

三角形晶格Ising 模型的Julia 集

杨存基

大理大学数学与计算机学院, 云南 大理

收稿日期: 2021年10月6日; 录用日期: 2021年11月9日; 发布日期: 2021年11月16日

摘 要

本文刻画了三角形晶格上Ising 模型重整化变换函数Julia 集的连通性和Hausdorff 维数。

关键词

Ising 模型, Julia 集, Hausdorff维数, 连通性

Julia Set of the Triangular Lattice Ising Model

Cunji Yang

College of Mathematics and Compute, Dali University, Dali Yunnan

Received: Oct. 6th, 2021; accepted: Nov. 9th, 2021; published: Nov. 16th, 2021

Abstract

In this paper, we study the connectivity and the Hausdorff dimension of Julia sets in triangular lattice Ising model.

Keywords

Ising Model, Julia Set, Hausdorff Dimension, Connectivity

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言及主要结果

统计物理中相变理论的核心问题是求临界指数和标度律, 阐明相变的根源。解决这些问题的最初途径是直接求配分函数, 配分函数包含了统计平衡系统几乎全部热力学信息, 并能描述相位和相变。1952 年杨振宁和李政道 [1,2] 建立的杨-李理论就是通过配分函数的零点分布来揭示相变的本质, 配分函数被拓广为复变函数, 从而揭示了相变点在复平面上的本质特征。上世纪八十年代以来广受重视的重整化群方法, 为研究相变问题提出了崭新的途径 [3]。近年来, 人们发现重整化变换的 Julia 集往往对应配分函数零点的极限集, 重整化变换的复动力系统引起人们的研究兴趣 [4,5]。

Ising 模型是最简单也是最受关注的统计物理模型。考虑三维空间上具有 N 个固定格点的晶体, 在每个格点上放置一个粒子。晶体的格点以周期点阵排列, 点阵的几何结构可以是简单立方体、梯形立方和六角形等。粒子在晶体上的自变量以 $s_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 表示, s_j 只能取 1 或 -1 两个值。 $s_j = 1$ 表示粒子的自旋朝上, $s_j = -1$ 表示粒子的自旋朝下。当一组变数 s_j 给定后, 就完全确定了系统的一个微观状态, 再假设每个自旋只和它最近邻的自旋有相互作用, 把这个模型称为 Ising 模型。Ising 模型不仅仅是一个精美的理论模型, 它的实际用途也十分广泛。首先, 它可以用来讨论固态物理中最有趣的铁磁相变现象。其次, Ising 模型还可以用来讨论二元合金的有序无序相变, 以及核物理的相变等。此外, Ising 模型还有十分重要的推广价值, 对晶格上粒子的可能状态数加以推广, 可以得到另一个重要的统计物理模型即 Potts 模型 [6]。

求三维 Ising 模型的配分函数是十分困难的问题, 这是统计物理中至今没有解决的重要问题之一。严格求解二维 Ising 模型也有很多困难。1944 年, Onsager [7] 考虑不含外磁场的情况, 巧妙运用转移矩阵方法解决了这一问题。随后, 杨振宁 [8] 又准确计算了二维 Ising 模型的自发磁化强度。考虑二维等边三角形晶格上的 Ising 模型, 1973 年, Niemeijer 和 Van Leeuwen [9] 就提出实空间的重整化群方法。在二维等边三角形晶格上取三个自旋组成一个块体, 他们导出了重整化变换函数

$$f(z) = 2z \left(\frac{\exp(4z) + 1}{\exp(4z) + 3} \right)^2 \quad (1)$$

这里 $z = \frac{\varepsilon}{kT}$, ε, k 为常数, T 为温度。关于二维等边三角形晶格上的 Ising 模型重整化变换

$f(z)$, 作者在文献 [6] 中讨论了 $f(z)$ 的不动点和不变域, 得到 $f(z)$ 仅有 $z_1 = 0$ 吸性不动点和 $z_2 = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2})$ 斥性不动点, 并且存在包含 x 轴 z_2 左边部分的吸性不变域 D_0 和存在包含 x 轴 z_2 右边部分的 Baker 不变域 D_1 。该文还讨论了 $f(z)$ 的奇异点的分布和奇异值, 得到如下结论:

定理 A ([6]) 设 $f(z)$ 为由 (1) 定义的三角形晶格上的 Ising 模型的重整化变换函数, 则

(I) $z_k = \frac{2k+1}{4}\pi i$ 和 $z'_k = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{2k+1}{4}\pi i, k \in \mathbb{Z}$ 是 $f(z)$ 的临界点;

(II) 除 $z_k, z'_k, k \in \mathbb{Z}$ 之外的临界点 $z = x + iy$ 满足下列条件

$$y = \pm \frac{(\exp(8x) - 3)}{16 \exp(4x)(\exp(8x) + 3)} \sqrt{\exp(16x) - (256x^2 + 128x + 10) \exp(8x) + 9}$$

其中的取值范围为: 当 $x < 0$ 时,

$$\frac{1}{16}(\exp(4x) - 3 \exp(-4x)) \leq y \leq \frac{1}{16}(3 \exp(-4x) - \exp(4x));$$

当 $x > x_2$ 时,

$$\frac{1}{16}(3 \exp(-4x) - \exp(4x)) \leq y \leq \frac{1}{16}(\exp(4x) - 3 \exp(-4x));$$

其中 x_2 为方程 $16x + 4 = \exp(4x) + \frac{3}{\exp(4x)}$ 的非零解, 并且 $x_2 \in (\frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}), 1)$, 且其值大约为 0.7。

定理 B ([6]) 设 $f(z)$ 为由 (1) 定义的三角形晶格上的 Ising 模型的重整化变换函数, 则 $f(z)$ 的奇异值为 0 及

$$\frac{1}{128z_n \exp(8z_n)} (\exp(4z_n) + 1)^4,$$

其中 z_n 为除 $z_k, z'_k, k \in \mathbb{Z}$ 之外的有限临界点。

本文讨论了由 (1) 定义的三角形晶格上的 Ising 模型的重整化变换函数 $f(z)$ 的 Julia 集的连通性和 Hausdor 维数, 我们得到如下主要的结果:

定理 1 函数 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 的 Hausdor 维数大于 1, 即 $\dim_H J(f) > 1$ 。

定理 2 函数 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 由不可数分支构成。

2. 概念及引理

设 \mathbb{C} 为复平面, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为非线性的有理函数或整函数, f 的 n 次迭代记为 f^n , f 的 n 次逆向迭代记为 f^{-n} 。 f 的正规点的集合称为 f 的 Fatou 集, 记为 $F(f)$ 。 $F(f)$ 的余集称为 f 的 Julia 集, 记为 $J(f)$ 。 设 $\widehat{\mathbb{C}}$ 为扩充复平面, 设 f 为亚纯函数, 一个点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ 称为 f 的临界点, 如果 $f'(z_0) = 0$ 或 z_0 为 $f(z)$ 的多重极点, 而 $a = f(z_0)$ (包括无穷) 称为 $f(z)$ 的临界值。 一个点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ 称为 f 的渐近值, 若存在一条在复平面上延伸到无穷的曲线 Γ , 使得沿着 Γ 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z) \rightarrow a$ 。 $f(z)$ 的有限临界值和渐近值及其它们的极限点统称为 $f(z)$ 的奇异值。 有关复解析动力系统的相关概念和性质参见 Beardon [10], Carleson 和 Gamelin [11], Milnor [12], 任福尧 [13] 和郑建华 [14] 等相关文

献。

记 $\mathfrak{R} = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ 是次数至少为 } 2 \text{ 的有理函数}\}$;

$\mathfrak{M} = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ 是超越亚纯函数或是次数至少为 } 2 \text{ 的有理函数}\}$;

$\varphi(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \text{ 且 } z \notin J_\infty(f)\}$ 其中 $J_\infty(f) = O_{(\infty)}^- \cup \{\infty\}$,

$\mathfrak{P} = \{f \mid \text{存在一个 } \textit{Mobius} \text{ 变换 } M(z) \text{ 使得 } M^{-1} \circ f \circ M(z) = z^k \exp(S(z) + T(\frac{1}{z}))\}$,

其中 k 是整数, $S(z)$ 和 $T(z)$ 是整函数。

引理 2.1([14]) 设 $f \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{R}$ 以及 U 是个稳定域, 若 $U \cap \varphi(f) \neq \Phi$, 则 $U \subset \varphi(f)$.

引理 2.2([14]) 设 $f \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{R}$, 则 $J(f) = \partial\varphi(f)$.

给定 \mathbb{C} 上的一个集合 E , 置

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\{\sum_i (\text{diam} U_i)^s : \{U_i\} \text{ 为 } E \text{ 的一个可数 } \delta\text{-覆盖}\},$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 若 $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ 的极限存在, 记为 $\mathcal{H}^s(E)$. 定义集合 E 的 Hausdorff 维数 $\text{dim}_H(E)$ 为

$$\text{dim}_H(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}.$$

关于超越亚纯函数的 Julia 集的 Hausdorff 维数, Stallard [15,16]证明了: 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 则 $0 < \text{dim}_H J(f) \leq 2$. 对至多只有有限个极点的亚纯函数 Julia 集的 Hausdorff 维数至少为 1, 即 $\text{dim}_H J(f) \geq 1$. 但这个结论对 $\delta(\infty, f) > 0$ 的超越亚纯函数是否成立还待进一步研究. 设 $f(z)$ 为有界型的超越亚纯函数, 具有无穷个极点 $\{a_n\}$. 给定一系列 r_n 在 $B_n = B(a_n, r_n)$ 上

$$|f(z)| \sim \frac{|b_n|}{|z - a_n|^m}, |f'(z)| \sim \frac{m|b_n|}{|z - a_n|^{(m+1)}}.$$

如果对充分大的 n_0 , 使得 $\overline{B_k} \subset f(B_n), k, n \in \mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n'_0 \leq n \leq n_0\}$. 则 $\text{dim}_H J(f) \geq \alpha$, 其中 α 由如下不等式确定

$$\sum_{n=n'_0}^\infty (r_n |a_n|^{-\frac{m+1}{m}})^\alpha \geq (K^{-1} L m r_1 |b_l|^{-\frac{1}{m}} (\text{diam} B_0 + 1))^\alpha.$$

其中 $l \in \mathbb{N}, B_0 = B_{n_0}, K, L$ 是常数。

$$\text{设 } \widehat{\mathbf{B}} = \{f \in \mathbf{B} : \overline{\mathcal{P}(f)} \cap J(f) = \Phi\}, f_{p,\lambda} = \lambda \sum_{n=p^2}^\infty (\frac{1}{n^p - z} - \frac{1}{n^p + z}), p \in \mathbb{N}, \lambda > 0,$$

Stallard [16]证明了:

当 $0 < \lambda < \frac{p^{4p-1}}{10^4 \ln p}, p \geq 6$ 时, $f_{p,\lambda} \in \widehat{\mathbf{B}}$;

如果 $p \geq 6, 0 < \lambda < \frac{1}{6^p}$, 则 $\dim_H J(f_{p,\lambda}) \leq \frac{1}{p}$;

如果 $p \geq 6, \frac{p^{4p-1}}{10^5 \ln p} < \lambda < \frac{p^{4p-1}}{10^4 \ln p}$, 则 $\dim_H J(f_{p,\lambda}) \geq 1 - (\frac{30 \ln \ln p}{\ln p})$.

设 Ω 为单连通域, U 为 $\partial\Omega$ 的邻域. 设 f 为定义在 U 上的全纯映射, 称 Ω 为 RB-域, 如果满足下列条件:

- 1) $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$,
- 2) $f(U \cap \Omega) \subset \Omega$,
- 3) $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U \cap \bar{\Omega}) = \partial\Omega$.

Przytycki, Urbanski 和 Zdunik [17, 18]得到如下的结果:

引理 2.3 若 Ω 为 RB-域, 则 $\dim_H(\Omega) > 1$.

3. 定理 1 的证明

由 (1) 得

$$f(z) = 2z \left(\frac{\exp(4z) - (-1)}{\exp(4z) - (-3)} \right)^2$$

两边取模得

$$|f(z)| = 2|z| \frac{|\exp(4z) - (-1)|^2}{|\exp(4z) - (-3)|^2} \tag{2}$$

当 $Re(\exp(4z)) \leq -2$ 时,

$$|\exp(4z) - (-1)| \geq |\exp(4z) - (-3)|,$$

由 (2) 得 $|f(z)| \geq 2|z|$, 因此 $|f^n(z)| \geq 2^n|z|$.

当 $Re(\exp(4z)) \geq -2$ 时,

$$|\exp(4z) - (-1)| \leq |\exp(4z) - (-3)|,$$

由 (2) 得 $|f(z)| \leq 2|z|$, 因此 $|f^n(z)| \leq 2^n|z|$.

令 $z = x + yi$, 则 $Re(\exp(4z)) = \exp(4x) \cos(4y)$.

(I) 当 $Re(\exp(4z)) \leq -2$, 即 $\exp(4x) \cos(4y) \leq -2$ 时,

$$\cos(4y) \leq \frac{-2}{\exp(4x)},$$

因此, $\cos(4y) < 0$ 且 $\exp(4x) > 2$, 即

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < y < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x > \frac{1}{4} \ln 2.$$

反之, 当

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < y < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}, x > \frac{1}{4} \ln 2 \text{ 且 } \exp(4x) \cos(4y) \leq -2,$$

时

$$\operatorname{Re}(\exp(4z)) \leq -2, |f^n(z)| \geq 2^n |z| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

因此, $z \in F(f)$.

(II) 当 $\operatorname{Re}(\exp(4z)) > -2$, 即 $\exp(4x) \cos(4y) > -2$ 时, 可再分两类讨论

1) 当 $\cos(4y) \geq 0$, 即

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \leq y \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

时, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\exp(4x) \cos(4y) > -2$.

2) 当 $\cos(4y) < 0$, 即

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < y < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

时, $\exp(4x) < \frac{-2}{\cos(4y)}$.

下面进一步我们对满足 $\exp(4x) \cos(4y) > -2$ 的复数 $z = x + yi$ 进行讨论.

由 (2) 得

$$\begin{aligned} |f(z)| &= 2|z| \frac{|\exp(4z) + 1|^2}{|\exp(4z) + 3|^2} \\ &= |x + yi| \frac{2|\exp(4x) \cos(4y) + 1 + i \exp(4x) \sin(4y)|^2}{|\exp(4x) \cos(4y) + 3 + i \exp(4x) \sin(4y)|^2}. \end{aligned}$$

化简得

$$|f(z)| = |x + yi| \frac{2\exp(8x) + 4\exp(4x) \cos(4y) + 2}{\exp(8x) + 6\exp(4x) \cos(4y) + 9}$$

若 $|f(z)| < |z|$, 则由上式得 $\exp(8x) - 2\exp(4x) \cos(4y) - 7 < 0$. 反之亦然. 因此, 当 $z = x + yi$ 满足

$$\begin{cases} \exp(8x) - 2\exp(4x) \cos(4y) - 7 < 0 \\ \exp(4x) \cos(4y) > -2 \end{cases} \quad (3)$$

时 $|f(z)| < |z|$, $|f^n(z)| < |z|$, 故 $z \in F(f)$.

方程组 (3) 可同解变形为

$$\begin{cases} \exp(4x) \cos(4y) > \frac{1}{2} \exp(8x) - \frac{7}{2} \\ \exp(4x) \cos(4y) > -2 \end{cases} \quad (4)$$

若 $\frac{1}{2} \exp(8x) - \frac{7}{2} > -2$, 即 $x > \frac{1}{8} \ln 3$ 时方程组 (4) 可同解变形为

$$\exp(4x) \cos 4y > \frac{1}{2} \exp(8x) - \frac{7}{2}.$$

因此, 当 $z = x + yi$ 满足 $x > \frac{1}{8} \ln 3$ 且

$$\cos 4y > \frac{1}{2} \exp(4x) - \frac{7}{2} \exp(-4x)$$

时, $z \in F(f)$.

若 $\frac{1}{2} \exp(8x) - \frac{7}{2} < -2$, 即 $x < \frac{1}{8} \ln 3$ 时, 方程组 (4) 可同解变形为 $\exp(4x) \cos(4y) > -2$. 因此, 当 $z = x + yi$ 满足 $x < \frac{1}{8} \ln 3$ 且 $\cos 4y > -2 \exp(-4x)$ 时, $z \in F(f)$.

结合上面的讨论, 当 $x < \frac{1}{8} \ln 3$,

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \leq y \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

时, $z \in F(f)$.

当

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < y < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

且 $\cos 4y > -2 \exp(-4x)$ 时, $z \in F(f)$.

当

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < y < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z},$$

$x > \frac{1}{4} \ln 2$ 且 $\exp(4x) \cos 4y \leq -2$ 时,

$$Re(\exp(4z)) \leq -2, |f^n(z)| \geq 2^n |z| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty,$$

取 $k = 0$. 记在 $x > \frac{1}{4} \ln 2$ 且 $\frac{\pi}{8} < y < \frac{3\pi}{8}$ 内满足 $\exp(4x) \cos 4y \leq -2$ 的点 z 所在的区域为 D , 则由引理 2.1 知 $D \subseteq \varphi(f)$, 因此, 由引理 2.2 得

$$\dim_H J(f) = \dim_H \partial \varphi(f) \geq \dim_H \partial D \geq 1.$$

下面进一步证明 $\dim_H J(f) > 1$.

因为 $f(z)$ 有吸性不动点 $z_1 = 0$, 设 D' 为含原点 O 的单连通吸性不变域, U 为 D' 内的某邻域.

则

- 1) $f(\partial D') = \partial D'$,
- 2) $f(U \cap D') \subset D'$,
- 3) $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U \cap \overline{D'}) = \partial D'$.

故 D' 为 RB-域, 所以由引理 2.3 得 $\dim_H(D') > 1$. 又因为 $\partial D' \subset J(z)$, 所以 $\dim_H J(f) \geq \dim_H(D') > 1$.

4. 定理 2 的证明

为了证明定理 2, 我们先给出所需的引理。

引理 4.1([19]) 亚纯函数的周期域是单连通, 二连通或无穷连通。

引理 4.2([13]) 设 f 为超越亚纯函数, D 为 f 的一个不变域, 即 $F(f)$ 的一个周期为 1 的周期分支, 则 D 为连通数为 0, 1, ∞ 。

由引理 4.1 和引理 4.2 可得

引理 4.3 超越亚纯函数的稳定不变域是单连通或无穷连通。

引理 4.4([20]) $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的紧子集 W 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上是连通当且仅当 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus W$ 每个分支单连通。

对前面定义的如下两个函数集

$$\mathfrak{M} = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ 是超越亚纯函数或是次数至少为 } 2 \text{ 的有理函数}\};$$

$$\mathfrak{P} = \{f \mid \text{存在一个 } \text{Möbius} \text{ 变换 } M(z) \text{ 使得 } M^{-1} \circ f \circ M(z) = z^k \exp(S(z) + T(\frac{1}{z}))\},$$

其中 k 是整数, $S(z)$ 和 $T(z)$ 是整函数。

Baker 得到如下关于集合 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{P} 结论:

引理 4.5([21]) 设 $f \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{P}$, 则在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上 $J(f)$ 或者是单连通或者由不可数分支构成。

定理 2 函数 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 由不可数分支构成。

证明 先证明 $f(z)$ 的包含 x 轴 z_2 ($z_2 = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2})$) 左边部分的吸性不变域 D_0 是无穷连通的。由于 D_0 是 $f(z)$ 的吸性不变域, 由 $f(z)$ 及引理 4.3 知 D_0 是单连通或无穷连通的。取 D_0 的子域

$$D'_0 = \{z \mid z \in D_0, \operatorname{Re} z > -\delta, -\frac{i}{4} - \delta < \operatorname{Im} z < \frac{i}{4} + \delta\}.$$

由 [6] 中 $f(z)$ 的临界点位置讨论及临界点的离散性知, 取适当小的正数 δ 可使 D'_0 仅含 $z = \pm \frac{\pi i}{4}$ 两个临界点。

由于 D_0 是 $f(z)$ 的吸性不变域, 故存在正整数 $k \geq 1$, 使得 $f^k(D'_0)$ 为 D'_0 内的单连通区域, 记为 D''_0 , 则 $f^k(D'_0) = D''_0$, 由 Riemann-Hurwitz 公式有

$$\chi(D'_0) = d\chi(D''_0) - \Sigma_f,$$

其中 d 为覆盖的重数, Σ_f 为临界点个数。由于 $z = \pm \frac{\pi i}{4}$ 为 f 的二重零点, $z = 0$ 为 f 的单零点, 故

f^k 的覆盖重数 $d \geq 5k$, 而 $\Sigma_f = 2$. 由 Riemann-Hurwitz 公式得

$$\chi(D'_0) = d - 2 > 1,$$

故 D_0 是无穷连通。

另一方面, 可验证 $f(z) \notin \mathfrak{P}$, 由引理 4.5, $J(f)$ 或者是单连通或者由不可数分支构成。假设 $J(f)$ 是单连通, 则由引理 4.4 知 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J(z) = F(z)$ 的每个分支单连通, 这与 D_0 无穷连通矛盾, 故 $J(f)$ 由不可数分支构成。

由图 1, 图 2, 图 3 进一步应证了定理 1 和 2 的结论。



Figure 1. Compute simulation image of the vertical rotate $J(f)$

图 1. Julia集顺时针旋转90度的计算机模拟图

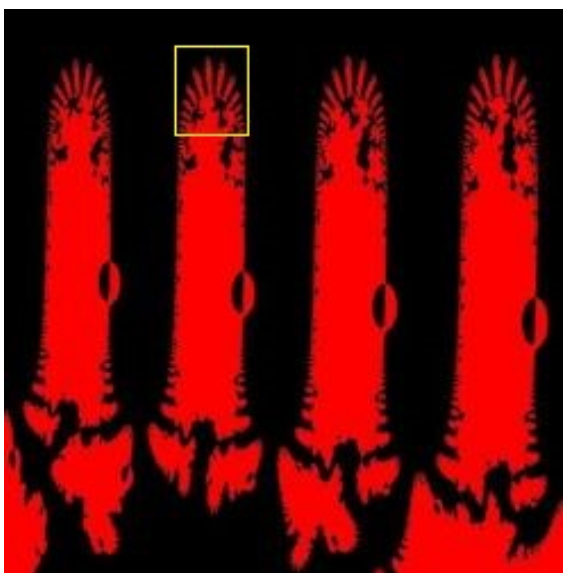


Figure 2. Compute simulation image of part $J(f)$

图 2. 部分Julia集的计算机模拟图



Figure 3. Compute simulation image of local $J(f)$

图 3. 局部Julia集的计算机模拟图

基金项目

国家自然科学基金(11861005)。

参考文献

- [1] Yang, C.N. and Lee, T.D. (1952) Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation. *Physical Review*, **87**, 404-409.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.404>
- [2] Yang, C.N. and Lee, T.D. (1952) Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. *Physical Review*, **87**, 410-419.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.410>
- [3] McMullen, C.T. (1994) *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [4] Qiao, J.Y. (2005) Julia Sets and Complex Singularities in Diamond-Like Hierarchical Potts Models. *Science in China Series A: Mathematics*, **48**, 388-412.
- [5] Qiao, J.Y. and Li, Y.H. (2001) On Connectivity of Julia Sets of Yang-Lee Zeros. *Communications in Mathematical Physics*, **222**, 319-326. <https://doi.org/10.1007/s002200100507>
- [6] Yang, C.J. and Wang, S.M. (2020) The Singularities in Renormalization of Triangular Net Ising Model. *Journal of Dali University*, **5**, 1-8.

-
- [7] Onsager, L. (1944) Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, **65**, 117-149. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.65.117>
- [8] Yang, C.N. (1952) The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model. *Physical Review*, **85**, 808-816. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.808>
- [9] Niemeijer, Th. and van Leeuwen, J.M.J. (1973) Wilson Theory for Spin Systems on a Triangular Lattice. *Physical Review Letters*, **31**, 1411. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.31.1411>
- [10] Beardon, A.F. (1991) Iteration of Rational Functions. Springer-Verlag, New York, Berlin.
- [11] Carleson, L. and Gamelin, T.W. (1993) Complex Dynamics. Springer-Verlag, New York, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4364-9>
- [12] Milnor, J. (2006) Dynamics in One Complex Variable. 3rd Edition, Princeton University Press, New Jersey.
- [13] Ren, F.Y. (1996) Complex Analysis Dynamics. Fudan University Press, Shanghai. (In Chinese)
- [14] Zheng, J.H. (2006) Dynamics of Meromorphic Functions. Tsinghua University Press, Beijing.
- [15] Stallard, G.M. (1994) The Hausdorff Dimension of Julia Sets of Meromorphic Functions. *Journal of the London Mathematical Society*, **49**, 218-295. <https://doi.org/10.1112/jlms/49.2.281>
- [16] Stallard, G.M. (1999) The Hausdorff Dimension of Julia Sets of Meromorphic Functions II. *Journal of the London Mathematical Society*, **60**, 874-859. <https://doi.org/10.1112/S0024610799008029>
- [17] Przytycki, F., Urbanski, M. and Zdunik, A. (1990) Harmonic, Gibbs and Hausdorff Measures on Repellers for Holomorphic Maps, II. *Studia Mathematica*, **97**, 189-225. <https://doi.org/10.4064/sm-97-3-189-225>
- [18] Zdunik, A. (1991) Harmonic Measure versus Hausdorff Measures on Repellers for Holomorphic Maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, **326**, 633-652. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-1031980-0>
- [19] Bolsch, A. (1999) Periodic Fatou Components of Meromorphic Functions. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **31**, 543-555. <https://doi.org/10.1112/S0024609399005950>
- [20] Noshiro, K. (1960) Cluster Sets. Springer-Verlag, Berlin, 144. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85928-1>
- [21] Baker, I.N. (1987) Wandering Domains for Maps of the Punctured Plane. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae: Series A. I. Mathematica*, **12**, 191-198. <https://doi.org/10.5186/aasfm.1987.1204>