Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1493-1504
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118168

Hans汉斯

$F^2\left(C^n\right)$空间上无界的复对称加权复合算子

黄周萍

华南农业大学，广东 广州
Email: 2387083039@qq.com

收稿日期：2021年7月4日；录用日期：2021年8月6日；发布日期：2021年8月13日

摘　要

本文研究了n维Fock空间上加权复合算子$T_\psi D_\theta^k f := \psi \cdot f^{(k)} \circ \theta$关于共轭$(Jf)(z) = \left(C_{1,0,c}\right) f(z) = c\overline{f(\overline{z})}$的复对称性和自伴性，其中$\theta$和$\psi$是$C^n$上的两个整函数，$k$是非负整数，得出了算子$T_\psi D_\theta^k$是$J$-自伴的等价刻画。此外，我们还给出了$T_\psi D_\theta^k$是厄米特算子的充要条件。

关键词

$F^2\left(C^n\right)$空间，复对称性，加权复合算子，自伴性

Unbounded Complex Symmetric Weighted Composition Operators on $F^2\left(C^n\right)$ Space

Zhouping Huang

South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: 2387083039@qq.com

Received: Jul. 4th, 2021; accepted: Aug. 6th, 2021; published: Aug. 13th, 2021

Abstract

In this paper, we study the complex symmetry and self-adjoint of the conjugate $(Jf)(z) = \left(C_{1,0,c}\right) f(z) = c\overline{f(\overline{z})}$ by the weighted complex operator $T_\psi D_\theta^k f := \psi \cdot f^{(k)} \circ \theta$ on n dimensional Fock space, where θ and ψ are two entire functions, k is a nonnegative integer. We

文章引用：黄周萍. $F^2\left(C^n\right)$空间上无界的复对称加权复合算子[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1493-1504.
DOI: 10.12677/pm.2021.118168

give an equivalence characterization where the operator $T_\psi D_\theta^k$ is a *J*-self-adjoint. In addition, we prove that the unbounded maximal weighted composition operator is self-adjoint.

Keywords

$F^2\left(C^n\right)$ **Space, Complex Symmetry, Weighted Complex Operator, Self Adjoint**

1. 引言

关于复对称型算子的研究，涉及到函数理论、矩阵分析等多个数学领域的知识，在过去几年里这个研究就引起了许多研究人员的注意。Garcia，Putinar and Wogen 在文献[1] [2] [3]提出了复对称算子的一般研究。在文献[4] [5] [6] [7]中研究者探讨了解析函数空间中各种再生核希尔伯特空间上的加权复合算子的结构，使得加权复合算子关于共轭 $Jf=\overline{f\left(\overline{z}\right)}$ 是复对称的。Hai 和 Khoi 在文献[8]中给出了关于 $F^2\left(c\right)$ 上的加权复合共轭 $C_{a,b,c}$ 的描述，映射 $C_{a,b,c}:F^2\left(c\right)\to F^2\left(c\right)$ 由 $C_{a,b,c}f\left(z\right)=ce^{bz}f\left(az+b\right)$ 定义，其中 a,b,c 是满足 $|a|=1$，$|c|^2\mathrm{e}^{|b|^2}=1$，$\overline{a}b+\overline{b}=0$ 的复数。最近有关学者在[9] [10]中进一步探讨了 Fock 空间上有界加权组合算子的复对称性。在[11]中，P. V. Hai 研究了 Fock 空间无界加权复合算子的自伴的问题。在[12]中，Aastha Malhotra 和 Anuradha Gupta 研究了一维 Fock 空间整函数关于特定共轭的复对称性和自伴性，其中 $|a|=|c|=1$。受到这些研究发展的激励，我们在本文中研究了 n 维 F^2 空间中整函数在 C^n 关于特定共轭 $\left(Jf\right)\left(z\right)=C_{1,0,c}f\left(z\right)=c\overline{f\left(\overline{z}\right)}$ 的复对称性和厄米特性，其中 $a=|c|=1$。

2. 预备知识

2.1. 复对称算子

我们首先回顾一下一些基本的定义。在本文中，H 是一个可分离的复希尔伯特空间，无界线性算子的域表示为 $dom(.)$，当 A，B 是两个无界的线性算子，$A\preceq B$ 表示在 $dom\left(A\right)$ 上，B 是 A 的扩展，或者说 A 是 B 的限制，也就是说，$dom\left(A\right)\preceq dom\left(B\right)$，且当 $x\in dom\left(A\right)$ 时，$Ax=Bx$，如果 $A\preceq B$，$A\preceq B$，则 $A=B$。

定义 2.1

一个反线性算子 $C:H\to H$ 如果同时是对合的和等距的，则 C 称为是共轭的。

定义 2.2

令 $T\in H\to H$ 是一个稠定义的闭算子，且是 C 是共轭的，则：

1) 如果 $T\preceq CT^*C$，则称 T 是 C-对称的。

2) 如果 $T=CT^*C$，则称 T 是 C-自伴的。

在这两种情况下，算子 T 都是复对称的，即：$\left[Tx,y\right]=\left[x,Ty\right]$，$x,y\in dom\left(T\right)$。容易看到，每个 C-自伴算子都是 C-对称算子，但逆并不总是正确的。

2.2. $F^2\left(C^n\right)$ 空间

令 C^n 是 n 维复数空间，dv 表示 C^n 上的体积测度，如果 $z=\left(z_1,z_2,\cdots,z_n\right)$ 和 $w=\left(w_1\cdots w_n\right)$ 是 C^n 上的

两点，则我们记：$z\cdot\overline{w}=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w_j}$，$|z|=(z\cdot\overline{z})^{\frac{1}{2}}$。当$0<p\le\infty$，$C^n$上所有使得$f(z)e^{\frac{-|z|^2}{2}}$属于$L^p(C^n,dV)$的整函数构成的空间称为 Fock 空间。记为$F^p(C^n)$。

当$p=2$时，记：$\|f\|=\frac{1}{(2\Pi)^n}\int_{c^n}|f(z)|^2e^{\frac{-|z|^2}{2}}dv(z)$，$f\in F^2(C^n)$。

再生核函数$K_w(z)=e^{\frac{\langle z,w\rangle}{2}}$，$w,z\in C^n$。

$K_w^{[k]}(z)=\left(\frac{1}{2^k}\right)\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)e^{\frac{z\overline{w}}{2}}$，$w,z\in C^n$。

其中α是多重指标，$\alpha=\alpha_1!\cdots\alpha_2!$，$|\alpha|=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$，$z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$，$\alpha_i$是非负整数，若$\beta$也为多重指标，$\alpha\le\beta\Leftrightarrow\alpha_i\le\beta_i$。

$$f^{[k]}(w)=\left\langle f,K_w^{[k]}(z)\right\rangle$$

更多关于 Fock 空间的研究结果可参见文献[13]。

2.3. 广义加权复合算子$T_\psi D_\theta^k$

定义 2.3 假设θ和ψ是C^n上的两个整函数，令D^k表示k阶微分算子，定义为：$D^kf=f^{(k)}$。

定义 2.4 加权复合算子$T_\psi D_\theta^k$的定义：$T_\psi D_\theta^kf=\psi\cdot f^{(k)}\circ\theta$，其中$k$是非负整数，$f\in F^2(C^n)$，$T_\psi$是乘法算子。

众所周知，所有的算子都可以由加权复合算子得到。当$\theta:C^n\to C$，$\psi:C^n\to C$，我们考虑$F^2(C^n)$空间上标准的广义加权复合算子的表达式为以下形式：$\Delta^k(\psi,\theta)f=\psi\cdot f^{(k)}\circ\theta$，与表达式$\Delta^k(\psi,\theta)$相对应的$F^2(C^n)$空间上。

定义 2.5 极大广义加权复合算子定义为：$T_\psi D_{\theta,\max}^kf=\psi\cdot f^{(k)}\circ\theta$，这$f\in Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)$

$$Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)=\left\{F\in F^2:\Delta^k(\psi,\phi)f\in F^2\right\},\quad f\in Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)$$

$Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)$被称为是最大的域。

定义 2.6 当$T_\psi D_\theta^k\preceq Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)$时，$T_\psi D_\theta^k$称为是无界的广义加权复合算子的定义：也就是说，$f\in Dom(T_\psi D_\theta^k)$时，$Dom(T_\psi D_\theta^k)\subseteq Dom(T_\psi D_{\theta,\max}^k)$且$T_\psi D_\theta^kf=T_\psi D_{\theta,\max}^kf$。

3. 主要结果

$T_\psi D_\theta^k$的基本性质

命题 3.1 令$T_\psi D_\theta^k$是无界的广义加权复合算子，由整函数θ和ψ生成。假设$T_\psi D_\theta^k$是稠密定义的，则：

(1)当$w\in C^n$，可得$K_w\in Dom\left(\left(T_\psi T_\theta^k\right)^*\right)$，且$\left(T_\psi D_\theta^k\right)^*K_w=\overline{\psi(\omega)}K_{\theta(w)}^{[k]}$，其中$\left(T_\psi D_\theta^k\right)^*$表示$T_\psi D_\theta^k$的伴随。

特别的，如果$\theta(w)=Aw+2D$，其中A,D是复常数，设，$w\in C^n$，r,j是多元指标，则$K_w^{[k]}\in Dom\left(\left(T_\psi T_\theta^k\right)^*\right)$

$$\left(T_\psi D_\theta^k\right)^*K_w^{[k]}=\sum_{r\ge j}\binom{r}{j}\overline{\psi^{(r-j)}(w)A^j}K_{\theta(w)}^{[k+j]}\tag{3.1}$$

证明：

1) 当$f\in Dom(T_\psi D_\theta^k)$，$w\in C^n$，我们可以得

$$\left\langle T_\psi D_\theta^k f, K_w \right\rangle = \left\langle \psi \cdot f^{(k)} \circ \theta, K_w \right\rangle = \psi(w) \cdot f^{(k)}(\theta(w)) = \left\langle f, \overline{\psi(\omega)} \cdot K_{\theta(w)}^{[k]} \right\rangle$$

因此我们可以得到$\left(T_\psi D_\theta^k\right)^* K_w = \overline{\psi(w)} \cdot K_{\theta(w)}^{[k]}$，其中$w \in C^n$。

2) 假设$\theta(w) = Az + 2D$，r, j是多元指标且

$$\begin{aligned}\left\langle T_\psi D_\theta^k f, K_w^{[k]} \right\rangle &= \left(T_\psi D_\theta^k\right)^{(r)} f(w) \\ &= \left(\psi \cdot f^{(k)} \circ \theta\right)^{(r)}(w) \\ &= \psi(w) \cdot f^{(k)}(Az + 2D)^{(r)} \\ &= \sum_{j \le r} \binom{r}{j} \psi^{(r-j)}(w) A^j f^{(k+j)}(Az + 2D) \\ &= \left\langle f, \sum_{j \le r} \binom{r}{j} \overline{\psi^{(r-j)}(w) A^j} K_{Az+2D}^{[k+j]} \right\rangle\end{aligned}$$

命题 3.2 极大广义加权复合算子$T_\psi D_{\theta,\max}^k$是闭算子。

证明：考虑域$Dom\left(T_\psi D_\theta^k\right)$的序列$\langle f_n \rangle$，令$f, g \in F^2(C^n)$，使得在$F^2(C^n)$中

$$f_n \to f\text{，且 } T_\psi D_{\theta,\max}^k f_n \to g$$

因为在$F^2(C^n)$中范数收敛可以推出点收敛，所以我们$f_n^{(m)}(z) \to f(z)$且$T_\psi D_{\theta,\max}^k f_n(z) \to g(z)$，$z \in C^n$。因此我们有

$$T_\psi D_{\theta,\max}^k f_n(z) = \psi(z) \cdot f_n^{(k)}(\theta(z)) \to \psi(z) \cdot f^{(k)}(\theta(z)),\quad z \in C^n\text{。}$$

于是可得：$\psi(z) \cdot f^{(k)}(\theta(z)) = g(z)$，$z \in C^n$，因为$g \in F^2(C^n)$，这推出$\psi(z) \cdot f^{(k)}(\theta(z)) \in F^2$，$z \in C^n$，所以$f \in Dom\left(T_\psi D_\theta^k\right)$，$T_\psi D_{\theta,\max}^k f = g$，因此可以得到算子$T_\psi D_{\theta,\max}^k$是闭算子。

命题 3.3 集合$\Gamma = Span\left\{K_w : w \in C^n\right\}$是$F^2(C^n)$的稠密子空间。

命题 3.4 令P是线性算子，$Dom(p) = \Gamma$，$PK_w = \psi(w) K_{\theta(w)}^{[k]}$，其中$k \in N$。则$T_\psi D_{\theta,\max}^k = P^*$，且算子$T_\psi D_{\theta,\max}^k$是稠密的当且仅当算子$P$是闭算子。

证明：对于任意的$g = \sum_{i=1}^n \delta_i K_{wi} \in Dom(P)$，当$h \in F^2(C^n)$，我们计算

$$\begin{aligned}\langle Pg, h \rangle &= \left\langle P \sum_{j=1}^n \delta_j K_{w_j}, h \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \delta_j P K_{w_j}, h \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\psi(\omega_i)} K_{\theta(w_i)}^{[k]}, h \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\psi(\omega_i) h^k(\theta(w_i))} \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\Delta^k(\psi, \theta) h(w_i)}\end{aligned}$$

由 Riesz lemma，我们计算得$h \in Dom(P^*)$当且仅当存在$M > 0$，使得

$$\left|\langle Pg, h \rangle\right| \le M \|g\|, \forall g \in Dom(P)$$

或者当且仅当

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{\delta_i}\Delta^k\left(\psi,\theta\right)h\left(w_i\right)\right|^2 \le M^2\sum_{i,l=1}^{n}\delta_i\overline{\delta_l}K_{w_i}\left(w_l\right) \tag{3.2}$$

因此我们可以推出 $\Delta^k\left(\psi,\theta\right)h\in F^2\left(C^n\right)$，所以 $Dom\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)=Dom\left(P^*\right)$。

当 $g\in Dom\left(p\right)$，$h\in Dom\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)$时，可得：$\left\langle Pg,h\right\rangle=\left\langle g,\Delta^k\left(\psi,\theta\right)h\right\rangle=\left\langle g,T_\psi D_{\theta,\max}^k h\right\rangle$ 这就推出了我们的结论：$T_\psi D_{\theta,\max}^k=P^*$。

定理 3.5 假设 θ 和 ψ 是 C^n 上的两个整函数，令 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是最大的广义加权算子。如果 $J\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*K_w\left(z\right)=T_\psi D_{\theta,\max}^k JK_w\left(z\right)$，其中 $w,z\in C^n$，$\theta\left(w\right)=Az+2D$，$\psi\left(z\right)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)\mathrm{e}^{Dz}$，其中 A，$C_k\left(\ne 0\right)$，D 是复常数。

证明：对任意的 $w,z\in C^n$，且

$$\begin{aligned}T_\psi D_{\theta,\max}^k JK_w\left(z\right)&=T_\psi D_{\theta,\max}^k\left(c\overline{K_w\left(\overline{z}\right)}\right)\\&=cT_\psi D_{\theta,\max}^k\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}wz}\right)\\&=c\psi\left(z\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}w^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}w\theta(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*K_w\left(z\right)&=J\left(\overline{\psi\left(w\right)}\right)K_{\theta(w)}^{[k]}\left(z\right)\\&=c\psi\left(w\right)\overline{K_{\theta(w)}^{[k]}\left(\overline{z}\right)}\\&=c\psi\left(w\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z\theta(w)}\end{aligned}$$

当 $w,z\in C^n$，$k\in N$ 时，我们有：

$$c\psi\left(w\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z\theta(w)}=c\psi\left(z\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}w^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}w\theta(z)} \tag{3.3}$$

两边对 w 做 k 次微分，得到的结果令 $w=w_0,w_0=\left(0,\cdots,0\right)$，则得：

$$\psi\left(z\right)=\frac{\psi^{(k)}\left(w_0\right)}{\sum_{|\alpha|=k}\alpha!}\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z\theta(w_0)} \tag{3.4}$$

令 $C_k=\dfrac{\psi^{(k)}\left(w_0\right)}{\sum_{|\alpha|=k}\alpha!}$，$D=\dfrac{1}{2}\theta\left(w_0\right)$，则 $\psi\left(z\right)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)\mathrm{e}^{Dz}$，把它们带回(3.3)式中可得：

$$\frac{\theta\left(z\right)-\theta\left(w_0\right)}{z}=\frac{\theta\left(w\right)-\theta\left(w_0\right)}{w}=A$$

其中 $w,z\in C^n/\left(0,\cdots,0\right)$，$A$ 是复常数，因此 $\theta\left(z\right)=Az+2D$。在接下来的命题中，我们得到了算子 $JT_\psi D_{\theta,\max}^K J$ 的明确的形式。

命题 3.6 令 $\psi(z)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz}$，$\theta(z)=Az+2D$，$\tilde{\psi}(z)=\tilde{C}_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\tilde{D}z}$，$\theta(z)=\bar{A}z+2\bar{D}$，其中 $D=\frac{1}{2}\theta(w_0)$，且 $C_k(\neq 0)$ 是复常数，则下面的结论成立：

1) $J\Delta^k(\psi,\theta)J=\Delta^k(\tilde{\psi},\tilde{\theta})$。

2) $JT_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}J=JT_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{K}J$。

证明：对任意的 $f\in F^2$，我们有

$$J\Delta^k(\psi,\theta)J=J\Delta^k(\psi,\theta)\left(c\overline{f(\bar{z})}\right) \tag{3.5}$$

其中 $|c|=1$。如果整函数 f 以泰勒级数展开，$f(z)=\sum_{I\in N_0^n} a_I z^I$，$f$ 为 k 阶可导，令 I,β 是 n 维多重指标 $|\beta|=k$，$I\geq\beta$，即

$$f^{(k)}(z)=\sum_{I\geq\beta}\frac{I!}{(I-\beta)!}a_{\alpha}z^{I-\beta}，\ 令\ g(z)=\overline{f(\bar{z})}=\sum_{I\in N_0^n}\bar{a}_I z^I$$

直接计算有：$\overline{\psi(\bar{z})}=\bar{C}_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\bar{D}z}$，且 $g^{(k)}(\theta(\bar{z}))=\sum_{I\geq\beta}\frac{I!}{(I-\beta)!}\bar{a}_I(A\bar{z}+2D)^{I-\beta}$，进一步，我们可以得到 $\overline{g^{(k)}(\theta(\bar{z}))}=\sum_{I\geq\beta}\frac{I!}{(I-\beta)!}a_I(\bar{A}z+2\bar{D})^{I-\beta}$ 则(3.5)可以推出

$$\begin{aligned}
J\Delta^k(\psi,\theta)Jf(z)&=\bar{c}J(\psi(z))g^{(k)}(\theta(z))\\
&=|c|^2\overline{\psi(\bar{z})g^{(k)}(\theta(\bar{z}))}\\
&=\bar{C}_k\left(\sum_{|\alpha|=|k|} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\bar{D}z}\\
&=\tilde{\psi}(z)f^{(k)}(\tilde{\theta}(z))\\
&=\Delta(\tilde{\psi},\tilde{\theta})
\end{aligned}$$

这就由 2)推出了 1)。

在接下来的定理中，我们找到了 $F^2(C^n)$ 空间上共轭 $\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*}$ 的清晰的表达式，此时 $\theta(z)=Az+2D$ θ 是仿射，$\psi(z)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz}$，$A,D,C_k$ 都是复常数。

定理 3.7 令 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是极大加权复合算子，其中 $\psi(z)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz}$，$\theta(z)=Az+2D$，$A,D,C_k$ 都是复常数，且 $D=\frac{1}{2}\theta(w_0)$ 是复常数，则 $\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*}=T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}$，$T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}$ 是极大广义加权算子，且 $\tilde{\theta}(z)=\bar{A}z+2\bar{D}$，$\tilde{\psi}(z)=\tilde{C}_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\tilde{D}z}$。

证明：假设 $w,z\in C^n$，$f\in Dom\left(\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}\right)^{*}\right)$，我们首先证明：$\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*}\preceq T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}$。

直接计算有：

$$\begin{aligned}T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}(z)&=\psi(z)K_{w}^{(k)}(z)(\theta(z))\\&=C_{k}\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)\left(\sum_{|\alpha|=k}w^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz+\frac{1}{2}(Az+2D)\bar{w}}\\&=C_{k}\left(\sum_{|\alpha|=k}w^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{D\bar{w}}\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)K_{\bar{A}w+2\bar{D}}(z)\\&=C_{k}\left(\sum_{|\alpha|=k}w^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{D\bar{w}}K_{\bar{A}w+2\bar{D}}^{(k)}(z)\end{aligned}$$

两边对 f 做内积，可得

$$\begin{aligned}\left\langle f,T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}(z)\right\rangle&=\left\langle f,C_{k}\left(\sum_{|\alpha|=k}w^{k}\right)\mathrm{e}^{D\bar{w}}K_{\bar{A}w+2\bar{D}}^{(k)}(z)\right\rangle\\&=\bar{C}_{k}\left(\sum_{|\alpha|=k}w^{k}\right)\mathrm{e}^{D\bar{w}}\left\langle f,K_{\bar{A}w+2\bar{D}}^{(k)}(z)\right\rangle\\&=\tilde{\psi}(\omega)f^{(k)}\left(\bar{A}w+2\bar{D}\right)\\&=T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}f(\omega)\end{aligned}$$

另一方面，通过伴随函数和核函数的定义，我们有：

$$\begin{aligned}\left\langle f,T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}(z)\right\rangle&=\left\langle\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}\right)^{*}f,K_{w}\right\rangle\\&=\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}\right)^{*}f(w)\end{aligned}$$

这表明：

$$\begin{aligned}\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_{w}\right)^{*}f(\omega)&=\tilde{\psi}(w)f^{(k)}\left(\bar{A}w+\bar{D}\right)\\&=T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}f(w)\end{aligned}$$

其中 $w,z\in C^{n}$， $f\in Dom\left(\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*}\right)$。

因此我们可以得到

$$\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*}\preceq T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}$$

为了证明反向包含，只需要证明对于每个

$$f\in Dom\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right),\quad g\in Dom\left(T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{K}\right)$$

有

$$\left\langle T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}f,g\right\rangle=\left\langle f,T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k}g\right\rangle\tag{3.6}$$

对于每个

$$f\in Dom\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right),\quad f(z)=\sum_{v\in N_{0}^{n}}f_{v}z^{v}$$

有

$$\begin{aligned}T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}f(z)&=\psi(z)f^{(k)}(\theta(z))\\&=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz}f^{(k)}(Az+2D)\\&=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)\left(\sum_{p\in N_0^N}\frac{(Dz)^p}{p!}\left(\sum_{v\geq\eta}\frac{v!}{(v-\eta)!}f_v(Az+2D)^{v-\eta}\right)\right)\\&=C_k\sum_{p\in N_0^N}\sum_{v\geq\eta}\sum_{|l|=0}^{v-\eta}\frac{v!}{(v-\eta)!}\binom{v-\eta}{l}f_vA^{v-\eta-l}(2D)^l\frac{D^p}{p!}z^{v-l+p}\end{aligned}$$

其中

$$(Az+2D)^{v-\eta}=\sum_{l=0}^{v-\eta}\binom{v-\eta}{l}A^{v-\eta-l}(2D)^l z^{v-l-\eta}$$

令

$$g\in Dom\left(T_{\tilde\psi}D_{\tilde\theta,\max}^{K}\right),\quad g(z)=\sum_{q\in N_0^n}g_qz^q\quad(g_q\text{是泰勒系数})$$

直接的计算展开有

$$\begin{aligned}T_{\tilde\psi}D_{\tilde\theta,\max}^{k}g(z)&=\tilde\psi g^{(k)}(\tilde\theta(z))\\&=\bar C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{Dz}g^{(k)}(\bar Az+2\bar D)\\&=\bar C_k\left(\sum_{|\alpha|=k}z^{\alpha}\right)\left(\sum_{r\in N_0^N}\frac{(Dz)^r}{r!}\left(\sum_{q\geq\eta}\frac{q!}{(q-\eta)!}g_q(\bar Az+2\bar D)^{q-\eta}\right)\right)\\&=\bar C_k\sum_{m\in N_0^N}\sum_{q\geq\eta}\sum_{|m|=0}^{q-\eta}\frac{q!}{(q-\eta)!}\binom{q-\eta}{m}g_qA^{q-\eta-m}(2\bar D)^m\frac{\bar D^r}{r!}z^{q-m+r}\end{aligned}$$

其中

$$(\bar Az+2\bar D)^{q-\eta}=\sum_{|m|=0}^{q-\eta}\binom{q-\eta}{m}\bar A^{q-\eta-m}(2\bar D)^m z^{q-\eta-m},\quad q\geq\eta$$

接下来，我们根据(3.6)来得到以下内容：

$$\left\langle T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}f(z),g\right\rangle=C_k\sum_{p\in N_0^N}\sum_{v\in N_k^n}\sum_{|l|=0}^{v-\eta}\frac{v!}{(v-\eta)!}\binom{v-\eta}{l}f_v\bar g_{v-l+p}A^{v-\eta-l}(2D)^l\frac{D^p}{p!}\left\|z^{v-l+p}\right\|^2 \tag{3.7}$$

$$\left\langle f,T_{\tilde\psi}D_{\tilde\theta,\max}^{k}g\right\rangle=\sum_{l\in N_0^N}\sum_{q\in N_0^n}\sum_{m=w_0}^{q-\eta}C_k\frac{q!}{(q-\eta)!}\binom{q-\eta}{m}f_{q-m+r}g_qA^{q-\eta-m}(2D)^m\frac{D^r}{r!}\left\|z^{q-m+r}\right\|^2 \tag{3.8}$$

通过改变上式的变量：$r\to l,m\to p$，可得

$$\begin{aligned}\left\langle f,T_{\tilde\psi}D_{\tilde\theta,\max}^{k}g\right\rangle&=\sum_{l\in N_0^n}\sum_{q\in N_k^n}\sum_{|p|=0}^{q-k}C_k\frac{q!}{(q-\eta)!}\binom{q-\eta}{p}f_{q-p+l}g_qA^{q-\eta-p}(2D)^p\frac{D^l}{l!}\left\|z^{q-p+l}\right\|^2\\&=\sum_{p\in N_0^n}\sum_{l\in N_0^n}\sum_{q-\eta=p}^{\infty}C_k\frac{q!}{(q-\eta)!}\binom{q-k}{p}f_{q-p+l}\bar g_qA^{q-\eta-p}(2D)^p\frac{D^l}{l!}\left\|z^{q-p+l}\right\|^2\end{aligned} \tag{3.9}$$

如果令 $v=q-p+l$，可得；

$$\sum_{q-\eta=p}^{\infty} C_k \frac{(v+p-l)!}{(v+p-l-\eta)!}\binom{v+p-l-\eta}{p} f_{q-p+l}\bar{g}_{v+p-l}A^{v-\eta-l}(2D)^p \frac{D^l}{l!}\left\|z^{q-p+l}\right\|^2$$
$$=\sum_{v-\eta=l}^{\infty} C_k \left(\frac{(v+p-l)!}{(v+p-l-k)!}\right)\binom{v+p-l-\eta}{p} f_v\bar{g}_{v+p-l}\bar{A}^{v-\eta-l}(2D)^p \frac{B^p}{l!}v!$$

等价于

$$\sum_{v-\eta=l}^{\infty} C_k \left(\frac{(v)!}{(v-\eta)!}\right)\binom{v-\eta}{l} f_v\bar{g}_{v+p-l}\bar{A}^{v-\eta-l}\frac{(2D)^l}{p!}D^p\left\|z^{v-l+p}\right\|^2 \tag{3.10}$$

由 3.9 式和 3.10 式得：

$$\left\langle f, T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{k} g\right\rangle = \sum_{p\in N_0^n}\sum_{l\in N_0^n}\sum_{v-\eta=l}^{\infty} C_k \frac{(v+p-l)!}{(v+p-l-\eta)!}\binom{v+p-l-\eta}{p} f_v\bar{g}_{v+p-l}A^{v-\eta-l}\frac{(2D)^l}{p!}D^p\left\|z^{v+p-l}\right\|^2$$
$$=\sum_{p\in N_0^n}\sum_{v=\eta}\sum_{|l|=0}^{v-\eta} C_k \frac{v!}{(v-\eta)!}\binom{v-\eta}{p} f_v\bar{g}_{v-l+q}A^{v-\eta-l}\frac{(2D)^l}{p!}D^p\left\|z^{v+p-l}\right\|^2$$
$$=\left\langle T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k} f, g\right\rangle$$

因此我们可以得到：$\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}\right)^{*} = T_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{K}$。

4. 关于算子 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}$ 的 J 自伴的主要结果

我们现在来证明关于算子 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}$ 的 J-自伴的主要结果，这结论在证明无界广义加权复合算子在 F_{α}^{2} 空间上 J-自伴中有用到。

定理 4.1 令 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是广义加权复合算子，由整函数 θ 和 ψ 生成，则下面这些结论成立。

1) $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是 J-自伴算子。

2) $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 算子是稠密的，且满足：$\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}\right)^{*} \preceq JT_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}J$。

3) ψ,θ 有这样的形式：$\psi(z)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^{\alpha}\right)e^{Dz}$，$\theta(z)=Az+2D$，其中 A,D,C_k 是复常数

证明：

1)$\Rightarrow$2)，直接由 J 的自伴性可得。

2)$\Rightarrow$3)，由定理 3.1 可得。

3)$\Rightarrow$1)，假设结论 3) 是成立的，我们在前面的命题中已经证明了 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是闭算子。

则我们可以称算子 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是密集定义的。

直接的计算有：

$$T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}K_w(z)=C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} w^{\alpha}\right)e^{D\bar{w}}K_{\bar{A}w+2\bar{D}}^{(k)}(z)$$

可以推出：

对于每个 $w\in C^n$，$K_w\in Dom\left(T_{\psi}D_{\theta}^{k}\right)$，由命题 3.2 和 3.3 可得：

$$JT_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}J = JT_{\tilde{\psi}}D_{\tilde{\theta},\max}^{K}J=\left(T_{\psi}D_{\theta,\max}^{K}\right)^{*}$$

因此我们可以得到算子 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是 J-自伴的。

定理 4.2 对于 C^n 上的两个整函数 ψ 和 θ，令 $T_{\psi}D_{\theta,\max}^{k}$ 是在 F^2 无界的广义加权复合算子，那么算子

$T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是 J-自伴的当且仅当 $T_\psi D_\theta^k = T_\psi D_{\theta,\max}^k$，且

$$\psi(z) = C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\mathrm{e}^{Dz}, \quad \theta(z) = Az + B \tag{4.1}$$

其中 A, D, C_k 是复常数。

证明：我们在定理 4.1 中已经证明了，倘若极大广义加权复合算子的算符具有(4.1)的形式，则我们说它是 J-自伴的。

反过来，如果我们假设 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是 J-自伴的，满足 $\left(T_\psi D_\theta^k\right)^* = JT_\psi D_\theta^k J$，在 $T_\psi D_\theta^k \preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 的条件下，我们有：

$$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* \preceq \left(T_\psi D_\theta^k\right)^* = JT_\psi D_\theta^k J \preceq JT_\psi D_{\theta,\max}^k J$$

因为 J 是自合的，所以我们有 $J\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* \preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k J$。

在定理 3.1 中我们可以看到，$K_\omega \in Dom\left(J\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*\right)$，其中 $w \in C^n$。因此可以得到 $J\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* K_\omega = T_\psi D_{\theta,\max}^k JK_\omega$，通过定理 3.5，我们得到了(4.1)的形式，定理 4.1 推出了算子 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是 J-自伴的。更多的，

$$JT_\psi D_\theta^k J \preceq JT_\psi D_{\theta,\max}^k J = \left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* \preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k = JT_\psi D_\theta^k J$$

因此，$T_\psi D_\theta^k = T_\psi D_{\theta,\max}^k$。

5. Hermiticity

本节主要讨论了算子 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 的算符的结构使得 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 在 n 维 Fock 空间上具有厄米特性。

定理 5.1 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是由整函数 ψ 和 θ 生成的极大广义加权算子，如果算子对于每个 $w \in C^n$，都满足：$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* K_\omega = T_\psi D_{\theta,\max}^k K_\omega$，则 $\psi(z) = C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\bar{D}z}$，$\theta(z) = Az + 2D$，其中 A, D, C_k 是实常数。

证明：假设对所有的 $w, z \in C^n$，有

$$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^* K_w(z) = T_\psi D_{\theta,\max}^k K_w(z) \tag{5.1}$$

可以推出：

$$\psi(z)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}(\bar{w})^\alpha\right)\mathrm{e}^{\bar{w}\theta(z)} = \overline{\psi(w)}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{|\alpha|=k}(z)^\alpha\right)^k \mathrm{e}^{\overline{\theta(w)}z} \tag{5.2}$$

当 $k=0$ 时，前人在[8]中已经得到了证明，接下来我们主要证明 $k \in N$ 的情况。对(5.2)式对 z 做 k 次微分，并令 $z_0 = (0,\cdots,0)$，我们可得：

$$\psi(w) = \frac{\overline{\psi^{(k)}(z_0)}}{\sum_{|\alpha|=k}\alpha!}\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}w\overline{\theta(z_0)}} \tag{5.3}$$

再一次对 4.3 式关于对 w 得 k 次微分，并令 $w_0 = (0,\cdots,0)$，可得：$\psi^{(k)}(w_0) = \overline{\psi^{(k)}(w_0)}$，$k \in N$。

因此，$\psi(z) = C_k\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\mathrm{e}^{\bar{D}z}$，其中 $B = \theta(0)$，$C^k = \dfrac{\psi^{(k)}(w_0)}{\sum_{|\alpha|=k}\alpha!}$，$k \in N$，用这个表达式代替(4.2)中的

ψ，我们可得，$\left(\overline{\theta(w)}-2\bar{D}\right)z=\left(\theta(z)-2\bar{D}\right)\bar{w}$，$z,w\in C^n$，因此，$\dfrac{\theta(z)-2D}{z}=A$，其中 $A,C^k\in R$，可以得到，$\theta(z)=Az+2D$。

定理 5.2

令 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是由整函数 ψ 和 θ 生成的极大广义加权复合算子，则以下结论成立：

1) $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是厄米特算子。

2) $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是稠密定义的算子，且满足：$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*\preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k$。

3) 符号 ψ 和 θ 的形式为，$\psi(z)=C_k\left(\sum\limits_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)e^{\bar{D}z}$，$\theta(z)=Az+2D$，其中 $D\in C$，且 A,C_k 都是实数。

证明：由定理 4.1 我们可以得到 1)$\Rightarrow$2)和 2)$\Rightarrow$3)，接下来证明 3)$\Rightarrow$1)，若 3)成立，且由前面结果可得，$T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是闭算子，并且是稠密定义的，则根据 3.3 我们可知，$T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是厄米特算子。

定理 5.3 设 $\psi:C^n\to C$，$\theta:C^n\to C$ 的两个整函数，极大广义加权复合算子 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是厄米特算子当且仅当 $T_\psi D_{\theta,\max}^k=T_\psi D_\theta^k$，并且 $\psi(z)=C_k\left(\sum\limits_{|\alpha|=k}z^\alpha\right)e^{\bar{D}z}$，$\theta(z)=Az+2D$，其中 $D\in C$，且 A,C_k 都是实数。

证明：由定理 5.2 可以很容易证出问题的充分性，反之，如果解设 $T_\psi D_\theta^k$ 是厄米特算子，由于 $T_\psi D_\theta^k\preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k$，我们可以得到，$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*\preceq\left(T_\psi D_\theta^k\right)^*=T_\psi D_\theta^k\preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k$，因此，$\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*K_w(z)=T_\psi D_{\theta,\max}^kK_w(z)$，$w,z\in C^n$，定理 5.1 给出了算符是(5.4)的形式，我们有 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是厄米特算子。因为 $T_\psi D_\theta^k\preceq T_\psi D_{\theta,\max}^k\preceq\left(T_\psi D_{\theta,\max}^k\right)^*\preceq\left(T_\psi D_\theta^k\right)^*=T_\psi D_\theta^k$，我们可以得到，$T_\psi D_{\theta,\max}^k=T_\psi D_\theta^k$。因此定理的结论都是成立的。

下面的推论断言了一个非常有趣的事实，即一类复对称型的广义加权复合算子包含适当的厄米特广义加权复合算子。如果在定理 4.2 中令 $a=\dfrac{\bar{D}}{D}$，这就能很容易得到这个结论。

推论 5.4 如果无界的广义加权复合算子 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是厄米特算子，其中 ψ 和 θ 是 C^n 上的整函数，则 $T_\psi D_{\theta,\max}^k$ 是 J-自伴的。

基金项目

国家自然科学基金(11671152)。

参考文献

[1] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2006) Complex Symmetric Operators and Applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 1285-1315. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-05-03742-6

[2] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2007) Complex Symmetric Operators and Applications. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 3913-3931. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04213-4

[3] Garcia, S.R. and Wogen, W.R. (2010) Some New Classes of Complex Symmetric Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **362**, 6065-6077. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05068-8

[4] Garcia, S.R. and Hammond, C. (2014) Which Weighted Composition Operators Are Complex Symmetric? In: *Concrete Operators, Spectral Theory, Operators in Harmonic Analysis and Approximation*, Vol. 236, Birkhäuser/Springer, Basel, 171-179. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0648-0_10

[5] Jung, S., Kim, Y., Ko, E. and Lee, J.E. (2014) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on H2(D). *Journal of Functional Analysis*, **267**, 323-351. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.04.004

[6] Lim, R. and Khoi, L.H. (2018) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on Hγ(D). *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **464**, 101-118. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.071

[7] Narayan, S.K., Sievewright, D. and Thompson, D. (2016) Complex Symmetric Composition Operators on H2. *Journal*

of Mathematical Analysis and Applications, **443**, 625-630. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.05.046

[8] Hai, P.V. and Khoi, L.H. (2016) Complex Symmetry of Weighted Composition Operators on the Fock Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **433**, 1757-1771. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.08.069

[9] Fatehi, M. (2019) Weighted Composition Operators on the Fock Space. *Operators and Matrices*, **13**, 461-469. https://doi.org/10.7153/oam-2019-13-34

[10] Hai, P.V. and Khoi, L.H. (2018) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on the Fock Space in Several Variables. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **63**, 391-405. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1315108

[11] Hai, P.V. (2019) Unbounded Weighted Composition Operators on Fock Space. *Potential Analysis*.

[12] Hai, P.V. and Putinar, M. (2018) Complex Symmetric Diffferential Operators on Fock Space. *Journal of Differential Equations*, **265**, 4213-4250. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.003

[13] Zhu, K. (2012) Analysis on Fock Spaces. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8801-0