Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1546-1558
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118173

Hans汉斯

一类带记忆和非经典耗散项的发展方程的适定性

刘西盟*，刘 迪，张江卫

长沙理工大学, 数学与统计学院, 湖南 长沙
Email: *liuxm0626@163.com

收稿日期：2021年7月15日；录用日期：2021年8月18日；发布日期：2021年8月25日

摘 要

本文主要讨论带非经典耗散的记忆型发展方程的适定性问题，我们运用非经典的 *Galerkin* 方法及分析技巧得到了弱解的存在性，同时证明了解的唯一性和对初值的连续依赖性。

关键词

发展方程，记忆项，非经典耗散，适定性

The Well-Posedness of a Memory-Type Evolution Equation with Nonclassical Dissipation

Ximeng Liu*, Di Liu, Jiangwei Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: *liuxm0626@163.com

Received: Jul. 15th, 2021; accepted: Aug. 18th, 2021; published: Aug. 25th, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 刘西盟, 刘迪, 张江卫. 一类带记忆和非经典耗散项的发展方程的适定性[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1546-1558. DOI: 10.12677/pm.2021.118173

Abstract

In this paper, we mainly discuss the well-posedness problem of a Memory-type Evolution Equation with nonclassical dissipation. The existence of weak solution is obtained by using the Galerkin's method and analytical techniques. Also, we prove the uniqueness of the solution and the continuous dependence on initial value.

Keywords

Evolution Equation, Memory, Nonclassical Dissipation, Well-Posedness

1. 引言

我们考虑如下带有非经典耗散项和记忆项的发展方程的适定性问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - M(|\nabla u|_2^2)\Delta u - K_0\Delta u + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mu(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) + f(u) = g(x), \\ u(x,t)|_{\partial\Omega\times R^+} = 0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset R^N (N \geq 3)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; $M(r) = a + br$ ($r = |\cdot|_2$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数), 且 $a, b > 0$; 此外, $h(u_t) = \alpha u_t^3 - \beta u_t$ 为非经典耗散项, $g \in L^2(\Omega)$. 为研究上述问题, 我们引入记忆变量, 定义如下:

$$\eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s),\ (x,s) \in \Omega \times R^+, t \geq 0. \tag{2}$$

当 $t = 0$ 时, 我们有

$$\eta^0(x,s) = u_0(x,0) - u_0(x,-s),\ \ (x,s) \in \Omega \times R^+. \tag{3}$$

特别地, 假设

$$K_0 = \int_0^{+\infty} \mu(s)ds, \tag{4}$$

则方程 (1) 变为:

$$\begin{cases} u_{tt}-M(|\nabla u|_2^2)\Delta u-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\eta^t(s)ds+h(u_t)+f(u)=g(x), \\ \eta_t^t=-\eta_s^t+u_t, \end{cases} \tag{5}$$

带有初边值条件:

$$\begin{cases} u(x,t)|_{\partial\Omega\times R^+}=0, \eta^t(x,s)|_{\partial\Omega\times R^+}=0, \\ u(x,t)|_{t=0}=u_0(x), u_t(x,t)|_{t=0}=u_1(x), \eta^t(x,t)|_{t=0}=\eta_0(x), \qquad x\in\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

(H_1) 关于非线性项 f 的假设: $f:R\to R$,

$$|f(u)-f(v)|\le C_0\left(1+|u|^p+|v|^p\right)|u-v|,\ \ \forall u,v\in R. \tag{7}$$

其中 $C_0>0$ 为常数, $0<p\le\frac{4}{N-2}$. 此外, 假设

$$f(u)u\ge\widehat{f}(u)\ge 0,\ \forall u\in R. \tag{8}$$

这里 $\widehat{f}(u)=\int_0^u f(s)ds$.

(H_2) 关于记忆核函数的假设:

1) $\mu(s)\in C^1(R)\cap L^1(R)$, $\forall s\in R^+$, $\mu(s)\ge 0$, $\mu'(s)\le 0$;

2) 存在常数 K_0, $\delta>0$, 使得对 $\forall s\in R^+$, $\mu(s)$ 满足 (4) 式和 $\mu'(s)+\delta\mu(s)\le 0$.

由 2) 可知, $0\le\mu(s)\le\mu(0)\mathrm{e}^{-\delta s}$ $(\mu(0)\ne\infty)$, 故而 $\lim\limits_{s\to\infty}\mu(s)=0$.

众所周知, 在方程 (1) 中, 当 $h(u_t)=0$ 时, 其主要被用于描述自然界中的各种波动现象(包括物体的运动情况和物理规律等). 近年来, 对类似于 (1) 的方程, 已被大多数学者所考虑(见 [1–5] 及其参考文献). 2012 年, 在 [6]中, Lazo 考虑了拟线性方程 $u_{tt}-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u+\int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau=0$, 其用Faedo-Galerkin方法得到了相关的混合问题存在一个弱全局解.

2013 年, 在 [4]中, Zhang等人研究了一个具有非线性局部阻尼和速度相关材料密度的非线性粘弹性方程:

$$|u_t|^\rho u_{tt}-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u+\alpha\Delta^2u-\beta\Delta u_{tt}-\gamma\Delta u_t+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds+a(x)u_t|u_t|^k+bu|u|^r=0,$$

他们主要利用Faedo-Galerkin方法得到弱解的全局存在性.

2018 年, 在 [5]中, Nadia等人考虑了一类具有时变延迟的非线性粘弹性方程, 并利用能量法得到解的全局存在性. 2020 年, 在 [1]中, 张等人研究了如下具有记忆项的拟线性波动方程:

$$|u_t|^\rho u_{tt}-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u-K_0\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_{-\infty}^t\mu(t-s)\Delta u(s)ds-\alpha\Delta u_t+f(u)=h,$$

她们证明了整体弱解的存在唯一性和整体吸引子的存在性. 同年, 在 [2]中, Li等人考虑了在局部摩擦阻尼作用下的粘弹性波动方程, 并研究了解的长时间动力学行为.

综上所述, 人们主要考虑带有经典耗散项(强耗散$-\Delta u_t$ 或弱耗散u_t)的波动型方程. 而方程(1)带有非经典耗散项($h(u_t) = \alpha u_t^3 - \beta u_t$), 且此类方程主要出现在柔性结构的系统中, 如各种大型器械设备(如航天飞行器、大型船舶、大型自动化机械臂、悬索桥以及动载螺旋弹簧等). 1993 年, 在 [7]中, Wang等人已经考虑了带有类似阻尼项的波动方程:

$$\omega_{tt} - c_0^2\omega_{xx} = f(\omega_t),$$

其中 $f(\omega_t) = \omega_t - \omega_t^3$. 类似的研究亦见文献 [8]. 特别地, 具有柔性结构的大型器械从本质上来说仍然是连续系统, 且具有无穷维自由度. 因此, 研究带有不定型阻尼的非经典耗散系统整体解的存在性, 是具有实际意义的.

本文将主要使用非经典的Faedo-Galerkin方法结合先验估计方法, 证明解的存在唯一性和其对初值的连续依赖性.

2. 预备知识

为方便起见, 遍及全文, 用 C, C_T 表示任意的正常数, 其在不同行甚至同一行都可不相同, 且 C_T 表示该常数依赖于 T. 令 $|\cdot|$ 表示绝对值或Lebesgue测度, $|\cdot|_p$ 为 $L^p(\Omega)\,(p \geq 2)$ 的范数, $|\nabla\cdot|_2$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数.

空间定义:

$$\mathcal{M} = L_\mu^2\left(R^+; H_0^1(\Omega)\right) = \left\{\xi : R^+ \to H_0^1(\Omega) \,\middle|\, \int_0^\infty |\nabla\xi(s)|_2^2\,\mathrm{d}s < \infty\right\}. \tag{1}$$

并赋以内积和范数

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \mu(s)\langle \nabla\xi, \nabla\zeta \rangle ds,$$

$$\|\xi\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty \mu(s)|\nabla\xi|_2^2\,\mathrm{d}s.$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(\Omega)$ 上的内积.

本文所研究方程的相空间为:

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M},$$

其被赋以如下范数:

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}}^2 = |\nabla u(t)|_2^2 + |u_t(t)|_2^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2. \tag{2}$$

3. 适定性

定义 3.1 (弱解的定义) 假设条件 (H_1)-(H_2) 成立, $z(t)=(u(t),u_t(t),\eta^t)$ 是方程 (1) 的整体弱解, 且初值 $z(0)=z_0=(u_0,u_1,\eta_0)\in\mathcal{H}$. 则对 $\forall t\in[0,T]$, 若 $z(t)$ 满足方程 (1) 并且

$$
\begin{aligned}
&u\in L^2([0,T];H_0^1(\Omega)),\\
&u_t\in L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\cap L^4([0,T];L^4(\Omega)),\\
&\eta^t\in L^2([0,T];\mathcal{M}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

另外, 对任意的 $\omega\in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi\in\mathcal{M}$ 有:

$$
\begin{cases}
\langle u_{tt}-M(|\nabla u|_2^2)\Delta u-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s+\alpha u_t^3-\beta u_t+f(u)-g(x),\omega\rangle=0\\
\langle\eta_t^t,\xi\rangle_{\mathcal{M}}=\langle-\eta_s^t,\xi\rangle_{\mathcal{M}}+\langle u_t,\xi\rangle_{\mathcal{M}}.
\end{cases}
\tag{4}
$$

对于 $t\in R$ 几乎处处成立.

3.1. 解的存在性

首先, 选取序列 $\{\psi_i\}$ 为下述的Direchlet问题

$$-\Delta\psi_j=\lambda_j\psi_j,$$

$$\psi_j|_{\partial\Omega}=0.$$

相应于特征值 λ_j 的特征函数. 则在 $\partial\Omega$ 光滑的条件下有 $\{\psi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 为空间 $H_0^1(\Omega)$ 的一组正交基, 且$\psi_j\in C_0^\infty(\Omega)$. 接下来通过定义空间 $L_\mu^2(R^+)$ 中的一组标准正交基 $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$, 我们可以得到 $\{\vartheta_j\}_{j=1}^{+\infty}=\{l_k\psi_j\}_{k,j=1}^{+\infty}$ 构成 $L_\mu^2(R^+;H_0^1(\Omega))$ 上的一组基.

故而方程 (1) 存在如下的近似解:

$$u_m(x,t)=\sum_{j=1}^m\varphi_j(t)\psi_j(x),$$

$$u_{mt}(x,t)=\partial_t u_m(x,t)=\sum_{j=1}^m\partial_t\varphi_j(t)\psi_j(x),$$

$$\eta_m^t(x,t)=\sum_{j=1}^m\kappa_j(t)\vartheta_j(x).$$

其中 $\varphi_j(t)=\langle u,\psi_j\rangle$, $\kappa_j=\langle\eta^t,\vartheta_j\rangle_{\mathcal{M}}$, 且 $z_m=(u_m,u_{mt},\eta_m^t)$ 满足

$$\begin{cases} u_{mtt}-M(|\nabla u_m|_2^2)\Delta u_m-\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta_m^t(s)\mathrm{d}s+\alpha u_{mt}^3-\beta u_{mt}+f(u_m)=g_m(x),\\ \eta_{mt}^t=-\eta_{ms}^t+u_{mt},\\ (u_m,\eta_m^t)|_{\partial\Omega\times R^+}=(0,0),\\ u_m(0)=\displaystyle\sum_{j=1}^m\psi_j(x)\xi_j, u_{mt}(0)=\sum_{j=1}^m\varsigma_j\psi_j, \eta_m^t(0)=\sum_{j=1}^m\eta_j\vartheta_j. \end{cases} \tag{5}$$

特别地, 当 $m\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m(u_0,\psi_j)\psi_j(x)&=\sum_{j=1}^m\xi_j\psi_j(x)\to u_0\in H_0^1(\Omega),\\ \sum_{j=1}^m(u_1,\psi_j)\psi_j(x)&=\sum_{j=1}^m\varsigma_j\psi_j(x)\to u_1\in L^2(\Omega),\\ \sum_{j=1}^m\langle\eta^0,\vartheta_j\rangle_{\mathcal{M}}\vartheta_j(x)&=\sum_{j=1}^m\eta_j\vartheta_j(x)\to\eta_0\in\mathcal{M}. \end{aligned}$$

因为 $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{+\infty}$ 是在上述空间中稠密性, 可知上述收敛是成立的.

引理 3.2 假设条件 (H_1)-(H_2) 成立, 则存在常数 $C_T>0$, 使得 (5) 式的解 $z_m(t)=(u_m(t),u_{mt}(t),\eta_m^t)$, 满足

$$|u_{mt}|_2^2+|\nabla u_m|_2^2+\left\|\eta_m^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\int_0^t\|\eta_m^s\|_{\mathcal{M}}^2\,ds+\int_0^t|u_{mt}(s)|_4^4ds\le C_T. \tag{6}$$

证明: 用 u_{mt} 乘以 (5) 式, 并在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{mt}|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{|\nabla u_m|_2^2}M(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\eta_m^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\left(\eta_m^t,\eta_{ms}^t\right)_{\mathcal{M}}\\ &\quad+\alpha\,|u_{mt}|_4^4-\beta|u_{mt}|_2^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\widehat{f}(u_m)\mathrm{d}x-\int_\Omega g_m(x)u_{mt}\,\mathrm{d}x=0. \end{aligned} \tag{7}$$

令

$$E(t)=|u_{mt}|_2^2+\int_0^{|\nabla u_m|_2^2}M(s)\mathrm{d}s+\left\|\eta_m^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+2\int_\Omega\widehat{f}(u_m)\mathrm{d}x-2\int_\Omega g_m(x)u_m\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

所以 (7) 式可化为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\alpha\,|u_{mt}|_4^4-\beta|u_{mt}|_2^2+\left(\eta_m^t,\eta_{ms}^t\right)_{\mathcal{M}}=0. \tag{9}$$

因为

$$\beta|u_{mt}|_2^2=\beta\int_\Omega|u_{mt}|^2\le\beta(\int_\Omega|u_{mt}|^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_\Omega 1)^{\frac{1}{2}}\le\beta(|u_{mt}|_4^2)\cdot|\Omega|^{\frac{1}{2}}\le\frac{\alpha}{2}\,|u_{mt}|_4^4+\frac{\beta^2}{2\alpha}|\Omega|. \tag{10}$$

由假设条件 (H_2) 可知:

$$\begin{aligned}\left(\eta_m^t,\eta_{ms}^t\right)_{\mathcal{M}}&=\int_0^\infty\mu(s)\int_\Omega\nabla\eta_m^t(x,s)\nabla\eta_{ms}^t(x,s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{d}{\mathrm{d}s}\left\|\nabla\eta_m^t(x,s)\right\|^2\,\mathrm{d}s\\&=0-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\left\|\nabla\eta_m^t(x,s)\right\|^2ds\geq\frac{\delta}{2}\|\eta_m^t\|_{\mathcal{M}}^2.\end{aligned}\tag{11}$$

再由 $M(r)$ 的假设以及条件 (H_1) 可知:

$$\int_0^{|\nabla u_m|_2^2}M(s)\mathrm{d}s\geq a|\nabla u_m|_2^2,\tag{12}$$

$$\int_\Omega\widehat{f}(u_m)\mathrm{d}x\geq 0,\tag{13}$$

然后, 利用Young不等式和Poincáre不等式, 有

$$\int_\Omega g_m(x)u_m\,\mathrm{d}x\leq\frac{\varepsilon}{\lambda_1}|\nabla u_m|_2^2+\frac{1}{4\varepsilon}|g_m|_2^2.\tag{14}$$

其中 λ_1 是算子 $-\Delta$ 的第一特征值.

对 (9) 式关于 t 在 $[0,T]$ 上积分, 并结合 (10)-(14), 可得:

$$\begin{aligned}&|u_{mt}|_2^2+\left(M_0-\frac{2\varepsilon}{\lambda_1}\right)|\nabla u_m|_2^2+\left\|\eta_m^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\delta\int_0^t\|\eta_m^s\|_{\mathcal{M}}^2\,ds+\alpha\int_0^t|u_{mt}(s)|_4^4ds\\&\qquad\leq\frac{\beta^2}{\alpha}|\Omega|+|u_{m1}|_2^2+\left(M_0-\frac{2\varepsilon}{\lambda_1}\right)|\nabla u_{m0}|_2^2+\|\eta_{m0}\|_{\mathcal{M}}^2.\end{aligned}\tag{15}$$

当 ε 足够小时, 令 $\lambda=min\{1,M_0-\frac{2\varepsilon}{\lambda_1},\delta,\alpha\}>0$, 则存在常数 $C_T>0$ 可使得下式成立:

$$|u_{mt}|_2^2+|\nabla u_m|_2^2+\left\|\eta_m^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\int_0^t\|\eta_m^s\|_{\mathcal{M}}^2\,ds+\int_0^t|u_{mt}(s)|_4^4ds\leq C_T.\tag{16}$$

证毕!

定理 3.3 *假设条件 (H_1)-(H_2) 成立, 且 $z_0=(u_0,u_1,\eta_0)\in\mathcal{H}$. 则方程存在整体弱解 $z=(u,u_t,\eta^t)$ 满足 $u\in L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$, $u_t\in L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\cap L^4([0,T];L^4(\Omega))$ 和 $\eta^t\in L^2([0,T];L_\mu^2(R^+;H_0^1(\Omega)))$.*

证明: 由引理 3.2, 可知

$$\begin{cases}u_m\text{ 在 }L^2([0,T];H_0^1(\Omega))\text{ 中一致有界},\\ u_{mt}\text{ 在 }L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\cap L^4([0,T];L^4(\Omega))\text{ 中一致有界},\\ \eta_m^t\text{ 在 }L^2([0,T];L_\mu^2(R^+;H_0^1(\Omega)))\text{ 中一致有界}.\end{cases}\tag{17}$$

因此, 存在$\{u_m\}$的子列(仍记为$\{u_m\}$), 使得

$$\begin{cases} u_m \to u \text{ 在 } L^2([0,T];H_0^1(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \\ u_{mt} \to u_t \text{ 在 } L^4([0,T];L^4(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \\ u_{mt} \to u_t \text{ 在 } L^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \text{ 中弱*收敛}, \\ \eta_m^t \rightharpoonup \eta^t \text{ 在 } L^2([0,T];L_\mu^2(R^+;H_0^1(\Omega))) \text{ 中弱收敛}. \end{cases} \tag{18}$$

由于 $u_m(t)$ 在 $L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ 中一致有界, $u_{mt}(t)$ 在 $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\cap L^4([0,T];L^4(\Omega))\subset L^2([0,T];L^2(\Omega))$ 中一致有界, 可知 $u_m(t)$ 为 $H^1(Q_T)$ 中的有界集. 又 $H^1(Q_T)$ 紧嵌入 $L^2(Q_T)$, 则存在 $\{u_m(t)\}$ 的子列(仍记为 $\{u_m\}$), 满足

$$u_m \rightharpoonup u \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中强收敛}.$$

又由 (H_1) 和引理 3.2 可得

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |f(u_m)|^q dxdt &\le C_0 \int_0^T (1+|u_m(t)|_p^p)dt \\ &\le C\int_0^T (1+|u_m(t)|_{2p+2}^p)dt \\ &\le C\int_0^T (1+|\nabla u_m(t)|_2^p)dt \\ &\le \rho_0. \end{aligned}$$

其中 q 为 p 的对偶数, $\rho_0>0$ 为常数.

则依据上述 $f(u_m)$ 的一致有界性, 可得

$$f(u_m) \rightharpoonup \chi \text{ 在 } L^q([0,T];\Omega) \text{ 中弱收敛}.$$

此外, 依据 u_m 的在 $L^2(Q_T)$ 中的强收敛性, 可知 $u_m \to u$ $(m\to\infty)$ 在 Q_T 上几乎处处收敛. 再由 f 的连续性, 可得

$$f(u_m(x,t)) \rightharpoonup f(u(x,t)) \text{ 在 } Q_T \text{ 上几乎处处收敛}.$$

又 $L^q(Q_T)\subset H^{-1}(Q_T)$, 则由Lebesgue逐项积分定理可知, 存在 $\phi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega f(u_m)\phi dxdt = \int_0^T\int_\Omega f(u)\phi dxdt.$$

故可得 $f(u_m)\to f(u)$ 在 $H^{-1}(Q_T)$ 中弱收敛, 由弱极限的唯一性, 得: $\chi = f(u)$.

取 $\phi\in C_0^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, 有

$$\int_0^t \langle u_{mtt},\phi\rangle d\tau = \int_0^t \langle M(|\nabla u_m|_2^2)\Delta u_m + \int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\eta_m^t(s)\mathrm{d}s - h(u_{mt}) - f(u_m) + g_m, \phi\rangle d\tau. \tag{19}$$

依次估计上式右边的每一项, 并结合Young不等式, Hölder不等式, 和引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle M(|\nabla u_m|_2^2)\Delta u_m, \phi\rangle d\tau &\le \int_0^t M(|\nabla u_m|_2^2)|\nabla u_m|_2|\nabla\phi|_2 d\tau \\ &\le C_T\|\nabla\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^{+\infty}\mu(s)\langle\Delta\eta_m^t(s),\phi\rangle ds d\tau &\le \int_0^t\int_0^{+\infty}\mu(s)|\nabla\eta_m^t(s)|_2|\nabla\phi|_2 ds d\tau \\ &\le K_0^{\frac{1}{2}}\int_0^t|\nabla\phi|_2\|\eta_m^t\|_{\mathcal{M}}d\tau \\ &\le C_T\|\nabla\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\langle-\alpha u_{mt}^3,\phi\rangle d\tau \le \alpha\int_0^t|u_{mt}|_4^3|\phi|_4 d\tau &\le C_T\|\nabla\phi\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \\ &\le C_T\|\nabla\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{22}$$

$$\int_0^t\langle\beta u_{mt},\phi\rangle d\tau \le \beta\int_0^t|u_{mt}|_2|\phi|_2 d\tau \le C_T\|\nabla\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{23}$$

$$\int_0^t\langle f(u_m),\phi\rangle d\tau \le \int_0^t\|f(u_m)\|_{H^{-1}}\|\phi\|_0 d\tau \le C_T\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{24}$$

$$\int_0^t\langle g_m,\phi\rangle d\tau \le \int_0^t|g_m|_2|\phi|_2 d\tau \le C_T\|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{25}$$

所以结合 (20)-(25), 可得

$$\int_0^t\langle u_{mtt},\phi\rangle d\tau \le C_T(\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}).$$

则

$$u_{mtt}\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{26}$$

依据 (17) 式和 (26) 可知

$$u_{mt}\to u_t \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中强收敛.} \tag{27}$$

故 $u_{mt} \to u_t$ 在 Q_T 中几乎处处收敛. 于是 $u_{mt}^3 \to u_t^3$ 在 Q_T 中几乎处处成立. 又 $u_{mt}^3 \to \chi_1$在 $L^{\frac{4}{3}}(Q_T)$ 中弱收敛. 由弱极限的唯一性知: $u_t^3 = \chi_1$.

另外, 由于 $g_m(x) \in L^2(\Omega)$, 对于一切的 $x \in \Omega$, 有 $g_m \to g$ $(m \to \infty)$ 是弱收敛的, 且 $g(x) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

综上所述, 当 $m \to \infty$ 时, 对任意的 $\omega \in H_0^1(\Omega)$, $\xi \in \mathcal{M}$, 有:

$$\begin{cases} \langle u_{tt}, \omega\rangle - \langle M(|\nabla u|_2^2)\nabla u, \nabla\omega\rangle - \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\langle\nabla\eta^t(s), \nabla\omega\rangle \mathrm{d}s + \alpha\langle u_t^3, \omega\rangle - \beta\langle u_t, \omega\rangle \\ + \langle f(u), \omega\rangle = \langle g(x), \omega\rangle. \\ \langle \eta_t^t, \xi\rangle_{\mathcal{M}} = \langle -\eta_s^t, \xi\rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t, \xi\rangle_{\mathcal{M}}. \end{cases}$$

接下来分别验证方程的解 $z = (u, u_t, \eta^t)$ 满足初始条件:

由 $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 和 $u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, 所以有 $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$. 则 $u_m(0) \rightharpoonup u(0)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛, 又由 $u_m(0) \rightharpoonup u_0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中, 故 $u(0) = u_0$ 在 $L^2(\Omega)$ 成立.

取 $\nu(t) \in C^1[0,T]$, 且 $\nu(T) = 0$. 则在 (5) 式两端同乘以 $\nu(t)$ 并关于 t 在 $[0,T]$ 上积分, 有:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle u_{mtt}, \nu(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(|\nabla u_m|_2^2)\Delta u_m), \nu\rangle dt - \int_0^T \langle \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta_m^t(s)ds, \nu(t)\rangle dt \\ &+\alpha\int_0^T \langle u_{mt}^3, \nu(t)\rangle dt - \beta\int_0^T \langle u_{mt}, \nu(t)\rangle dt + \int_0^T \langle f(u_m), \nu(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g_m, \nu(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

化简可得:

$$\begin{aligned} -\langle u_{mt}(0), \nu(0)\rangle - \int_0^T \langle u_{mt}, \nu(t)\rangle dt + \int_0^T M(|\nabla u_m|_2^2)\langle\nabla u_m, \nabla\nu(t)\rangle dt \\ + \int_0^T \int_0^{+\infty} \mu(s)\langle\nabla\eta_m^t(s), \nabla\nu(t)\rangle dsdt + \alpha\int_0^T \langle u_{mt}^3, \nu(t)\rangle dt \\ -\beta\int_0^T \langle u_{mt}, \nu(t)\rangle dt + \int_0^T \langle f(u_m), \nu(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g_m, \nu(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

当 $m \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} -\langle u_1, \nu(0)\rangle - \int_0^T \langle u_t, \nu(t)\rangle dt + \int_0^T M(|\nabla u|_2^2)\langle\nabla u, \nabla\nu(t)\rangle dt \\ + \int_0^T \int_0^{+\infty} \mu(s)\langle\nabla\eta^t(s), \nabla\nu(t)\rangle dsdt + \alpha\int_0^T \langle u_t^3, \nu(t)\rangle dt \\ -\beta\int_0^T \langle u_t, \nu(t)\rangle dt + \int_0^T \langle f(u), \nu(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g, \nu(t)\rangle dt. \end{aligned} \tag{28}$$

又用 $\nu(t)$ 作用 (5) 式并关于 t 在 $[0,T]$ 上积分, 化简可得:

$$\begin{aligned}&-\langle u_t(0),\nu(0)\rangle-\int_0^T\langle u_t,\nu(t)\rangle dt+\int_0^T M(|\nabla u|_2^2)\langle\nabla u,\nabla\nu(t)\rangle dt\\&+\int_0^T\int_0^{+\infty}\mu(s)\langle\nabla\eta^t(s),\nabla\nu(t)\rangle dsdt+\alpha\int_0^T\langle u_t^3,\nu(t)\rangle dt\\&-\beta\int_0^T\langle u_t,\nu(t)\rangle dt+\int_0^T\langle f(u),\nu(t)\rangle dt=\int_0^T\langle g,\nu(t)\rangle dt.\end{aligned}\tag{29}$$

对比 (28) 式和 (29) 式, 有

$$\langle u_1,\nu(0)\rangle=\langle u_t(0),\nu(0)\rangle,$$

所以 $\langle(u_1-u_t(0)),\nu(0)\rangle=0$, 故而 $u_t(0)=u_1$.

类似上述初值的验证, 可取 $\theta(t)\in C^1(0,T;L^2_\mu(R^+;\mathcal{M})$ $(\theta(T)=0)$, 并在空间 $L^2_\mu(0,T;L^2(\Omega))$ 上分别作用 (5) 和 (5) 的第二式, 经过计算和比较, 可得

$$\int_0^{+\infty}\mu(s)\langle\eta^t(0)-\eta_0,\theta(0)\rangle ds=0,$$

即 $\langle\eta^t(0)-\eta_0,\theta(0)\rangle=0$, 故 $\eta^t|_{t=0}=\eta_0$. 证毕!

3.2. 唯一性和连续性

定理 3.4 假设条件 (H_1)-(H_2) 成立, 则问题 (5)-(6) 的解是唯一的且其连续依赖于初值.

证明: 令 $\omega^1=(u,u_t,\eta^t)\in\mathcal{H}$ 和 $\omega^2=(v,v_t,\xi^t)\in\mathcal{H}$ 是方程 (5) 分别对应于初值 $\omega^1(0)=\omega_0^1=(u_0,u_1,\eta_0)\in\mathcal{H}$ 和 $\omega^2(0)=\omega_0^2=(v_0,v_1,\xi_0)\in\mathcal{H}$ 的两个解, 且设 $\omega=\omega^1-\omega^2=(u-v,u_t-v_t,\eta^t-\xi^t)$, 其初始值为 $\omega_0=(u_0-v_0,u_1-v_1,\eta_0-\xi_0)$, 则 ω 满足方程:

$$\begin{cases}\omega_{tt}-a\Delta\omega-\displaystyle\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\zeta^t(s)\mathrm{d}s+\alpha u_t^3-\alpha v_t^3-\beta\omega_t+f(u)-f(v)=b(|\nabla u|_2^2-|\nabla v|_2^2),\\ \zeta_t^t=-\zeta_s^t+\omega_t,\end{cases}\tag{30}$$

由 $M(r)=a+br$ 可知 $M(|\nabla u|_2^2)=a+b|\nabla u|_2^2$. 进而用 ω_t 与方程 (30) 在 $L^2(\Omega)$ 上内积, 再由 (11) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\omega_t|_2^2+\frac{a}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\omega|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\zeta^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\frac{\delta}{2}\left\|\zeta^t\right\|_{\mathcal{M}}^2+\alpha((|u_t|^3-|v_t|^3),\omega_t)\\&\qquad\le\beta|\omega_t|_2^2+(f(v)-f(u),\omega_t)+b(|\nabla u|_2^2-|\nabla v|_2^2,\omega_t).\end{aligned}\tag{31}$$

下面对 (31) 不等式的右边第二项进行处理, 显然 $\frac{p}{2(p+1)}+\frac{1}{2(p+1)}+\frac{p+1}{2(p+1)}=1$ 成立, 再根据嵌入

定理和Young不等式, 则有:

$$
\begin{aligned}
(|f(v)-f(u)|,\omega_t) &\leq C\int_\Omega (1+|u|^p+|v|^p)\,|\omega||\omega_t|dx \\
&\leq C[1+|u|^p_{2(p+1)}+|v|^p_{2(p+1)}]\cdot|\omega|_{2(p+1)}\cdot|\omega_t|_2 \\
&\leq C[1+|\nabla u|^p_2+|\nabla v|^p_{2)}]\cdot|\nabla\omega|_2\cdot|\omega_t|_2 \\
&\leq C[|\nabla\omega|^2_2+|\omega_t|^2_2+\left\|\zeta^t\right\|^2_{\mathcal{M}}],
\end{aligned}
\tag{32}
$$

下面对 (31) 不等式的右边第三项进行处理, 有:

$$
\begin{aligned}
(|\nabla u|^2_2-|\nabla v|^2_2,\omega_t) &\leq \leq (|\nabla u|_2+|\nabla v_2|)\cdot|(|\nabla(u-v)|_2)|\cdot(\int_\Omega|\omega_t|^2dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_T|\nabla\omega|_2\cdot|\omega_t|_2\leq C_T[|\nabla\omega|^2_2+|\omega_t|^2_2+\left\|\zeta^t\right\|^2_{\mathcal{M}}].
\end{aligned}
\tag{33}
$$

由于 u_t^3 为单调递增函数, 故

$$
\int_\Omega(|u_t|^3-|v_t|^3)\cdot\omega_t dx\geq 0.
$$

综上, 故 (31) 式可化为

$$
\frac{d}{dt}[|\omega_t|^2_2+a|\nabla\omega|^2_2+\|\zeta^t\|^2_{\mathcal{M}}]\leq C[|\omega_t|^2_2+a|\nabla\omega|^2_2+\left\|\zeta^t\right\|^2_{\mathcal{M}}].
$$

若取 $\lambda_2=\min\{a,1\}$, 故由Gronwall引理, 有:

$$
\|\omega^1-\omega^2\|^2_{\mathcal{H}}\leq Ce^{Ct}\|\omega^1_0-\omega^2_0\|^2_{\mathcal{M}}.
$$

当且仅当 $\omega^1_0=\omega^2_0$ 时, 等号成立. 所以就证明了解的唯一性, 和对初值的连续依赖性. 证毕!

致 谢

作者衷心感谢导师谢永钦教授的悉心指导和热心鼓励，感谢湖南省自然科学基金(编号: 2018JJ2416)的资助。

参考文献

[1] 张素丽, 张建文, 王海燕. 一类具记忆项拟线性波动方程方程的整体吸引子[J]. 应用数学, 2020, 33(4): 894-904.

[2] Li, C., Liang, J. and Xiao, T.J. (2021) Long-Term Dynamical Behavior of the Wave Model with Locally Distributed Frictional and Viscoelastic Damping. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **92**, Article ID: 105472. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105472

[3] Liao, M., Guo, B. and Zhu, X. (2020) Bounds for Blow-Up Time to a Viscoelastic Hyperbolic Equation of Kirchhoff Type with Variable Sources. *Acta Applicandae Mathematicae*, **170**, 1-18.

[4] Zhang, Z.Y., Liu, Z.H. and Gan, X.Y. (2013) Global Existence and General Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Nonlinear Localized Damping and Velocity-Dependent Material Density. *Applicable Analysis*, **92**, 2021-2048. https://doi.org/10.1080/00036811.2012.716509

[5] Mezouar, N. and Boulaaras, S. (2020) Global Existence and Decay of Solutions for a Class of Viscoelastic Kirchhoff Equation. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 725-755. https://doi.org/10.1007/s40840-018-00708-2

[6] Lazo, P.P.D. (2011) Global Solution for a Quasilinear Wave Equation with Singular Memory. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 7660-7668. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.069

[7] Wang, H. and Elcrat, A.R. (1993) Boundary Control of Weakly Nonlinear Wave Equations with an Application to Galloping of Transmission Lines. *Dynamics and Control*, **3**, 281-300. https://doi.org/10.1007/BF01972700

[8] Sun, B. and Huang, T. (2014) Chaotic Oscillations of the Klein-Gordon Equation with Distributed Energy Pumping and van der Pol Boundary Regulation and Distributed Time-Varying Coefficients. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2014**, 1-28.