**Pure Mathematics** 理论数学, 2021, 11(10), 1691-1695
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110189

# 点态化完备代数正规类中的小理想

**杨宗文，娄本功**

云南大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2021年9月7日；录用日期：2021年10月7日；发布日期：2021年10月14日

## 摘 要

本文定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根R和R-半单类$S_R$与小理想相关的2个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根R是一个小理想遗传根的2个条件。

## 关键词

点态化完备代数正规类，小理想，小理想遗传根

# The Small Ideals in Normal Classes of Pointwise Complete Alagebra

**Zongwen Yang, Bengong Lou**

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 7th, 2021; accepted: Oct. 7th, 2021; published: Oct. 14th, 2021

## Abstract

**The small ideals and small ideals hereditary radicals in normal classes of pointwise complete algebras are defined, some properties of small ideals and two conditions (*) and (**) related to small ideals for radicals R and R-semisimple classes $S_R$ are discussed, and further two conditions that radical R is a small ideals hereditary radical are given.**

## Keywords

**Normal Classes of Pointwise Complete Algebras, Small Ideals, Small Ideals Hereditary Radicals**

文章引用：杨宗文，娄本功. 点态化完备代数正规类中的小理想[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1691-1695.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110189

## 1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一的研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、$\lambda$-根、正则根、$\kappa$-根和$\beta$-根的结构性质，文献[28]使用预根概念给出了根类的一个映射刻画，文献[29]定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根 $\beta$、正则根 $\nu$、遗传幂等根 $\chi$、$\lambda$-根 $\lambda$、幂等代数根 $\iota$ 都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足 $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$。

本文在文献[24]-[29]建立的点态化完备代数正规类基础上，定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根 R 和 $S_R$ 与小理想相关的 2 个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根 R 是一个小理想遗传根的 2 个条件。

## 2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24]-[29]，为了建立每个代数的子代数乘积与 $S_a$ 中点乘积之间的联系，本文使用文献[26] [27]中强化了的点乘积公理。

首先引入一些基本概念及引理。

**引理 2.1 [15]：** $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$k \lhd i$，$\bar{k}$ 是 $a$ 的包含 $k$ 的最小理想。则 $\bar{k} = k \vee ak \vee ka \vee aka$，且 $\bar{k}^3 \le k$。

**定义 2.2 [25]：** $a \in \mathscr{A}$，如果 $\forall i \lhd a$，都有 $i^2 = i$，则称代数 $a$ 是遗传幂等的。

**引理 2.3：** $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$a$ 是 $\mathscr{A}$ 中遗传幂等代数，则：

(1) $j \lhd i \lhd a$，则 $j \lhd a$；

(2) $i \lhd a$，则 $i$ 是遗传幂等代数。

**证明：**(1) $j \lhd i \lhd a$，设 $\bar{j}$ 是 $a$ 的包含 $j$ 的最小理想，则由引理 2.1 有 $\bar{j}^3 \le j$。$a$ 是遗传幂等代数，$\bar{j} \lhd a$，从而 $\bar{j}^2 = \bar{j}$，$\bar{j}^3 = \bar{j}^2\bar{j} = \bar{j}\bar{j} = \bar{j}$，故 $j = \bar{j} \lhd a$，则 $i$ 是遗传幂等代数；

(2) $i \lhd a$，$\forall j \lhd i$，由(1)都有 $j \lhd a$，从而 $j^2 = j$，即 $i$ 是遗传幂等代数。证毕。

## 3. 点态化完备代数正规类中的小理想

本节引入点态化完备代数正规类中的小理想概念，讨论点态化完备代数正规类中的小理想一些相关性质。

**定义 3.1：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类。

(1) $a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $\forall j \lhd a$，由 $i \vee j = a$，则必有 $j = a$，则称 $i$ 是代数 $a$ 的小理想，记为 $i \lhd_s a$；

(2) $a \in \mathscr{A}$，存在 $b \in \mathscr{A}$，使得 $a \lhd_s b$，则称 $a$ 是一个小代数；

(3) R 是一个根，$a \in \mathscr{A}$ 是 R-根代数，$\forall i \lhd_s a$，都有 $i$ 是 R-根代数，则称 R 是一个小理想遗传根。

**例 3.2：**(1) $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a$ 是任意代数，则 0 都是 $a$ 的小理想，称 0 是 $a$ 的平凡小理想；

(2) $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a$ 是非 0 代数，则 $a$ 是 $a$ 的理想，但 $a$ 不是 $a$ 的小理想，从而小理想与理想是不同的概念；

(3) $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a \neq 0$ 是有心 $h$ 的亚直既约代数，$h \neq a$，则 $h$ 是 $a$ 的小理想。

小理想有下面的性质：

**引理 3.3：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a$ 是任意代数，$i \lhd_s a$，则 $\forall j \lhd a$，都有 $(i \vee j)/j \lhd_s a/j$。

**证明：**(1) 设 $j < k \lhd a$，$k/j \lhd a/j$，则 $((i \vee j)/j) \vee (k/j) = (i \vee j \vee k)/j = a/j$，从而 $i \vee j \vee k = a$。由 $i \lhd_s a$ 得 $j \vee k = a$，所以 $k = j \vee k = a$，因此 $k/j = a/j$，即 $(i \vee j)/j \lhd_s a/j$。证毕。

**引理 3.4：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a$ 是任意代数，$i \lhd_s a$，$m$ 是 $a$ 的极大理想，则 $i \leq m$。

**证明：**如果 $i \not\leq m$，则 $m \leq i \vee m \lhd a$，且 $m \neq i \vee m$，由于 $m$ 是 $a$ 的极大理想，因此 $i \vee m = a$。由 $i \lhd_s a$ 得 $m = a$，与 $m$ 是 $a$ 的极大理想矛盾，所以 $i \leq m$。证毕。

**定理 3.5：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a$ 是一个代数，$\forall i \lhd a$，$i \neq a$，都存在 $a$ 的极大理想 $m$，使得 $i \leq m$。则 $\forall i \lhd a$，$i \lhd_s a \Leftrightarrow i \leq \wedge\{m \mid m\text{是}a\text{的极大理想}\}$。

**证明：**“$\Rightarrow$” $\forall i \lhd_s a$，$\forall a$ 的极大理想 $m$，由引理 3.4 知 $i \leq m$，从而 $i \leq \wedge\{m \mid m\text{是}a\text{的极大理想}\}$。

“$\Leftarrow$” $i \lhd a$，$i \leq \wedge\{m \mid m\text{是}a\text{的极大理想}\}$。如果 $i$ 不是 $a$ 的小理想，则存在 $j \lhd a$，$j \neq a$，使得 $i \vee j = a$。由定理 3.5 条件知存在 $a$ 的极大理想 $m$，使得 $j \leq m$，从而 $i \vee m = a$。又因为 $i \leq m$，因此 $i \vee m = m$，故 $m = a$，与 $m$ 是 $a$ 的极大理想矛盾，所以 $i$ 是 $a$ 的小理想。证毕。

**定理 3.6：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$X$ 为 $\mathscr{A}$ 中的同态闭代数类，$a \in \mathscr{A}$，$a$ 的所有非 0 同态像都不在 $X$ 中。如果 $i \lhd a$，$i \in X$，则 $i \lhd_s a$。

**证明：**设 $j \lhd a$，$i \vee j = a$，由 $X$ 同态闭及 $i \in X$ 有 $a/j = (i \vee j)/j \cong i/(i \wedge j) \in X$，又由 $a$ 的所有非 0 同态像都不在 $X$ 中，则得 $a/j = 0$，从而 $j = a$，故 $i \lhd_s a$。证毕。

**推论 3.7：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a \in \mathscr{A}$ 是幂等代数。如果 $i \lhd a$ 是幂 0 理想，则 $i \lhd_s a$。

**证明：**取 $X$ 为幂 0 代数类，则 $X$ 为 $\mathscr{A}$ 中的同态闭的代数类；$a$ 是幂等代数，则 $a$ 的所有非 0 同态像都是幂等代数，都不在 $X$ 中，由定理 3.6 即得 $i \lhd_s a$。证毕。

$\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，$S_R$ 是 R-半单类。下面是根 R 与 $S_R$ 与小理想相关的 2 个条件：

(*) $\forall a \in S_R$，$i \lhd_s a$，都有 $a/i \in S_R$；

(**) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd_s a$ 且 $a/i \in R \Rightarrow a \in R$。

下面首先讨论根 R 的条件(*)与(**)的性质。

**引理 3.8：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，$S_R$ 是 R-半单类。则 $S_R$ 满足条件(*) $\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd_s a$ 有 $R(a/i) = (R(a) \vee i)/i$。

**证明：**“$\Rightarrow$”$S_R$ 满足条件(*)，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd_s a$ 且 $a/i \in R$，则 $(i \vee R(a))/R(a) \lhd_s a/R(a)$，$a/R(a) \in S_R$，有 $\dfrac{a/i}{(i \vee R(a))/i} \cong \dfrac{a}{i \vee R(a)} \cong \dfrac{a/R(a)}{(i \vee R(a))/R(a)} \in S_R$，所以 $R(a/i) \leq (i \vee R(a))/i$。又 $(i \vee R(a))/i \cong R(a)/(R(a) \wedge i) \in R$，从而 $(i \vee R(a))/i \leq R(a/i)$，故 $R(a/i) = (i \vee R(a))/i$；

“$\Leftarrow$” $\forall a \in S_R$，$i \lhd_s a$，都有 $R(a/i) = (i \vee R(a))/i \cong R(a)/(i \wedge R(a)) = 0$，即 $a/i \in S_R$。证毕。

**引理 3.9：** $\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，$S_R$ 是 R-半单类。$S_R$ 满足条件(*)，则 R 满足条件(**)。

**证明：**$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd_s a$ 且 $a/i \in R$，则 $a/i = (i \vee R(a))/i$，所以 $i \vee R(a) = a$，从而 $R(a) = a$，即 $a \in R$，R 满足条件(**)。证毕。

**定理 3.10**：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个满足条件(**)的根类，$a\in\mathscr{A}$ 是心为 $h(a)$的 R-半单亚直既约代数。则 $a/h(a)\in S_R$。

**证明**：设 $R(a/h(a))=b/h(a)$，$b\lhd a$，如果 $R(a/h(a))\neq 0$，则 $b$ 也是心为 $h(a)$的亚直既约代数，故 $h(a)\lhd_s b$，$b/h(a)=R(a/h(a))\in R$，由条件(**)有 $b\in R$，与 $a$ 是 R-半单代数矛盾，所以 $R(a/h(a))=0$。证毕。

**定理 3.11**：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个满足条件(**)的根类，$a\in\mathscr{A}$ 是遗传幂等的 R-半单代数。则 $\forall i\lhd a$，$a/i\in S_R$。

**证明**：对 $i\lhd a$，设 $R(a/i)=b/i$，$b\lhd a$，令 $M_i=\{j\lhd b\mid i\vee j=b\}$。设 $\{j_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 $M_i$ 中一个降链，$c=\wedge\{j_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$，则 $i\vee c=i\vee\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{\wedge}j_\lambda\right)=\underset{\lambda\in\Lambda}{\wedge}\{i\vee j_\lambda\}=\underset{\lambda\in\Lambda}{\wedge}b=b$，由 Zorn 引理知 $M_i$ 中有极小元 $k$，从而 $b/i=(i\vee k)/i\cong k/(k\wedge i)$。设 $l\lhd k$ 且 $k=(k\wedge i)\vee l$，则 $b=i\vee k=i\vee((k\wedge i)\vee l)=i\vee l$。由 $l\lhd k\lhd b\lhd a$ 及引理 2.3 知 $l\lhd a$；由 $k$ 在 $M_i$ 中的极小性得 $l=k$，故 $k\wedge i\lhd_s k$ 且 $k/(k\wedge i)\cong b/i\in R$，由 R 满足条件(**)有 $k\in R$。又 $k\lhd a$，$a\in S_R$，因此 $k=0$，从而 $b/i\cong k/(k\wedge i)=0$，即 $a/i\in S_R$。证毕。

**引理 3.12**：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 是一个根，则：R 是一个小理想遗传根 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 代数 $a$，$\forall i\lhd_s a$，都有 $R(i)=i\wedge R(a)$。

**证明**：“$\Rightarrow$”R 是一个小理想遗传根，$\forall$ 代数 $a$，$\forall i\lhd_s a$，有 $R(i)\lhd a$，从而 $R(i)\leq R(a)$，故 $R(i)\leq i\wedge R(a)$；又因为 $i\wedge R(a)\lhd R(a)$，故 $R(i\wedge R(a))=i\wedge R(a)\lhd i$，因此 $i\wedge R(a)\leq R(i)$。所以 $R(i)=i\wedge R(a)$。

“$\Leftarrow$”$\forall$ 代数 $a$，$R(a)=a$，$\forall i\lhd_s a$，则 $R(i)=i\wedge R(a)=i\wedge a=i$，即 $i$ 是 $a$ 的 R 代数，从而 R 是一个小理想遗传根。证毕。

**定理 3.13**：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，$S_R$ 是 R-半单类。如果 $S_R$ 满足：

(***) $\forall a\in\mathscr{A}$，存在 $i\lhd_s a$ 且 $0\neq i\in S_R$，则有 $a\in S_R$。

则 R 是一个小理想遗传根。

**证明**：$\forall a\in R$，$i\lhd_s a$，如果 $R(i)\neq i$（从而 $i\neq a$），则 $R(i)\lhd a$，考虑 $a/R(i)$，由引理 3.3 有 $i/R(i)=(i\vee R(i))/R(i)\lhd_s a/R(i)$，$0\neq i/R(i)\in S_R$，由条件(***)知 $a/R(i)\in S_R$，故 $R(a)\leq R(i)$，所以 $R(i)=R(a)=a$，因此 $i=a$，与 $i\neq a$ 矛盾，所以 $R(i)=i$，即 $i\in R$。因此 R 是一个小理想遗传根。证毕。

## 4. 小结

本文定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根 R 和 R-半单类 $S_R$ 与小理想相关的 2 个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根 R 是一个小理想遗传根的 2 个条件。

## 基金项目

国家自然科学基金(11861076)；云南省自然科学基金(2019FB139)。

## 参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7254

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens Radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] 蔡传仁. 对偶根和 F.A.SZASZ 的问题 21 [J]. 数学学报: 中文版, 1989, 32(3): 394-400.

[6] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-12.

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君. 关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-22.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6) :113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. Southeast *Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554. https://doi.org/10.12677/pm.2018.85072

[25] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722. https://doi.org/10.12677/pm.2018.86096

[26] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 $\lambda$-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842. https://doi.org/10.12677/pm.2019.97109

[27] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014. https://doi.org/10.12677/pm.2019.99127

[28] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1138-1144. https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012135

[29] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的低幂等根[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 1-6. https://doi.org/10.12677/pm.2021.111001