

平面微分系统的经线与极限环

陈金和

东华理工大学, 理学院数学系, 江西 抚州
Email: cjhgzafz@163.com

收稿日期: 2021年7月20日; 录用日期: 2021年8月20日; 发布日期: 2021年8月27日

摘要

本文应用平面曲线局部性质数值化讨论平面微分系统极限环的求解问题。

关键词

经线, 盈度, 极限环

On Longitudes and Limit Cycles of Plane Differential Systems

Jinhe Chen

School of Science, East China University of Technology, Fuzhou Jiangxi
Email: cjhgzafz@163.com

Received: Jul. 20th, 2021; accepted: Aug. 20th, 2021; published: Aug. 27th, 2021

Abstract

In this paper, we discuss the solving process of limit cycles by numerization to local property of plane curve.

Keywords

Longitudes, Excess Degree, Limit Cycles

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文采用的记号同文[1], 文[2]。如 R 表示曲线的曲率半径, R_1 表示 R 对弧长的一阶导数 $\frac{dR}{ds}$, R_2 表示 R 对弧长的二阶导数 $\frac{d^2R}{ds^2}$, r 表示曲线的密切半径, α 表示曲线的密切角……

设

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y), \quad (1)$$

是足够光滑的平面微分系统, 在文[2]我们指出, 若系统(1)存在极限环, 那么一定存在与极限环相关的三个特殊性质:

- 1) 极限环存在某种异于附近轨线的特殊性质;
- 2) 极限环附近存在特殊结构, 即极限环附近有特殊的局部性质;
- 3) 系统的轨线族存在特殊的结构, 即系统的轨线有特殊的整体性质。

这三个特殊性质, 是求解极限环(方程)的关键。性质 1), 2)文[2]已进行了讨论, 本文作一些补充, 重点讨论性质 3)。

2. 对性质 1)的讨论

定义 1 平面曲线 L 的密切渐屈线称为曲线一阶密切渐屈线, 一阶密切渐屈线的密切渐屈线称为曲线 L 的二阶密切渐屈线。依次类推, 我们可以定义曲线 L 的 n 阶密切渐屈线 ($n=3, 4, \dots$)。

定义 2 若平面曲线的 n 阶密切渐屈线是有心曲线, 则称曲线是 L 是 $n+1$ 阶有心曲线 ($n=1, 2, 3, \dots$)。

例 1 若平面曲线 L 上点的密切中心 (X, Y) 满足方程: $X^2 + Y^2 = 1$, 则曲线 L 是二阶有心曲线。

定义 3 系统(1)的极限环若是 n 阶有心曲线, 则称此极限环为系统(1)的 n 阶聚焦环 ($n=2, 3, \dots$)。

显然系统(1)的 n 阶聚焦环都是可求的 ($n=2, 3, 4, \dots$)。

下面讨论具有另一种特殊性质的极限环。

设 $L: y = y(x)$ 是足够光滑的平面曲线。 $(x, y), (x_1, y_1)$ 是曲线 L 上相邻的两点, $(X, Y), (X_1, Y_1)$ 分别是它们的密切中心。过点 (X, Y) , 作点 (x, y) 处曲线 L 切线的平行线: $\frac{\bar{v} - Y}{\bar{u} - X} = y'(x)$ 。过点 (X_1, Y_1) 作点 (x_1, y_1) 处曲线 L 切线的平行线 $\frac{\bar{v} - Y_1}{\bar{u} - X_1} = y'(x_1)$ 。求两直线交点 (\bar{u}, \bar{v}) 并令 (x_1, y_1) 沿曲线 L 趋于点 (x, y) , 得

$$u = \lim \bar{u} = X + \frac{y'(x) - \frac{dY}{dx}}{y''(x)} \quad (2)$$

$$v = \lim \bar{v} = Y + y'(x) \frac{y'(x) - \frac{dY}{dx}}{y''(x)} \quad (3)$$

其中

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(y'y''' - 3y''^2)(40y'''^3 - 45y''y''''y^{(4)} + 9y''^2y^{(5)})}{(3y''y^{(4)} - 5y''^2)^2} \quad (4)$$

定义 4 由(2)、(3)两式确定的点 (u, v) 称为曲线 L 点 (x, y) 的镜像, 点 (x, y) 到点 (u, v) 的映射

$$T: (x, y) \rightarrow (u, v) \quad (5)$$

称为镜面映射。 $T(L) = \{(u, v); (x, y) \in L\}$ 称为曲线 L 密切渐屈线的渐伸线。

定义 5 设 $(x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y)$ 是曲线 L 上相邻两点, 它们的镜像分别是 $(u, v), (u + \Delta u, v + \Delta v)$ 令 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 沿曲线 L 趋于 (x, y) , 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{du}{dx}$ 为常数, 即 $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, 则称曲线 L 为镜面曲线, 特别地, 当文[2]定义 2.2 中散度 V 在曲线 L 上为常数时, 称曲线 L 为超镜面曲线。

定义 6 若曲线 L 密切渐屈线的渐伸线 $T(L)$ 为 n 阶中心线时, 称曲线 L 为次 n 阶有心线 $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 。

定义 7 平面微分系统的极限环, 若为(超)镜面曲线时, 则称此极限环为(超)镜面环。若极限环为次 n 阶中心曲线, 则称此极限环为次 n 阶聚焦环 $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 。

显然平面微分系统的(超)镜面环, 次 n 阶聚焦环都是可求的 $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 。

3. 对性质 2) 讨论

在文[2]中, 我们给出了几何相似环, 保角相似环……的定义, 并且证明了文[2]例 1 系统

$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)$, $\frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$ 的极限环 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 是几何相似环。这里我们要指出: 该极限环上的点 (x, y) 的几何相似中心 (u, v) , $u = \frac{4x + 2y}{5}$, $v = \frac{4y - 2x}{5}$ 满足 $u^2 + v^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, 即相似中心全体组成一个圆, 对此有:

定义 8 平面微分系统极限环的点 (x, y) 与其相似中心 (u, v) , 若满足 $\sqrt{\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{1 + y'^2}}$ 是常数, 则称此极限环为强几何相似环。

定义 8 可推广到其它类型的相似环。

若将文[2] (11), (12)式中的 K_0 , 换成曲线 $r_0 = \text{常数}$ ($r_0 = \frac{r}{R}$) 的斜率 $K_3 = \frac{r_{0x}}{r_{0y}}$, 换成散度 $V = \text{常}$ 的斜率 $K_4 = -\frac{V_x}{V_y}$ ……还可得平面微分系统的保形相似环, 同焦度相似环……

之所以要列出这些相似环, 因为根据极限环附近轨线的分布特点, 可以断定: 平面微分系统的极限环必定是某种类型的相似环, 这里我们已经列举出大部分类型。

4. 关于性质 3) 的讨论

性质 3) 中轨线族的整体性质, 也就是轨线族的整体结构, 它由轨线族中轨线的演变方式所决定。微分系统的轨线不是孤立的, 每一条轨线都是另一条轨线按照每个微分系统各自特有的方式演变而成。在轨线的演变过程中, 轨线上每一点的运动轨迹构成了平面微分系统的一条经线。记 M 为平面微分系统的轨线族, N 为经线族。同轨线族 M 一样, 每个光滑平面微分系统的经线族 N 存在且唯一。

例 2 系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{b^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{a^2} \quad (ab \neq 0) \quad (6)$$

的轨线族 $M = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c; 0 < c < +\infty \right\}$, 经线族 $N = \{x = 0, y = cx; -\infty < c < +\infty\}$ 。

例 3 系统

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = -bx + ay \quad (ab \neq 0) \quad (7)$$

的轨线族(用极坐标表示) $M = \left\{ \rho = ce^{-\frac{a}{b}\varphi}; 0 < c < +\infty \right\}$, 经线族 $N = \{\rho = c; 0 < c < +\infty\}$ 。

从例 2, 例 3 可以看出:

1) 光滑的平面微分系统的经线族 N 存在且唯一;

2) 轨线上的点沿经线运动时, 轨线的局部性质变化最小;

3) 系统的经线反映了系统轨线的演变方式即轨线族的整体性质。系统(5)轨线上的点沿射线 $y = cx$ 运动演变另一条轨线, 这种系统我们称为相似系统。系统(7)轨线上的点沿圆周 $\rho = c$ 运动演变成另一条轨线, 这种系统我们称为旋转系统。

4) 通过系统的经线, 可以分析系统轨线的分布密度, 了解微分方程解的稳定性;

5) $M \cap N = \emptyset$ 。

这 5 条性质, 前 4 条对所有的平面微分系统都成立, 唯有性质 5) 不是对所有微分系统都成立。我们认为: 若平面微分系统存在极限环 L , 则必有 $L \in M \cap N$ 。即存在极限环的微分系统的 $M \cap N$ 一定非空, 而且极限环必定属于 $M \cap N$ 。这就是存在极限环的平面微分系统轨线族具有特殊整体性质 3)。根据这一性质, 我们只要求出微分系统的经线族 N , 就可以从 $M \cap N$ 中得到系统的所有极限环, 从而彻底解决平面微分系统极限环的存在性以及存在个数问题。

如何求平面微分系统的经线呢? 根据经线的性质 2), 我们考虑:

定义 9 设 $G = (g_1, g_2)$ 是系统(1)轨线上点 (x, y) 的基因。在以点 (x, y) 为中心, ε 为半径的圆周:

$$x + \Delta x = x + \varepsilon \cos \varphi, \quad y + \Delta y = y + \varepsilon \sin \varphi \quad (8)$$

上的点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 的基因为 $G + \Delta G = (g_1 + \Delta g_1, g_2 + \Delta g_2)$, 则 $|\Delta G| = \sqrt{(\Delta g_1)^2 + (\Delta g_2)^2}$ 在圆周(8)上一定取到最小值。即在圆周(8)上一定存在一点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 是 $|\Delta G|$ 的最小值点。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 这些最小值点构成一条经过点 (x, y) 的曲线我们称为基因 G 的遗传曲线。

根据定义 9, 可求得系统(1)点 (x, y) 基因 G 的遗传曲线的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 由方程:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + H \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad (9)$$

所确定。其中

$$H = \frac{g_{1x}^2 - g_{1y}^2 + g_{2x}^2 - g_{2y}^2}{g_{1x}g_{1y} + g_{2x}g_{2y}} \quad (10)$$

方程(9)有两个根, 其中一个 $\frac{dy}{dx}$ 就是基因 G 变化最小的方向, 另一个与 $\frac{dy}{dx}$ 正交的 $-\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ 就是基因 G 变化最大的方向。

有时轨线及基因的遗传曲线用极坐标方程表示更方便。此时基因 G 遗传曲线 $\rho = \rho(\varphi)$ 的导数 $\frac{d\rho}{d\varphi}$ 由方程

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + H \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho^2 = 0 \quad (11)$$

确定。其中

$$H = \frac{-\rho^2(g_{1\rho}^2 + g_{2\rho}^2) + (g_{1\varphi}^2 + g_{2\varphi}^2)}{g_{1\rho}g_{1\varphi} + g_{2\rho}g_{2\varphi}} \quad (12)$$

定义 9 基因 G 的遗传曲线正是例 2 系统(5), 例 3 系统(7)的经线。这类以基因 G 的遗传曲线为经线的系统, 我们称为简单系统。而大多数平面微分系统是复杂系统, 它们的经线不是基因 G 的遗传曲线, 这是为什么呢? 因为 G 中 $g_1 = r_0 \sin \alpha$ 是轨线的拱度, $g_2 = r_0 \cos \alpha$ 是轨线的拱偏度, 是两种截然不同的几何性质。在轨线演变过程中, g_1 与 g_2 有不同的变化规律, 在定义 9 中把它们象点的坐标的两个分量一样看待, 用定义点的距离大小的方法定义轨线性质的变化大小是不合适的, 在复杂系统中不能真实反映轨线演变过程中点的运动轨迹。于是如何求一般平面微分系统的经线是我们面临的一个问题, 本文从以下几个方面进行探讨。

4.1. 曲线基因表示的坐标化

要用定义 9 定义基因的变化大小就必须使得表示基因的各个量, 除了表示距离以外不能有其它几何意义, 也就是做到基因的坐标化表示。

如何做到基因表示的坐标化呢? 从文[1]的定理 1, 2, 3, 4 我们知道: 足够光滑的平面曲线在它的每一点处有一条圆锥曲线为它的 4 阶密切曲线, 也就是平面曲线与它密切圆锥曲线在切点的基因是相同的, 所以只要解决了圆锥曲线基因的坐标化, 就解决了所有平面曲线基因的坐标化。又因为圆锥曲线族 $\{\rho = \frac{c}{1-e\cos\varphi}; e \text{ 是常数, } 0 < c < +\infty\}$ 是相似曲线族, 我们只要解决其中一条曲线 $\rho = \frac{c_0}{1-e\cos\varphi}$ 的基因坐标化, 就解决了整个曲线族的曲线基因坐标化。为此我们考虑系统:

$$\frac{du}{dt} = v(u+1), \quad \frac{dv}{dt} = v^2 - u \quad (13)$$

与系统 $\frac{du}{dt} = v(u-1), \quad \frac{dv}{dt} = v^2 - u$ 。由于两个系统讨论相同, 下面以系统(13)为例进行讨论。系统(13)的轨线族

$$M_e = \left\{ \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u+1} = e; 0 < e < +\infty \right\} \quad (14)$$

用极坐标方程表示 $M_e = \left\{ \rho = \frac{e}{1-e\cos\varphi}; 0 < e < +\infty \right\}$ 。 M_e 中的曲线称为 e 曲线, 记做 L_e 。系统(13)中点的坐标用 (u, v) 表示, 是因为以后我们经常要用到这一特殊的系统。

系统(13)的轨线族 M_e 有以下性质:

- 1) M_e 中的曲线 L_e 都以 $u = -1$ 为准线, 原点 0 为焦点;
- 2) M_e 包含了所有类型的圆锥曲线;
- 3) M_e 中曲线的离心率 e 两两不相同;

4) 光滑平面曲线任一点的密切圆锥曲线必定和 M_e 中唯一一条曲线 L_e 相似(有相同的离心率)。因此我们只要解决了 M_e 中曲线 L_e 的基因坐标化, 就解决了所有平面曲线基因的坐标化。下面讨论 M_e 中曲线基因的坐标表示。

L_e 上的点 (u, v) 到焦点 $(0, 0)$ 的距离 $\sqrt{u^2 + v^2}$, 到准线 $u = -1$ 的距离为 $u + 1$, $\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u + 1} = e$ 的点全体就是 L_e 。所以 $(\sqrt{u^2 + v^2}, u + 1)$ 不仅可以确定点 (u, v) 在 L_e 上的位置, 而且可以确定 L_e 。因此有:

定义 10 $G_1(u, v) = (\sqrt{u^2 + v^2}, u + 1)$ 称为 L_e 上点 (u, v) 的线状基因。

另外曲线 L_e 也是点 (u, v) 到焦点 $(0, 0)$ 的距离 $\sqrt{u^2 + v^2}$ 与点 (u, v) 到另一焦点 $(2U, 0)$ 的距离 $\sqrt{(u - 2U)^2 + v^2}$ 之和(或之差)为常数的点的集合(其中 $U = \frac{e^2}{1 - e^2}$), 也就是以点 (u, v) , $(0, 0)$, $(2U, 0)$ 为顶点三角形也完全确定了曲线 L_e , 我们把这个三角形三个顶点坐标合在一起, 并略去其中的常数 0, 有:

定义 11 $G_2(u, v) = (u, v, 2U)$ 称为曲线 L_e 上点 (u, v) 的点状基因。

这样我们就得曲线 L_e 点基因的两种坐标表示: G_1, G_2 。下面我们讨论足够光滑的平面曲线 $L: f(x, y) = 0$ 上点 (x, y) 的基因坐标表示。

定义 12 设点 (x, y) 是曲线 L 上任一点, 它的基因是 $G(x, y)$, 根据曲线族 M_e 的性质 4, 必存在唯一的 $L_e \in M_e$, L_e 有点 (u, v) 的基因 $G(u, v) = G(x, y)$, 我们称 $G_i(u, v)$ 也为曲线 L 上点 (x, y) 的 G_i 基因。即 $G_i(x, y) = G_i(u, v) (i = 1, 2)$ 。

根据定义 12: $G_i(x, y) = G_i(u, v) \Leftrightarrow G(x, y) = G(u, v) \Leftrightarrow g_1(x, y) = g_1(u, v)$ 且

$$g_2(x, y) = g_2(u, v) \Leftrightarrow R_1(x, y) = R_1(u, v) \text{ 且 } R(x, y)R_2(x, y) = R(u, v)R_2(u, v) \quad (15)$$

根据(15)式, 有

定理 1 足够光滑的平面曲线 $L: f(x, y) = 0$ 在点 (x, y) 的局部性质由: $R_1(x, y)$ 与 $R(x, y)R_2(x, y)$ 所决定。

下面求 L_e 上点 (u, v) 的 u, v 与 $R_1(u, v), R(u, v)R_2(u, v)$ 的关系

从 $\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u + 1} = e$, $\frac{dv}{du} = \frac{v^2 - u}{v(u + 1)}$, 可得

$$R_1(u, v) = -\frac{3v(v^2 - u)}{u + 1} \quad (16)$$

$$R_1^2(u, v) = 9v^2 \left[(1 + v^2)e^2 - v^2 \right] \quad (17)$$

$$R(u, v)R_2(u, v) = 3(1 + v^2) \left[e^2(1 + 2v^2) - 2v^2 \right] \quad (18)$$

从(17), (18)两式消去 e^2 可得:

$$9v^4 + (3RR_2 - 2R_1^2)v^2 - R_1^2 = 0 \quad (19)$$

从(17), (18)两式还可得:

$$e^2 = \frac{2(1 + v^2)R_1^2 - 3v^2RR_2}{9v^2(1 + v^2)} \quad (20)$$

解方程(19), 并取定一根

$$v = v(R_1(u, v), R(u, v)R_2(u, v)) = \frac{1}{6} \sqrt{2(2R_1^2 - 3RR_2) + 2\sqrt{(3RR_2 - 2R_1^2)^2 + 36R_1^2}} \quad (21)$$

代入(16)式:

$$u = \frac{R_1 + 3v^3}{3v - R_1} = u(R_1(u, v), R(u, v)R_2(u, v)) \quad (22)$$

将(21), (22)式中 $R_1(u, v), R(u, v)R_2(u, v)$ 分别换成曲线 L 点 (x, y) 的 $R_1(x, y), R(x, y)R_2(x, y)$ 得:

$$v = v(x, y) = v(R_1(x, y), R(x, y)R_2(x, y)) \quad (23)$$

$$u = u(x, y) = u(R_1(x, y), R(x, y)R_2(x, y)) \quad (24)$$

从(20)式还可得

$$e = e(x, y) = e(R_1(x, y), R(x, y)R_2(x, y)) \quad (25)$$

于是得到曲线上点 (x, y) 的线状基因

$$G_1(x, y) = (\sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}, u(x, y) + 1) \quad (26)$$

点状基因

$$G_2(x, y) = (u(x, y), v(x, y), 2U(x, y)) \quad (27)$$

其中 $U(xy) = \frac{e^2(x, y)}{1 - e^2(x, y)}$ 。

定义 13 将定义 9 中点 (x, y) 的基因 $G(x, y)$ 换成点 (x, y) 的基因 $G_i(x, y)$, 得到的曲线称为系统(1)

基因 G_i 的遗传曲线。 G_i 遗传曲线的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 由方程:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + H_i \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad (28)$$

确定。 G_i 遗传曲线的全体记为 $N_i (i = 1, 2)$ 。

$$\text{其中 } H_1 = \frac{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)_x^2 - \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)_y^2 + 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)_x \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)_y}$$

$$H_2 = \frac{(u)_x^2 - (u)_y^2 + (v)_x^2 - (v)_y^2 + 4U_x^2 - 4U_y^2}{(u)_x (u)_y + (v)_x (v)_y + 4U_x U_y}$$

例 4 求系统(13)的 N_1, N_2 。

为方便, 系统(13)的 $G_1(u, v) = (\sqrt{u^2 + v^2}, u + 1)$ 用极坐标表示: $G_1 = (\rho, 1 + \rho \cos \varphi)$ 。由(12)式有:

$$H_1 = \frac{-\rho^2(1 + \cos^2 \varphi) + \rho^2 \sin^2 \varphi}{-\rho \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{2\rho \cos \varphi}{\sin \varphi} \text{ 于是 } \left(\frac{d\rho^2}{d\varphi}\right) + \frac{2\rho \cos \varphi}{\sin \varphi} - \rho^2 = 0。$$

$$\text{解之得 } \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\cos \rho \pm 1)}{\sin \rho}。$$

$$\text{于是 } \rho = \frac{c}{1 + \cos \varphi}, \quad \rho = \frac{c}{1 - \cos \varphi}, \quad 0 < c < +\infty。$$

显然 $\rho = \frac{c}{1 + \cos \varphi}$ 不是 G_1 的遗传曲线, 所以 $N_1 = \left\{ \rho = \frac{c}{1 - \cos \varphi}; 0 < c < +\infty \right\}$, $M_e \cap N_1 = \left\{ \rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right\}$

从 $G_2(u, v) = (u, v, 2U)$ 得: $H_2 = \frac{U_u^2 - U_v^2}{U_u U_v}$, $\left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \frac{U_u^2 - U_v^2}{U_u U_v} \frac{dv}{du} - 1 = 0$ 。

解之得 $\frac{dv}{du} = -\frac{U_u}{U_v}$ (另一解 $\frac{dv}{du} = \frac{U_v}{U_u}$) 于是 $U = \frac{e^2}{1 - e^2} = \text{常数}$, 即 $N_2 = M_e$ 。

从例 4, 我们可以分析得到系统(1) $M \cap N$ 的一些性质:

1) $M \cap N$ 将 M 分成若干个独立的子系统;

2) 每个独立的子系统只含有椭圆型轨线, 抛物型轨线, 双曲型轨线之中的一种轨线, 不同型轨线不在同一子系统中。

在分析 G_1 与 G_2 哪个更适合作为基因的坐标表示时, 我们发现: 系统中基因越接近的点, 它们的密切中心 (X, Y) 相隔的距离也越小。根据这一现象, 有:

定义 14 将定义 9 点 (x, y) 的基因 G 换成点 (x, y) 的密切中心 (X, Y) , 得到的曲线称为系统(1)的中心遗传曲线, 它们的全体记为 N_3 。系统(1)中心遗传曲线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 由方程:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + H_3 \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \tag{28}$$

确定。 $H_3 = \frac{X_x^2 - X_y^2 + Y_x^2 - Y_y^2}{X_x X_y + Y_x Y_y}$ 。

对于系统(12)而言, 点 (u, v) 的密切中心为 $(U, 0)$ 。所以 $H_3 = \frac{U_u^2 - U_v^2}{U_u U_v} = H_2$, 于是

$$N_3 = N_2 = M_e$$

虽然点 (x, y) 的密切中心 (X, Y) 并不表示点 (x, y) 处轨线的性质, 但是它在轨线演变过程中, 有其自身的变化规律。如能掌握, 也能帮助我们找到系统的经线。除了用定义 9, 我们还可以其它方面考虑系统的经线问题。

4.2. g_1, g_2 的梯度与基因突变环

系统(1)轨线在点 (x, y) 处 $\text{grad}g_i = (g_{ix}, g_{iy})$ 的方向是 g_i 变化率最大的方向, g_i 沿方向

$\vec{l}_\beta = (\cos \beta, \sin \beta)$ 的方向导数为 $\frac{\partial g_i}{\partial l_\beta} = g_{ix} \cos \beta + g_{iy} \sin \beta (i = 1, 2)$ 。

定义 15 若方向 $\vec{l}_\beta = (\cos \beta, \sin \beta)$ 满足:

$$\frac{\partial g_1}{\partial l_\beta} / \frac{\partial g_2}{\partial l_\beta} = \frac{|\text{grad}g_1|}{|\text{grad}g_2|}$$

则称方向 \vec{l}_β 为基因 G 的(与梯度)同步遗传方向, 方程

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg} \beta \tag{29}$$

经过点 (x, y) 的积分曲线称为基因 G 的同步遗传曲线, 它们的全体记为 N_4 。其中

$$\text{tg} \beta = - \frac{g_{1x} \sqrt{g_{2x}^2 + g_{2y}^2} - g_{2x} \sqrt{g_{1x}^2 + g_{1y}^2}}{g_{1y} \sqrt{g_{2x}^2 + g_{2y}^2} - g_{2y} \sqrt{g_{1x}^2 + g_{1y}^2}}$$

显然 $M \cap N_4 = \left\{ \operatorname{tg} \beta = \frac{q}{p} \right\}$ 。系统(1)的 N_1, N_2, N_3 一般比较难求, 但 $M \cap N_i$ 都和 $M \cap N_4$ 一样容易求, 因为 $M \cap N_i = \left\{ H_i = \frac{p^2 - q^2}{pq} \right\} (i = 1, 2, 3)$ 。

定义 16 若系统(1)的轨线 $L \in M \cap N_i$, 则称 L 系统(1)的 N_i 分界环 ($i = 1, 2, 3, 4$)。

注意 N_i 分界环不一定是极限环。

通过 N_4 的定义可以看出, 等拱线: $g_1 = \text{常数}$, 等偏拱线: $g_2 = \text{常数}$, 等径线: $r_0 = \text{常数}$ 都是系统(1)的重要曲线。

定义 16

$$\Lambda_1(x, y) = \frac{r_{0x}g_{1y} - r_{0y}g_{1x}}{r_{0x}g_{1x} + r_{0y}g_{1y}} \tag{30}$$

称为系统(1)在点 (x, y) 的拱变度。

$$\Lambda_2(x, y) = \frac{r_{0x}g_{2y} - r_{0y}g_{2x}}{r_{0x}g_{2x} + r_{0y}g_{2y}} \tag{31}$$

称为系统(1)点 (x, y) 的偏拱变度。

$$\Lambda(x, y) = \frac{g_{1x}g_{2y} - g_{1y}g_{2x}}{g_{1x}g_{2x} + g_{1y}g_{2y}} \tag{32}$$

称为系统(1)点 (x, y) 的基因变异度。

如何通过这些变异度去求系统(1)的经线暂不讨论。我们考虑极限环:

定义 17 系统(1)中, $\Lambda(x, y)$ 在等径线 $r_0 = \text{常数}$ 上的极值点称为系统(1)的基因突变点。由基因突变点组成的曲线称为系统(1)的基因突变线, 其全体记为 N^* 。

显然 N^* 不是系统(1)的经线族, 但很重要, 因为我们猜测: 平面微分系统的任一极限环 L 都是系统的基因突变线, 即任一极限环 $L \in N^*$ 。

4.3. 平面曲线的全盈度

我们在文[2]定义了平面曲线的盈度, 并指出相对于拱度, 盈度应用起来不方便, 是因为没有合适的量与盈度配对完整地表示曲线的局部性质。下面解决这一问题。由于文[2]定义 1.3 有一点问题, 我们重新定义曲线的盈度。

设 L 是足够光滑的严格凸平面曲线, O 点是曲线 L 上一点, 以过 O 点的切线为 x 轴, 法线为 y 轴, 如图 1 建立直角坐标系。设曲线 L 的方程为: $y = y(x)$ 。

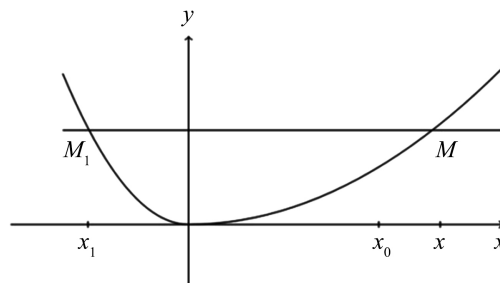


Figure 1. Curve $y = y(x)$

图 1. 曲线 $y = y(x)$

过 O 点附近曲线 L 点 $M(x, y)$ 作 x 轴的平行线与曲线 L 交于另一点 $M_1(x_1, y)$, 有 $y(x_1) = y(x)$, 由此确定 x_1 是 x 的函数并且由文[2]有: $x_1'(0) = -1$, $x_1''(0) = -\frac{2y'''(0)}{3y''(0)}$, $x_1'''(0) = -\frac{2y^{(4)}(0)}{3y''(0)}$ 。

曲线 L 在 O 点的密切圆: $f(x) = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2}$, $R_0 = \frac{1}{y''}(0)$ 。

在区间 $[x_1, x]$ 上曲线 L 的拱高为 $y(x)$, 弦长为 $x - x_1$, 在区间 $\left[-\frac{x-x_1}{2}, \frac{x-x_1}{2}\right]$ 上密切圆的拱高为 $f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)$, 弦长也是 $x - x_1$ 。两拱高之差与点 O 处曲线的曲率 $(R_0)^{-1}$ 之比 $\frac{y(x) - f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)}{(R_0)^{-1}} = 0(y^2)$ 。

因此有:

定义 18

$$\omega_1(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_0 \left[y(x) - f\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \right]}{y^2(x)} = \frac{3y''(0)y^{(4)}(0) - 9y''^4(0) - 5y'''^2(0)}{18y''^4(0)} \quad (32)$$

称为曲线 L 在 O 点(相对于圆弧)的主盈度。

因为 $\omega_1(0,0) = \frac{1}{18}(R_1^2(0,0) - 3R(0,0)R_2(0,0))$ 。

所以称

$$\omega_1(x,y) = \frac{1}{18}(R_1^2(x,y) - 3R(x,y)R_2(x,y)) \quad (33)$$

为曲线 L 在点 (x, y) 的主盈度。

下面考虑曲线 L 拱的弦长与密切圆拱的弦长的比较。

设密切圆在 x_0 点的拱高 $f(x_0)$ 与曲线 L 在 x 点的拱高相等: $f(x_0) = y(x)$ 。由此确定 x_0 与 x 的函数关系, 对 $f(x_0) = y(x)$ 两边关于 x 求导: $f'(x_0)x_0' = y'(x)$ 再求导: $f''(x_0)x_0'^2 + f(x_0)x_0'' = y''(x)$ 继续求导: $f'''(x_0)x_0'^3 + 3f''(x_0)x_0'x_0'' + f'(x_0)x_0''' = y'''(x)$ 可得 $x_0'(0) = 1$, $x_0''(0) = \frac{y'''(0)}{3y''(0)}$,

$$x_0'''(0) = \frac{3y''(0)y^{(4)}(0) - 9y''^4(0) - y'''^2(0)}{12y''^2(0)}。$$

在两拱高相等的情况下, 密切圆拱的弦长 $2x_0$, 并且 $\frac{x_0^2}{2} = f(x_0)\left(R_0 - \frac{f(x_0)}{2}\right)$ 。而曲线 L 拱的弦长为 $x - x_1$, 该弦被 y 轴分成两部分长度的乘积为 $|x_1|x$, 因为 $\frac{|x_1|x}{2} - \frac{x_0^2}{2} = 0(y^2)$, 所以有

定义 19

$$\omega_2(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x_1|x - x_0^2}{2y^2(x)} = \frac{1}{18}(3R(0,0)R_2(0,0) - 2R_1^2(0,0)) \quad (34)$$

称为曲线 L 在点 O 的偏盈度。

$$\omega_2(x,y) = \frac{1}{18}(3R(x,y)R_2(x,y) - 2R_1^2(x,y)) \quad (35)$$

为曲线 L 在点 (x, y) 的偏盈度。 $\Omega(x, y) = (\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$ 为曲线 L 在点 (x, y) 的全盈度。

显然曲线 L 点 (x, y) 的全盈度 $\Omega(x, y)$ 完全确定了曲线 L 点 (x, y) 的局部性质，是曲线基因的又一表示式。

讨论了曲线基因这么多不同表示，并定义了平面微分系统的曲线族 N_1, N_2, N_3, N_4 。它们中有没有系统的经线族 N ? 还有待确认。即使它们都不是系统的经线族 N ，也值得我们研究，因为它们从不同方面展示了平面微分系统轨线演变的规律。基于这一点有：

定义 20 系统(1)中曲线 $\Lambda(x, y) = \text{常数}$ 称为系统(1)的基因同变异线，记

$N_5 = \{\Lambda(x, y) = c; -\infty < c < +\infty\}$ 显然通过 N_5 ，我们可以知道系统(1)变异相同的点的运动轨迹。

本文根据存在极限环的系统的三个特殊性质 1), 2), 3), 讨论了极限环的求解问题，得到的结果是把百年未解决的问题：平面微分系统极限环的存在性与存在个数问题，归结为下面问题之一：

- 1) 求平面微分系统的经线族 N ;
- 2) 求出相似环的所有种类;
- 3) 证明任一极限环 $L \in M \cap N^*$ 。

对这三个问题我们另文讨论。

作为本文的结束，给出本文结果的一个应用。

例 5 求方程组 $\frac{dx}{dt} = y - F(x)$, $\frac{dy}{dt} = -x$, 其中

$$F(x) = \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \quad (36)$$

的 N_3 分界环。

方程组与 vanderPol 方程等价[3]。

从(36)式，得 $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y-F}$

$$y'' = -\frac{(y-F)^2 + xF'(y-F) + x^2}{(y-F)^3}$$

$$y''' = -\frac{(2F' + xF'')(y-F)^3 + (3x + 2xF'^2)(y-F)^2 + 5x^2F'(y-F) + 3x^3}{(y-F)^5}$$

$$y^{(4)} = -\frac{(3F'' + xF''')(y-F)^5 + (3 + 6F'^2 + 6xF'F'')(y-F)^4 + (23xF' + 7x^2F'' + 6xF'^3)(y-F)^3}{(y-F)^7}$$

$$+ \frac{(18x^2 + 26x^2F'^2)(y-F)^2 + 35x^3F'(y-F) + 15x^4}{(y-F)^7}$$

其中 $F' = \mu(x^2 - 1)$, $F'' = 2\mu x$, $F''' = 2\mu$ 。

代入文[2]的(3), (4)两式，得到方程(36)中点 (x, y) 的密切中心 (X, Y) 为：

$$X = x - \frac{3y''y'''}{3y''y^{(4)} - 5y''^2} = x - \frac{B}{A}$$

$$Y = y - \frac{3y''(y'y''' - 3y''^2)}{3y''y^{(4)} - 5y''^2} = y - \frac{C}{A}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=0}^6 a_i (y-F)^{6-i} \\
 B &= \sum_{i=0}^5 b_i (y-F)^{6-i} \\
 C &= \sum_{i=0}^5 c_i (y-F)^{6-i} \\
 a_0 &= 9F'' + xF''' \\
 a_1 &= 9 - 2F' + 7xF'F'' + 3x^2F'F''' \\
 a_2 &= 18xF' - 4xF'^3 - 2x^2F'^2F'' + 3x^3F''' \\
 a_i &= 0(x^2), \quad i = 3, 4, 5. \\
 b_0 &= 6F' + 3xF'' \\
 b_1 &= 9x + 12xF'^2 + 3x^2F'F'' \\
 b_i &= 0(x^2), \quad i = 2, 3, 4, 5. \\
 c_0 &= 9 \\
 c_1 &= 21xF' - 3x^2F'' \\
 c_i &= 0(x^2), \quad i = 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

因为 $p(x, y) = y - F$, $q(x, y) = -x$ 。

设轨线 $L \in M \cap N_3$, 则轨线 L 的斜率 $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$ 和正交曲线斜率 $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$ 是方程(28)的两个根。

于是 $H_3 = \frac{X_x^2 - X_y^2 + Y_x^2 - Y_y^2}{X_x X_y + Y_x Y_y} = \frac{p}{q} - \frac{q}{p}$ 。

即 $\frac{X_x^2 - X_y^2 + Y_x^2 - Y_y^2}{X_x X_y + Y_x Y_y} = \frac{(y-F)^2 - x^2}{x(y-F)}$ 。

$$[(y-F)^2 - x](X_x X_y + Y_x Y_y) - x(y-F)(X_x^2 - X_y^2 + Y_x^2 - Y_y^2) = 0$$

这是关于 $y-F$ 的 23 次方程。

令 $x=0$, 得 $y^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2\mu^2}{9}\right)$ 。

当 $\mu^2 < \frac{9}{2}$ 时, 方程组(36)有 N_3 分界环 L , 该环与 y 轴的两个交点为: $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{9}}$,

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{9}}$, 这说明该 N_3 分界环 L 是孤立的闭轨线, 即它是方程(36)极限环。

参考文献

- [1] 陈金和. 关于平面曲线的分类问题[J]. 南昌大学学报(理科版), 1997(4): 369-373.

-
- [2] 陈金和. 平面曲线局部性质的数值化与极限环[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 873-881.
<https://doi.org/10.12677/PM.2021.115100>
- [3] 王高雄, 等. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 299-300.