Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1475-1481
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118165

Sylow p-子群为循环群的$10p^n$阶非交换群的Coleman自同构群

依火阿呷*，海进科†

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1322778598@qq.com, †haijinke2002@aliyun.com

收稿日期：2021年6月30日；录用日期：2021年8月3日；发布日期：2021年8月10日

摘 要

在这篇文章中，利用群的射影极限性质给出了一类Sylow p-子群为循环群的$10p^n$阶非交换群的Coleman自同构群的结构。

关键词

射影极限，Coleman自同构群，内自同构群

On Coleman Outer Automorphism Groups of Non-Commutative Groups of Order $10p^n$ with Sylow p-Subgroup Being Cyclic Groups

A'ga Yihuo*, Jinke Hai†

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1322778598@qq.com, †haijinke2002@aliyun.com

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 依火阿呷, 海进科. Sylow p-子群为循环群的$10p^n$阶非交换群的Coleman自同构群[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1475-1481. DOI: 10.12677/pm.2021.118165

Received: Jun. 30^{th}, 2021; accepted: Aug. 3^{rd}, 2021; published: Aug. 10^{th}, 2021

Abstract

In this note, we use the projection limit property of groups to give the structure of Coleman automorphism groups for a class of non-commutative groups of order $10p^n$ with Sylow p-subgroup being cyclic groups.

Keywords

Projection Limit, Coleman Automorphism, Inner Automorphism

1. 引言

Coleman自同构不仅对有限群的结构有着深刻的影响，而且还与整群环中正规化子问题有着紧密的联系，因此人们开始关注什么样的有限群使它的每个Coleman自同构均为内自同构。

称有限群G 的一个自同构σ为G的一个Coleman自同构，如果σ在G的任意一个Sylow子群上的限制等于G的某个内自同构在其上的限制，那么所有这样的自同构构成了$\mathrm{Aut}(G)$的一个子群，记为$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)$。显然$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)$，令$\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)/\mathrm{Inn}(G)$, 称$\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$为$G$的Coleman 外自同构群。

在文献 [1] 中，E. C. Dade证明了$\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$是幂零群。在文献 [2] 中，M. Hertweck等人证明了$\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$ 是交换群，并给出了幂零群的每个Coleman 自同构均为内自同构等一些充分条件。在文献 [3] 中，A. V. Antwerpen研究了具有自中心化特征单的正规子群的有限群的Coleman 自同构，证明了这类群的每个Coleman 自同构均为内自同构。在文献 [4] 中，赵文英等人利用同调理论研究了具有自中心化的正规子群的有限群的Coleman自同构，也给出了$\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G) = 1$的一些充分条件。那么给定一个有限群，如何具体构造出它的Coleman自同构？在文献 [5] 中，海进科等利用群的射影极限(见 [4])理论具体给出了二面体群的Coleman 外自同构群。在文献 [6] 中，吴洪毅等继续利用文献 [5] 中的方法具体给出了广义二面体群的Coleman外自同构群。另外，文献 [7] 中给出了一类Sylow p-子群为循环群的$10p^n$ 阶非交换群的结构。本文继续利用群的射影极限理论探讨文献 [7] 中给出的群的Coleman自同构群的结构。我们证明了如下主要结果：

定理1 设$G = < a > \rtimes < b >$，其中$a^b = a^{-1}$，且$a^{p^n} = 1 = b^{10}$，p是大于5的素数，则$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G) = \mathrm{Inn}(G)$。

定理2 设$G = < a, b >$，其中$a^b = a^r$，且$a^{p^n} = 1 = b^{10}, r \not\equiv 1(\mathrm{mod} p^n)$且$r^5 \equiv 1(\mathrm{mod} p^n), p \equiv 1(\mathrm{mod} 5)$，$p$是大于5的素数，则$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G) = \mathrm{Inn}(G)$。

定理3 设$G = < a, b, c >$，其中$a^b = a^{-1}$，且$a^5 = b^2 = c^{p^n} = 1 = [a, c] = [b, c]$，$p$是大于5 的素数，则$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G) = \mathrm{Inn}(G)$。

本文中，G表示有限群，$\pi(G)$表示$|G|$的素因子的集合，用$\zeta(G)$表示G 的中心，C_p^n表示n个C_p的直积，C_{p^i}表示p^i阶循环群，$O_{p'}(G)$表示G的最大正规$p'-$子群。其它记号是标准的，参见文献 [2,8–10]。

2. 预备知识

定义1 设G是有限群，$N_1, N_2, \cdots, N_s$为G的正规子群。记$G_i = G/N_i, G_{ij} = G/N_iN_j$，令$\pi_{ij} : G_i \to G_{ij}$为自然映射，其中$1 \leq i, j \leq s, s$为正整数，则称

$$\hat{G} = \mathrm{Projlim}_{1 \leq i \leq s}(G_i, \pi_{ij}) = \{(g_1, g_2, \cdots, g_s) \in \prod_{i=1}^{s} G_i | g_i^{\pi_{ij}} = g_j^{\pi_{ji}}, 1 \leq i, j \leq s\}.$$

为群G关于同态π_{ij}的射影极限，简称$\hat{G}$为群G的射影极限。

由定义1立即推出如下引理1和引理2:

引理1 记号如上,则$\hat{G}$是$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ 的子群，且$G_{ij} = G_{ji}, G_{ii} = G_i$。

引理2 记$\hat{G}$到G_i上的投射为π_i，如果π_i 为满同态，则

$$\hat{G} = \mathrm{Projlim}_{1 \leq i \leq s}(G_i, \pi_{ij}) = \{(g_1, g_2, \cdots, g_s) \in \prod_{i=1}^{s} G_i\}.$$

此时，记$\hat{G} = \mathrm{Projlim}_{1 \leq i \leq s}(G_i)$，即$\mathrm{Projlim}_{1 \leq i \leq s}(G_i) = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$。

引理3 [5] 设G是有限群，$N_1, N_2, \cdots, N_s$ 为G 的正规子群。令$\pi_{ij} : G/N_i \to G/N_iN_j$ 为自然映射，满足$\cap_{i=1}^{s} N_i = 1$，且对任意$p \in \pi(G)$，至少存在一个指标$i(1 \leq i \leq s)$ 使得$(p, |N_i|) = 1$，则$G \cong \hat{G} = \mathrm{Projlim}_{1 \leq i,j \leq s}(G_i, \pi_{ij})$。

引理4 [8] 设G为有限可解群，记$G_i = G/O_{p_i'}(G)$,$G_{ij} = G/O_{p_i'}(G)O_{p_j'}(G)$，其中$\pi(G) = \{p_1, \cdots, p_n\}$。令$\pi_{ij} : G_i \to G_{ij}$为自然映射，且$\pi_{ij}$诱导了自然同态$\pi_{ij}^* : G_i/\zeta(G_i) \to G_{ij}/\zeta(G_{ij})$，则$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G) \cong \mathrm{Projlim}_{1 \leq i,j \leq n}(G_i/\zeta(G_i), \pi_{ij}^*) \cong \mathrm{Projlim}_{1 \leq i \leq n}(\mathrm{Inn}(G_i))$。

引理5 [7] 设$G = < a > \rtimes < b >$，其中$a^b = a^{-1}$，且$a^{p^n} = 1 = b^{10}$，p是大于5的素数，则$< a > \cap < b > = 1$。

引理6 设$G = < a > \rtimes < b >$，其中$a^b = a^{-1}$，且$a^{p^n} = 1 = b^{10}$, p是大于5的素数，则$\{b^i | i = 2, 4, 6, 8\}$为G中所有的5 阶元且为G的中心元。

DOI: 10.12677/pm.2021.118165

证明 设$o(b^ia^j)=5$，其中$0\leq i<10, 0\leq j<p^n$。当i为奇数时,由$a^b=a^{-1}$，

$$b^ia^jb^ia^j=b^ia^jbb^{i-1}a^j=b^{i+1}a^{-j}b^{i-1}a^j=b^{i+1}a^{-j}bb^{i-2}a^j$$

$$=b^{i+2}a^{-j}b^{i-2}a^j=......=b^{2i};b^{2i}b^ia^j=b^{3i}a^j;$$

$$b^{3i}a^jb^ia^j=b^{3i}a^jbb^{i-1}a^j=b^{3i+1}a^{-j}b^{i-1}a^j=......=b^{4i};$$

则可得

$$b^{4i}b^ia^j=b^{5i}a^j=1.$$

由引理5得i无解；当i为偶数时，由$(b^ia^j)^5=b^{5i}a^{5j}=1$(同理$i$为奇数的证明方法)及引理5 得

$$i=2,4,6,8, j=0.$$

因此$\{b^i|i=2,4,6,8\}$为G中所有的5阶元。

任取$ab^2\in G$,由$a^b=a^{-1}$，

$$ab^2=abb=ba^{-1}b=ba^{p^n-1}b=ba^{p^n-2}ab$$

$$=ba^{p^n-2}ba^{-1}=ba^{p^n-3}aba^{-1}$$

$$=ba^{p^n-3}ba^{-2}=......=b^2a^{1-p^n}$$

因为$a^{p^n}=1$，所以$a^{1-p^n}=aa^{-p^n}=a$。故$ab^2=b^2a$，因此b^2为G的中心元，即$\zeta(G)=C_5$。

3. 主要定理的证明

定理1 设$G=< a >\rtimes< b >$，其中$a^b=a^{-1}$，且$a^{p^n}=1=b^{10}$，p是大于5的素数，则$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)=\mathrm{Inn}(G)$。

证明 因为$|\pi(G)|=3$，由引理6，$\zeta(G)=C_5$，而$G=< a >\rtimes< b >=(C_{p^n}\rtimes C_2)\times C_5$知，

$$O_{2'}(G)=C_{p^n}\times C_5, O_{5'}(G)=C_{p^n}\rtimes C_2, O_{p'}(G)=C_5,$$

记

$$G_1=G/O_{2'}(G), G_2=G/O_{5'}(G), G_3=G/O_{p'}(G),$$

则

$$G_1\cong C_2, G_2\cong C_5, G_3\cong C_{p^n}\rtimes C_2,$$

从而

$$\zeta(G_1)=C_2, \zeta(G_2)=C_5, \zeta(G_3)=1.$$

由引理4知

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Projlim}_{1\leq i\leq 2}(\mathrm{Inn(G_i)})=\mathrm{Inn(G_1)}\times\mathrm{Inn(G_2)}\times\mathrm{Inn(G_3)}\cong\mathrm{C_{p^n}}\rtimes\mathrm{C_2},$$

注意到$\zeta(G)=C_5,\mathrm{Inn(G)}=\mathrm{G}/\zeta(\mathrm{G})\cong\mathrm{C_{p^n}}\rtimes\mathrm{C_2}$，故

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Inn}(G).$$

定理2 设$G=<a,b>$，其中$a^b=a^r$，且$a^{p^n}=1=b^{10},r\not\equiv 1(\mathrm{mod}p^n)$且$r^5\equiv 1(\mathrm{mod}p^n),p\equiv 1(\mathrm{mod}5)$，$p$是大于5的素数，则$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Inn}(G)$。

证明 因为$\pi(G)=\{2,5,p\}$, 由文献 [7] 知，$\zeta(G)=C_2$。这样$G=< a >\rtimes< b >=(C_{p^n}\rtimes C_5)\times C_2$，于是

$$O_{2'}(G)=C_{p^n}\rtimes C_5,O_{5'}(G)=C_{p^n}\times C_2,O_{p'}(G)=C_2,$$

记

$$G_1=G/O_{2'}(G),G_2=G/O_{5'}(G),G_3=G/O_{p'}(G),$$

则

$$G_1\cong C_2,G_2\cong C_5,G_3\cong C_{p^n}\rtimes C_5,$$

从而

$$\zeta(G_1)=C_2,\zeta(G_2)=C_5,\zeta(G_3)=1.$$

由引理4知

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Projlim}_{1\leq i\leq 2}(\mathrm{Inn(G_i)})=\mathrm{Inn(G_1)}\times\mathrm{Inn(G_2)}\times\mathrm{Inn(G_3)}\cong\mathrm{C_{p^n}}\rtimes\mathrm{C_5},$$

注意到$\zeta(G)=C_5,\mathrm{Inn(G)}=\mathrm{G}/\zeta(\mathrm{G})\cong\mathrm{C_{p^n}}\rtimes\mathrm{C_5}$，故

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Inn}(G).$$

定理3 设$G=<a,b,c>$，其中$a^b=a^{-1}$，且$a^5=b^2=c^{p^n}=1=[a,c]=[b,c]$，$p$是大于5 的素数，则$\mathrm{Aut_{Col}}(G)=\mathrm{Inn}(G)$。

证明 因为$\pi(G)=\{2,5,p\}$, 由文献 [7] 知，$\zeta(G)=C_{p^n}$。这样$G=(< a >\rtimes< b >)\times< c >=(C_5\rtimes C_2)\times C_{p^n}$。于是

$$O_{2'}(G)=C_5\times C_{p^n},O_{5'}(G)=C_{p^n},O_{p'}(G)=C_5\rtimes C_2,$$

记

$$G_1=G/O_{2'}(G),G_2=G/O_{5'}(G),G_3=G/O_{p'}(G),$$

则

$$G_1 \cong C_2, G_2 \cong C_5 \rtimes C_2, G_3 \cong C_{p^n},$$

从而

$$\zeta(G_1) = C_2, \zeta(G_2) = 1, \zeta(G_3) = C_{p^n}.$$

由引理4知

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G) = \mathrm{Projlim}_{1\le i\le 2}(\mathrm{Inn(G_i)}) = \mathrm{Inn(G_1)} \times \mathrm{Inn(G_2)} \times \mathrm{Inn(G_3)} \cong \mathrm{C_5} \rtimes \mathrm{C_2},$$

注意到$\zeta(G) = C_{p^n}, \mathrm{Inn(G)} = \mathrm{G}/\zeta(\mathrm{G}) \cong \mathrm{C_5} \rtimes \mathrm{C_2}$, 故

$$\mathrm{Aut_{Col}}(G) = \mathrm{Inn}(G).$$

基金项目

国家自然科学基金(11871292)。

参考文献

[1] Dade, E.C. (1975) Sylow-Centralizing Sections of Outer Automorphism Groups of Finite Groups Are Nilpotent. *Mathematische Zeitschrift*, **141**, 57-76. https://doi.org/10.1007/BF01236984

[2] Hertweck, M. and Kimmerle, W. (2002) Coleman Automorphisms of Finite Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **242**, 203-215. https://doi.org/10.1007/s002090100318

[3] Van Antwerpen, A. (2018) Coleman Automorphisms of Finite Groups and Their Minimal Normal Subgroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **222**, 3379-3394. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.12.013

[4] 赵文英, 海进科. 关于有限内幂零群和Frobenius群的Coleman自同构[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(10): 4-6.

[5] Kimmerle, W. and Roggenkamp, K.W. (1993) Projective Limits of Group Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **88**, 119-142. https://doi.org/10.1016/0022-4049(93)90017-N

[6] 吴洪毅, 海进科. 广义二面体群的Coleman自同构群[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(12): 37-39.

[7] 吉晓娟, 周伟. Sylow p-子群为循环群的$10p^n$阶非交换群的非交换群[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(10): 56-59.

[8] 海进科, 吕瑞珍. Coleman自同构群的投射极限[J]. 数学学报, 2020, 63(4): 281-288.

[9] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[10] Hai, J.K. and Zhu, Y.X. (2018) On Coleman Automorphisms of Extensions of Finite Quasinilpotent Groups by Some Groups. *Algebra Colloquium*, **25**, 181-188.
https://doi.org/10.1142/S1005386718000123