Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1601-1608
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118177

Hans汉斯

矩阵秩的不等式及其在高等代数考研试题中的应用

贺 旗，廖小莲*

湖南人文科技学院，数学与金融学院，湖南 娄底
Email: *hnldlxl2005@126.com

收稿日期：2021年7月20日；录用日期：2021年8月20日；发布日期：2021年8月27日

摘 要

矩阵的秩是反映矩阵固有特性的一个重要概念，矩阵秩的不等式应用则是求解试题中秩相关问题的关键，本文将利用分块矩阵、秩的理论、线性空间与线性变换以及方程组相关理论几个方面去求解高等代数考研试题中矩阵秩的不等式。

关键词

矩阵的秩，不等式，高等代数，应用

Inequality of Matrix Rank and Its Application in Advanced Algebra Solving

Qi He, Xiaolian Liao*

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities and Science, Loudi Hunan
Email: *hnldlxl2005@126.com

Received: Jul. 20th, 2021; accepted: Aug. 20th, 2021; published: Aug. 27th, 2021

Abstract

Rank of the matrix is an important concept to reflect the inherent properties of a matrix, and the inequality application of matrix rank is the key that solves the rank-related problems in the post-graduate exam. The paper makes use of the block matrix, the theory of rank, linear space and linear change and system of equations to solve the inequality of matrix rank in the exam of ad-

*通讯作者。

文章引用: 贺旗, 廖小莲. 矩阵秩的不等式及其在高等代数考研试题中的应用[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1601-1608.
DOI: 10.12677/pm.2021.118177

vanced algebra.

Keywords

Rank of Matrix, Inequality, Advanced Algebra, Application

1. 前言

《高等代数》是数学类专业的专业基础课，也是该类专业研究生入学考试的必考科目。矩阵是《高等代数》课程中的重要内容，而矩阵的秩是矩阵最重要的数字特征之一。许多学者对矩阵的秩及秩的不等式在高等代数解题中的应用做了研究。文献[1]中，黄述亮阐述了关于矩阵秩的几个重要不等式，文献[2]中，徐小萍讨论了矩阵秩的不等式及其应用，文献[3]中，金启胜、包翠莲探讨了矩阵秩不等式性质，文献[4]中，蒋滟君研究了分块矩阵在求矩阵秩及其相关不等式证明中的应用。本文中，我们将首先给出高等代数研究生入学考试中常考的不等式。然后，我们将结合高等代数研究生入学考试试题详细讨论矩阵秩的不等式的应用。具体将从在矩阵秩的相关理论中、在分块矩阵中、在线性空间与线性变换中、以及向量组、方程组相关理论中，阐述矩阵秩的不等式在高等代数解题中的应用。

2. 矩阵的秩及常见矩阵秩的不等式

矩阵的秩[5]是指矩阵中行(或列)向量组的秩，与之等价的说法通常是指矩阵中不为零的子式的最高阶数。下面我们将列出一些常见矩阵秩的不等式：

1) 设 A，B 都是数域 P 上 $s\times n$ 矩阵，有

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$

这里 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩[5]。

2) 设 A 是数域 P 上 $s\times n$ 矩阵，B 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵，有

$$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$$

这里 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩[5]。

推论 1 [5]：如果 $A=A_1A_2\cdots A_t$，那么

$$\operatorname{rank}(A)\le \underset{1\le j\le t}{\operatorname{mix}} A_j$$

3) 设 A，B 都是 $m\times n$ 矩阵，有

$$r(A)-r(B)\le r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$$

4) 设 A，B 都是 $n\times n$ 矩阵，有

$$r(A)+r(B)\le r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

5) Sylvester 不等式：设 A，B 分别是 $s\times n$，$n\times m$ 矩阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$。特别地，当 $AB=0$

时，有 $r(A)+r(B)\le n$ 。

6) Frobenius 不等式：设 A、B、C 分别为 $m\times n$， $n\times s$， $s\times t$ 矩阵，则有

$$r(ABC)\ge r(AB)+r(BC)-r(B)$$

3. 矩阵秩的不等式在高等代数考研试题中的应用

矩阵的秩是一个重要、基本的数学概念，是矩阵最重要的数字特征之一。在矩阵的秩的相关理论、分块矩阵、线性方程组解的判定和求解、线性变换等方面应用十分广泛。下面我们将从矩阵秩的相关理论中、在分块矩阵中的应用、在线性空间与线性变换中的应用、方程组相关理论中的应用，阐述矩阵秩的不等式在高等代数考研解题中的应用。

3.1. 在矩阵秩的理论中的应用

矩阵的秩是矩阵的重要特征，我们常常会利用矩阵秩的一些常见不等式，解决矩阵相关问题，其中 Sylvester 不等式应用极其广泛。

例 1 (2020 年中国科学院大学高等代数考研试题 3)已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I_n$ 。

问：秩 $(I_n+A)+$ 秩 (I_n-A) 为何值，并给出证明过程。

分析：已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I_n$ ，即秩 $\left(I_n^2-A^2\right)=0$ 。利用 Sylvester 不等式，则有秩 $\left[(I_n+A)(I_n-A)\right]\ge$ 秩 $(I_n+A)+$ 秩 $(I_n-A)-n$ 。

证明：因为

$$A^2=I_n$$

所以，有

$$(I_n+A)(I_n-A)=I_n^2-A^2=O$$

即

$$r\left[(I_n+A)(I_n-A)\right]=0$$

利用 Sylvester 不等式，得

$$\text{秩}(I_n+A)+\text{秩}(I_n-A)=n$$

例 2 (2011 年华中科技大学考研试题 3)设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，C 是 $n\times n$ 矩阵，且 $A=BC$ ，$\operatorname{rank}(B)=n$ ，证明：

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(C)$$

分析：利用 Sylvester 不等式，可证 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(BC)\ge\operatorname{rank}(C)$ ，再利用 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$ ，可证 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(BC)\le\operatorname{rank}(C)$ ，即可得 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(C)$ 。

证明：因为 $A=BC$ ，A，B 都是 $m\times n$ 矩阵，C 是 $n\times n$ 矩阵

所以，

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(BC)\ge\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)-n$$

又因为，

$$\operatorname{rank}(B)=n$$

所以，

$$\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(C)$$

而

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(C)$$

所以，

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(C)$$

例 3 (2020 年华东师范大学高等代数考研试题 9)设 n 为奇数，$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 且 $A^2 = O$，证明：$AB - BA$ 不可逆。

分析：根据 $A^2 = O$，利用 Sylvester 不等式，有 $r(A) \leq \frac{n}{2} \leq \frac{n-1}{2}$ (n 为奇数)，再利用 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$、$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 两个不等式，可求得 $r(AB - BA) \leq n - 1 < n$，即 $AB - BA$ 不可逆。

证明：由于 $A^2 = O$，利用 Sylvester 不等式，可得

$$r(A) \leq \frac{n}{2}$$

又因为，n 为奇数，所以可得

$$r(A) \leq \frac{n-1}{2}$$

即，可求

$$r(AB - BA) \leq r(AB) + r(BA) \leq r(A) + r(A) \leq n - 1$$

所以，$AB - BA$ 不可逆。

例 4 (2012 年河南师范大学高等代数考研试题)设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & x_1 + x_3 & \cdots & x_1 + x_n \\ x_2 + x_1 & 0 & x_2 + x_3 & \cdots & x_2 + x_n \\ x_3 + x_1 & x_3 + x_2 & 0 & \cdots & x_3 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n + x_1 & x_n + x_2 & x_n + x_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明：$r(A^*) = n$ 或者 1。

分析：将矩阵 A 拆分两个矩阵之和形式，再利用秩的不等式性质 $r(A) - r(B) \leq r(A + B)$，可得 $r(A) \geq n - 1$，由例题 8 的结论可证明 $r(A^*) = n$ 或者 1。

证明：由于

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & -x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & -x_n \end{pmatrix},$$

故由

$$r(A) - r(B) \leq r(A + B)$$

有

$$r(A) \ge r\begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & -x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & -x_n \end{pmatrix} - r\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right] = n-1$$

故当 $r(A)=n-1$ 时， $r(A^*)=1$；当 $r(A)=n$ 时， $r(A^*)=n$。

3.2. 在分块矩阵中的应用

矩阵分块的目的是为了将阶数大的矩阵，看成由一些小矩阵组成的低阶矩阵，并把这些小矩阵当做数一样来处理。我们常常可以利用矩阵秩的不等式来解决分块矩阵的有关题型，有时也可以应用分块矩阵证明有关矩阵的秩的某些性质。

例 5 (2020 年湖南师范大学高等代数考研试题证明题 2)用 $r(A)$ 表示 A 的秩，A，B 都是 n 阶方阵，证明：

$$r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$$

分析：要证明上式，只需证明 $r(AB)+n \ge r(A)+r(B)$，利用初等变换不影响矩阵的秩，将不等式左边 $r\begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$ 转换成 $r\begin{pmatrix} -A & E_n \\ O & B \end{pmatrix}$，再利用 A，B 都是 n 阶方阵，有 $r(A)+r(B) \le r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，即可证明 $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$。为了方便，我们在运算过程中，用 r 表示矩阵的行，c 表示矩阵的列。r_1+Br_2 表示将分块矩阵的第二行左乘矩阵 B 加到第一行。c_1-Ac_2 表示将分块矩阵的第二列左乘矩阵 A 减到第一行。$r_1 \leftrightarrow r_2$ 表示将分块矩阵的第一行与第二行交换位置。

证明：由于

$$\begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+Br_2} \begin{pmatrix} AB & B \\ O & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-Ac_2} \begin{pmatrix} O & B \\ -A & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -A & E_n \\ O & B \end{pmatrix}$$

因为，A，B 都是 n 阶方阵，则

$$r\begin{pmatrix} -A & E_n \\ O & B \end{pmatrix} \ge r(A) + r(B)$$

而

$$r(AB) + n = r\begin{pmatrix} -A & E_n \\ O & B \end{pmatrix}$$

所以，

$$r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$$

例 6 (2020 年兰州大学高等代数考研试题 4 证明题)设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$，C 为 $s \times t$ 矩阵，试证：

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(ABC)$$

分析：要证明上式，只需证明 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC) \le \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$，再利用方块矩阵做一系列的初等变换，可得到

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) &\le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & ABC \\ B & O \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B) \end{aligned}$$

证明：设 E_s,E_t,E_m,E_n 分别为 s,t 阶单位矩阵，

则由于

$$\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & C \\ O & -E_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & ABC \\ O & BC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & ABC \\ B & O \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} E_s & C \\ O & -E_t \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵，故

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & ABC \\ B & O \end{pmatrix}\\ =\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B)\le\operatorname{rank}(ABC)$$

3.3. 在线性空间与线性变换理论中的应用

线性空间的维数其实质是向量组的秩的问题，线性变换的值域与核的维数问题，其实质也是向量组的秩的问题。

例 7 (2020 湖南师范大学高等代数考研试题证明题 2)用 $r(A)$ 表示 A 的秩，A,B 都是 n 阶方阵，证明：

$$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$$

分析：除了利用上述例 4 用分块矩阵求解外，也可以利用线性空间的维数来解，将 $r(B)$ 用 $\dim\left[U=\{Bx\mid x\in V\}\right]$ (U 是 B 像，V 是 n 维列向量空间)表示，定义一个线性变换 $\varphi:V\to V,x\mapsto Ax$，那么 $\dim\ker\varphi=n-r(A)$ ($\dim\ker\varphi$ 指 $Ax=0$ 解集的维数)。所以，

$$\begin{aligned}\dim\varphi(U)=\dim\{ABx\mid x\in V\}=r(AB)=\dim\{Au\mid u\in U\}\\ \ge\dim U-\dim\ker\varphi=r(A)+r(B)-n\end{aligned}$$

证明：记 V 是 n 维列向量空间，令 $U=\{Bx\mid x\in V\}$，则 U 是 V 的子空间，且 $\dim U=r(B)$，再定义 V 上的线性变换

$$\varphi:V\to V,\ x\mapsto Ax$$

则

$$\varphi(U)=\{ABx\mid x\in V\}$$

故

$$\dim\varphi(U)=r(AB)$$

而

$$\dim\ker\varphi=n-r(A)$$

因为

$$\dim\{ABx \mid x\in V\}=\dim\{Au \mid u\in U\}\ge \dim U-\dim\ker\varphi$$

所以

$$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$$

3.4. 在线性方程组相关理论中的应用

根据线性方程组系数矩阵和增广矩阵的秩的关系，可以判断一个线性方程组是否有解，可以找出线性方程组中有效方程的个数，并怎样给出方程组的解。

例 8 (2016 年北京师范大学考研试题 3)设 A 是 n 阶矩阵， A^* 是 A 的伴随矩阵，证明：

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

分析：考虑 $r(A)$ 为 n 时，利用 $A^*A=|A|E$， $|A^*|=|A|^{n-1}\ne 0$，考虑 $r(A)$ 为 $n-1$ 时，A 至少存在一个 $n-1$ 级子式不为 0，即 $r(A^*)\ge 1$，再利用 Sylvester 不等式，得到 $r(A^*)\le 1$，最终可得 $r(A^*)=1$。同样考虑 $r(A)<n-1$ 时，A 的任意 $n-1$ 行皆线性相关，故它的 $n-1$ 级子式为 0，所以 $r(A^*)=0$。

证明：当 $r(A)=n$ 时，因为 $A^*A=|A|E$，即 $|A^*|=|A|^{n-1}\ne 0$，所以 $r(A^*)=n$；

当 $r(A)=n-1$ 时， $A^*A=|A|E=0$，则 A 至少存在一个 $n-1$ 级子式不为 0，即 $r(A^*)\ge 1$。

利用 Sylvester 不等式，

$$r(A^*A)\ge r(A)+r(A^*)-n$$

则 $r(A^*)\le 1$。

所以，当 $r(A)=n-1$ 时， $r(A^*)=1$；

当 $r(A)<n-1$ 时，则 A 的任意 $n-1$ 行皆线性相关，故它的任意 $n-1$ 级子式都为 0，所以，$|A^*|=|A|^{n-1}=0$。

综上所述，

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

例 9 (2020 年北京师范大学高等代数考研试题 2)若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 m 维列向量。证明：

$$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$$

分析：要证 $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$，只需证明 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 与 $AX=0$ 同解即可。

证明：显然， $AX=0$ 则 $A^{\mathrm{T}}AX=0$。

反之，若 $A^{\mathrm{T}}AX=0$，则 $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX=0$，即 $(AX)^{\mathrm{T}}AX=0$。

因为，A，X 都是实矩阵，所以 $AX=0$，即 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 的解是 $AX=0$ 的解。

所以， $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 与 $AX=0$ 同解， $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$。

4. 总结

秩的不等式常以证明题为主，欲熟练、快速解答该类题，需掌握一些必要的秩的不等式性质，如 Sylvester 不等式、Frobenius 不等式等。除了能够熟练掌握秩的不等式性质以外，同时也需联系矩阵、线性空间与线性变换相关理论，通过归纳总结得出最优解题方式。

参考文献

[1] 黄述亮. 关于矩阵秩的几个重要不等式[J]. 辽东学院学报(自然科学版), 2021, 28(1): 61-65.

[2] 徐小萍. 矩阵秩的不等式及其应用[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2012, 12(5): 19-21.

[3] 金启胜, 包翠莲. 矩阵秩的不等式性质[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2012(3): 5.

[4] 蒋滟君. 分块矩阵在求矩阵秩及其相关不等式证明中的应用[J]. 科协论坛(下半月), 2011(10): 93-94.

[5] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.