Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1696-1701
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110190

Hans汉斯

商的分部积分法及其应用

王　琦，尤卫玲*

广东开放大学公共教学部，广东 广州

收稿日期：2021年9月6日；录用日期：2021年10月7日；发布日期：2021年10月14日

摘　要

从某种意义上来讲，求函数的不定积分是一种运算，牛顿－莱布尼茨公式(微积分基本定理)揭示了定积分与不定积分的联系，为解决定积分以及多重积分乃至曲线积分和曲面积分问题提供了极大的方便，因而求函数的不定积分在积分学习中占有极其重要的地位。求不定积分运算可视为求导的逆运算，因而在现有市面教材中由函数和、差、积的求导法则相应推出了函数和、差、积(分部积分公式)的积分法则，而唯独没有商的积分法则。本文通过函数商的求导法则推导出函数商的积分法则，我们称之为商的分部积分法则。通过历年全国硕士研究生入学统一考试试题和广东省大学生数学竞赛试题作为例子说明商的分部积分法则的应用。该法则为解决被积函数中有分式的积分提供了一种思路。

关键词

不定积分，导数，商的分部积分

Division Integral Method of Quotient and Its Application

Qi Wang, Weiling You*

Department of Public Teaching, The Open University of Guangdong, Guangzhou Guangdong

Received: Sep. 6th, 2021; accepted: Oct. 7th, 2021; published: Oct. 14th, 2021

Abstract

In a sense, the indefinite integral of a function is an operation. Newton-Leibniz formula (The Fundamental Theorem of Calculus) reveals the relationship between definite integral and indefinite integral, which provides great convenience for solving definite integral, multiple integral, and even curve integral and surface integral. Therefore, the indefinite integral of a function occupies

*通讯作者。

文章引用: 王琦, 尤卫玲. 商的分部积分法及其应用[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1696-1701.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110190

an extremely important position in integral learning. The indefinite integral operation can be regarded as an inverse operation for derivation. Therefore, in the existing market teaching materials, the integral laws of the sum, difference and integral (partial integral formula) of indefinite integral are derived from the derivative laws of function sum, difference and integral, but there is only no integral law of quotient. In this paper, the integral law of function quotient is derived from the derivative law of function quotient, which is called the quotient partial integral law. The application of the quotient' s partial integral rule is illustrated by examples of the national unified entrance examination for postgraduate students and the mathematical competition test for college students in Guangdong Province over the years. This rule provides a way of thinking for solving the integral of fraction in the integrand function.

Keywords

Indefinite Integral, Derivative, The Division Integration Method of Quotient

1. 引言

众所周知，在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分[1]，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$。函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数即是函数 $f(x)$ 的所有原函数，函数 $f(x)$ 的不定积分事实上是函数 $f(x)$ 的原函数的全体，是一个函数族。因而求一个函数的不定积分即是求它的原函数，在某种程度上来讲，求不定积分运算与求导运算是互逆的运算，这就类似于开方运算与平方运算是互逆的运算一样。

牛顿–莱布尼兹公式(Newton-Leibniz Formula) (微积分基本定理) [2]揭示了定积分与被积函数的原函数或者不定积分之间的联系，将定积分的计算问题转化为求原函数(计算不定积分)的问题，因而不定积分运算在积分运算中占有相当重要的地位。

求不定积分运算和求导运算是互逆的运算，因而其法则也应有对应，在现有市面教材中[3]，唯独没有与函数商的求导法则对应的函数商的不定积分法则。本文首先回顾函数求导法则与函数积分法则，然后推导出函数商的分部积分法则，通过历年全国硕士研究生入学统一考试试题和广东省大学生数学竞赛试题为例子说明函数商的分部积分法则的应用。值得注意的是，历年全国硕士研究生入学统一考试试题中的不定积分问题绝大多数都可以通过商的分部积分法则加以解决。

2. 求导法则与不定积分法则对照

假定下列所述函数都满足可导或可积的条件。那么函数和、差、积的求导法则以及复合函数的求导法则分别为

(1) $\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left(F\left(u(x)\right)\right)'=F'\left(u(x)\right)\cdot u'(x)$。

与上面(1)、(2)和(3)对应的积分法则分别为

(1') $\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$；

(2') $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$；

(3') $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u(x))\mathrm{d}(u(x)) = \int f(u)\mathrm{d}u$；

其中 $u = u(x)$。

(2')称为分部积分公式，(3')称为第一换元积分(凑微分)，它们分别对应于函数积的求导法则(2)和复合函数求导法则(3)。

3. 商的分部积分法则

首先回顾一下商的求导法则。如果函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都在点 x 可导，那么它们的商(除分母为零的点外)在点 x 也可导，且

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}。$$

整理上式，得

$$u(x)\cdot\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)}{v(x)} - \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)',$$

在等式两端同时积分得

$$\int u(x)\cdot\frac{v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x = \int\frac{u'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x - \int\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\mathrm{d}x = \int\frac{u'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x - \frac{u(x)}{v(x)},$$

即有商的分部积分法则：

$$\int u(x)\cdot\frac{v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x = \int\frac{u'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x - \frac{u(x)}{v(x)}。\tag{*}$$

该法则也可由积的分部积分法则(分部积分公式)推导得到。事实上，由

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

取 $f(x) = u(x)$， $g(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ 代入上式得

$$-\int u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{u(x)}{v(x)} - \int\frac{u'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x,$$

整理即得(*)。

商的分部积分法则的特点是：左端的被积函数中分母为一个函数 $v(x)$ 的平方，而分子是函数 $v(x)$ 的导数与另一函数 $u(x)$ 的乘积，即 $u(x)\cdot\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$，通过法则，转化为计算函数 $u(x)$ 的导数与函数 $v(x)$ 的商 $\dfrac{u'(x)}{v(x)}$ 的不定积分与函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 的差。转化后积分较之于原来的积分要容易计算。因而在实际运用过程中，如何选取商的分部积分法则中的 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是解题的关键。

特别地，当 $u(x)=1$ 时，公式(*)简化为

$$\int \frac{v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{v(x)}+C。$$

下面我们通过具体的例子说明商的分部积分法则的应用。

例 1 (2001 年考研数一) 求 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$。

【分析】先利用第二换元积分法进行换元，然后再利用商的分部积分法则公式(*)，关键是确定公式中的 $u(x)$ 和 $v(x)$。

解：令 $\arctan \mathrm{e}^x=t$，则 $\mathrm{e}^x=\tan t$， $x=\ln\tan t$， $\mathrm{d}x=\frac{(\tan t)'}{\tan t}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \frac{t}{\tan t}\cdot\frac{(\tan t)'}{\tan^2 t}\mathrm{d}t。$$

令 $I=\int \frac{t}{\tan t}\cdot\frac{(\tan t)'}{\tan^2 t}\mathrm{d}t$，取 $u(t)=\frac{t}{\tan t}$， $v(t)=\tan t$，则由商的分部积分法则公式(*)可知

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{t}{\tan t}\cdot\frac{(\tan t)'}{\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\left(\frac{t}{\tan t}\right)'}{\tan t}\mathrm{d}t-\frac{\frac{t}{\tan t}}{\tan t}=\int \frac{\tan t-t(\tan t)'}{\tan^2 t}\frac{1}{\tan t}\mathrm{d}t-\frac{t}{\tan^2 t}\\&=\int \cot^2 t\mathrm{d}t-I-\frac{t}{\tan^2 t}=-\cot t-t-I-\frac{t}{\tan^2 t}+C_1,\end{aligned}$$

于是 $I=-\frac{1}{2}\left(\cot t+t+\frac{t}{\tan^2 t}\right)+C=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}+\arctan \mathrm{e}^x+\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$，其中 $C=\frac{1}{2}C_1$。

因而 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}+\arctan \mathrm{e}^x+\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$。

例 2. (2013 年考研数一) 求 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$。

【分析】原积分为无穷限的广义积分，因而关键是计算不定积分 $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$，找到被积函数 $\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ 的原函数，注意到 $\frac{\ln x}{(1+x)^2}=\frac{\ln x(1+x)'}{(1+x)^2}$，因而取 $u(x)=\ln x$， $v(x)=1+x$，代入公式(*)即可求得被积函数的原函数。

解：取 $u(x)=\ln x$， $v(x)=1+x$，利用商的分部积分法则公式(*)得

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x&=\int \frac{\ln x(1+x)'}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{(\ln x)'}{1+x}\mathrm{d}x-\frac{\ln x}{1+x}=\int \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x-\frac{\ln x}{1+x}\\&=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\frac{\ln x}{1+x}=\ln|x|-\ln|1+x|-\frac{\ln x}{1+x}+C=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{\ln x}{1+x}+C,\end{aligned}$$

因而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\left[\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{\ln x}{1+x}\right]_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{\ln x}{1+x}\right]-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x}-\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}+\ln 2=\ln 2。$$

例 3. (2018 年考研数一) 求 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ 。

【分析】先利用第二换元积分法进行换元，然后再利用商的不定积分法则公式(*)，关键是确定公式中的 $u(x)$ 和 $v(x)$。

解：令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$ ，则 $\mathrm{e}^x=t^2+1$ ， $x=\ln\left(t^2+1\right)$ ， $\mathrm{d}x=\frac{\left(t^2+1\right)'}{t^2+1}\mathrm{d}t$ ，于是

$$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int\left(t^2+1\right)^3\arctan t\cdot\frac{\left(t^2+1\right)'}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t\ 。$$

令 $I=\int\left(t^2+1\right)^3\arctan t\cdot\frac{\left(t^2+1\right)'}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t$ ， 取 $u(t)=\left(t^2+1\right)^3\arctan t$ ， $v(t)=t^2+1$ ， 则由商的分部积分法则公式(*)可知

$$\begin{aligned}I&=\int\left(t^2+1\right)^3\arctan t\cdot\frac{\left(t^2+1\right)'}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\left(\left(t^2+1\right)^3\arctan t\right)'}{t^2+1}\mathrm{d}t-\frac{\left(t^2+1\right)^3\arctan t}{t^2+1}\\&=\int\frac{6t\left(t^2+1\right)^2\arctan t+\left(t^2+1\right)^2}{t^2+1}\mathrm{d}t-\left(t^2+1\right)^2\arctan t\\&=3\int 2t\left(t^2+1\right)\arctan t\mathrm{d}t+\int\left(t^2+1\right)\mathrm{d}t-\left(t^2+1\right)^2\arctan t\\&=3I+\frac{1}{3}t^3+t-\left(t^2+1\right)^2\arctan t+C_1,\end{aligned}$$

于是 $I=-\frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^2\arctan t+C$ ，其中 $C=-\frac{1}{2}C_1$ 。

因而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x&=-\frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^2\arctan t+C\\&=-\frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}}{6}-\frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C。\end{aligned}$$

例 4. (第七届广东省大学生数学竞赛) 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 。

【分析】被积函数中出现了分式，且分母为平方形式，而分子为两项做差，因而可考虑拆分为两部分，一部分用商的分部积分公式，一部分用乘积的分部积分公式。

解：因为 $\int e^{\sin x}\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int xe^{\sin x}\cos x dx+\int e^{\sin x}\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx$，而

$$\int xe^{\sin x}\cos x dx=\int xe^{\sin x}d(\sin x)=\int x d\left(e^{\sin x}\right)=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx+C_1。$$

对于积分 $\int e^{\sin x}\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx$，取 $u(x)=e^{\sin x}$， $v(x)=\cos x$，由商的分部积分法则公式(*)可知

$$\int e^{\sin x}\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\left(e^{\sin x}\right)'}{\cos x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}=\int e^{\sin x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C_2。$$

因而

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int xe^{\sin x}\cos x dx+\int e^{\sin x}\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C,$$

其中 $C=C_1+C_2$。

4. 小结

被积函数中含有分母的不定积分往往比较难计算，这时可考虑寻找合适的 $u(x)$ 和 $v(x)$，利用商的分部积分法则加以解决。商的分部积分法则对解决被积函数中含有分母的不定积分提供了一种思路，通过历年全国硕士研究生入学统一考试试题中的不定积分题目笔者发现，绝大多数都可以通过商的分部积分法则加以解决。因而这个法则必须引起重视，对于解决一些特殊积分会带来极大方便。

基金项目

2018 年度广西高校中青年教师基础能力提升项目(离散系统理论及应用研究，No. 2018KY0327)，广东理工职业学院 2020 年“创新强校工程”项目(创新创业教育背景下的《高等数学》在线开放课程建设，No. 2020LGCQ03-01)，广东开放大学基金项目(离散系统动力学研究，No. RC1926)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第七版上册. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[2] Stewart, J. (2011) Single Variable Calculus. 7th Edition, Thomson Brooks/Cole.

[3] 朱健民, 李建平. 高等数学[M]. 第二版上册. 北京: 高等教育出版社, 2015.