差具有最小模糊数的性质。

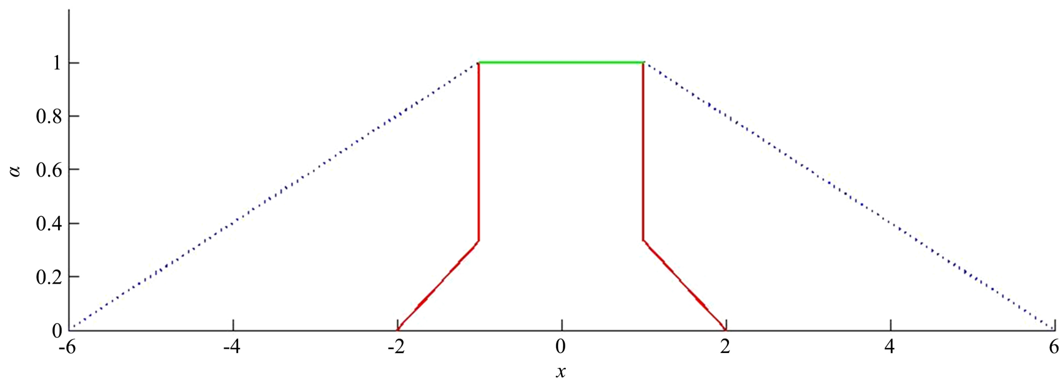

Figure 7. $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ is indicated by red solid line, $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ by blue dotted line, and green solid line indicates the part where $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ and $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ overlap

图 7. $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 用红色实线表示，$\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ 用蓝色虚线表示，绿色实线表示 $\tilde{u}\ominus_{g}\tilde{v}$ 与 $\tilde{u}\ominus_{gr}\tilde{v}$ 重合的部分

两个模糊数的 gr 差总是存在的并且也是一个模糊数，相比较 g 差而言，gr 差的计算比 g 差要简单一些。粒差的运算是将模糊数化为相应的水平隶属函数，借助于对应的水平隶属函数进行相减，也就相当于函数的运算。迄今为止，模糊数的 gr 差相比较于其他的差有很大的优势。

3. 结论

本文旨在对模糊数差的存在性作了一个分析与研究，目的是扩展两个模糊数差的存在性，从标准模糊减法，H 差，gH 差，g 差和 gr 差的定义及应用可知，模糊数差的存在范围在逐渐变大。同样克服了模糊减法的两个缺陷，即模糊减法不是模糊加法逆运算的缺陷和 $\tilde{u}\ominus\tilde{u}=0$ 性质的缺失。在存在性上，H 差很少存在，gH 差比 H 差存在的范围广，但并不总是存在，反之，g 差和 gr 差总是存在。在运算上，gr

差与 gH 差相比于其他模糊数差有很大的优势。

基金项目

国家自然科学基金(61763044；12061067)，甘肃省自然科学基金项目(18JR3RA096)，甘肃省教育厅高等学校创新基金(2020A-009)，西北师范大学青年教师科研能力提升计划(NWNU-LKQN-18-29)。

参考文献

[1] Chang, S.L. and Zadeh, L.A. (1972) On Fuzzy Mapping and Control. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics*, **SMC-2**, 33-34. https://doi.org/10.1109/TSMC.1972.5408553

[2] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991: 1-74.

[3] Hukuhara, M. (1967) Integration des applications measurablesdont la valeurest uncompact convexe. *FunkcialajEkvacioj*, **10**, 205-223.

[4] Puri, M. and Ralescu, D. (1983) Differentials of Fuzzy Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **91**, 301-307. https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90169-5

[5] Kaleva, O. (1987) Fuzzy Differential Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, **24**, 301-317. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7

[6] Stefanini, L. (2008) A Generalization of Hukuhara Difference. In: Dubois, D., Lubiano, M.A., Prade, H., Gil, M.A., Grzegorzewski, P. and Hryniewicz, O., Eds., *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*, *Series on Advances in Soft Computing*, Springer, Berlin, Vol. 48.

[7] Stefanini, L. (2010) A Generalization of Hukuhara Difference and Division for Intervaland Fuzzy Arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, **161**, 1564-1584. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.009

[8] Mazandarani, M., Pariz, N. and Kamyad, A.V. (2018) Granular Differentiability of Fuzzy-Number-Valued Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, **26**, 310-323. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2659731

[9] Bede, B. and Stefanini, L. (2013) Generalizations of the Differentibility of Fuzzy Number Value Functions. *Fuzzy Sets and Systems*, **230**, 119-141. https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.10.003

[10] Bede, B. (2013) Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35221-8

[11] Stefanini, L. and Bede, B. (2009) Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-Valued Functions and Interval Differential Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods Applications*, **71**, 1311-1328. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005

[12] Piegat, A. and Landowski, M. (2015) Horizontal Membership Function and Examples of Its Application. *International Journal of Fuzzy Systems*, **17**, 22-30. https://doi.org/10.1007/s40815-015-0013-8